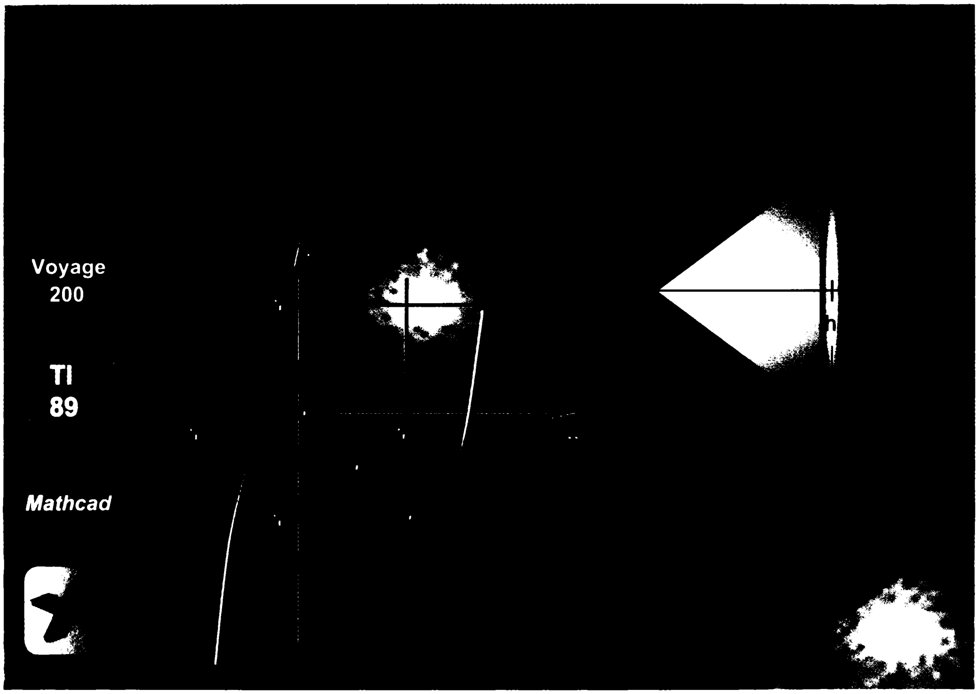
Timischl
Kaiser

Ingenieur-Mathematik 3



E. DORNER

Wolfgang Timischl
Gerald Kaiser

Ingenieur-Mathematik

3

E. DORNER

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten, GZ. 43.858/1-III/D/13/98, für den Unterrichtsgebrauch an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten für den III. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik sowie für den Unterrichtsgebrauch an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten für den III. Jahrgang nach den derzeit geltenden Lehrplänen im Unterrichtsgegenstand Mathematik und Angewandte Mathematik geeignet erklärt.

Buch-Nr. 3835

Timischl - Kaiser
Ingenieur-Mathematik 3

Ungargasse 35, 1030 Wien
Tel. 01/533 56 36, Fax: 01/533 56 36-15
E-Mail: office@dorner-verlag.at
www.dorner-verlag.at

ISBN 978-3-7055-**0157**-7

Dazu ist lieferbar:
"Ingenieur-Mathematik 3 - Lösungen"
Buch-Nr. 3871, ISBN 978-3-7055-**0209**-3

5. Auflage, 2007
Alle Drucke sind im Unterricht parallel verwendbar.

Wir danken den Herren DI Max Hammerl, Mag. Bernd Hortig, DI Franz H. Kainz, DI Dr. Ferdinand Paill, DI Franz Windisch und Mag. Bruno Zavertanik für wertvolle Anregungen.

Niemand ist perfekt ...
... natürlich auch wir nicht. Umso dankbarer sind wir daher allen Verwendern dieses Werkes, wenn sie uns
- auf Fehler hinweisen,
- zu Verbesserungen anregen.

Wolfgang Timischl **Gerald Kaiser**

E-Mail:
wolfgang.timischl@gmx.at
gerald.kaiser@inode.at

Umschlag, Satz, Computergraphik, Repro und Montage:
DOKU-Consult GmbH, Wien
Gesamtherstellung: Verlag E. DORNER GmbH, Wien

Inhalt

1 Folgen und Reihen

1.1 Einführung

Folgen bilden gewissermaßen die Schwelle von der elementaren Mathematik zur "höheren" Mathematik. Sie sind zudem ein zentraler Begriff in der *diskreten* Mathematik, die auf Grund der modernen Rechentechnik bedeutsame Anwendungsmöglichkeiten besitzt.

Beispiel 1.1 : Quadratwurzel einer Zahl

Von HERON (1. Jh. n. Chr.) stammt ein einfaches Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel von 2. Man geht von einem Näherungswert a_0 von $\sqrt{2}$ aus, etwa $a_0 = 1{,}4$ oder auch $a_0 = 1$. Mit diesem berechnet man $\frac{2}{a_0}$ und bildet dann von a_0 und $\frac{2}{a_0}$ das arithmetische Mittel $a_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(a_0 + \frac{2}{a_0}\right)$. Aus a_1 und $\frac{2}{a_1}$ bildet man wieder das arithmetische Mittel a_2. Diesen Vorgang wiederholt man immer wieder. Nach HERON entstehen dabei immer bessere Näherungswerte für $\sqrt{2}$.

a) Gib die Folge dieser Näherungswerte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ an!

b) Gib das Bildungsgesetz der Näherungswerte an!

Lösung

Zu **a)** $a_1 = 1{,}4$ ist ein Näherungswert von $\sqrt{2}$.

a_1 ist kleiner als $\sqrt{2}$, da $1{,}4^2 = 1{,}96$ ist. Multipliziert man 1,4 statt mit 1,4 mit $\frac{2}{1{,}4}$, so erhält man genau 2. 1,4 ist kleiner, $\frac{2}{1{,}4}$ ist größer als $\sqrt{2}$. Es ist daher naheliegend, ihr arithmetisches Mittel als besseren Näherungswert a_1 zu wählen!

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1{,}4 + \frac{2}{1{,}4}\right) = 1{,}41428571428\ldots; \qquad a_2^2 = 2{,}0002040816\ldots;$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(1{,}4142857\ldots + \frac{2}{1{,}4142857\ldots}\right) = 1{,}41421356421\ldots; \qquad a_3^2 = 2{,}0000000052\ldots;$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(1{,}4142135\ldots + \frac{2}{1{,}4142135\ldots}\right) = 1{,}41421356237\ldots; \qquad a_4^2 = 2{,}0000000000\ldots.$$

Die weiteren Näherungswerte $a_5, a_6, \ldots$ unterscheiden sich in den angegebenen Dezimalstellen nicht mehr von a_4; wir brechen die Berechnung von Näherungswerten hier ab.

Zu **b)** Das Bildungsgesetz besteht hier in der Berechnungsvorschrift, wie man von einem Näherungswert a_n zum nächsten Näherungswert a_{n+1} kommt: $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$.

Ersetzt man übrigens in dieser Formel die Zahl 2 in der Klammer durch p, so erhält man Näherungswerte für $\sqrt{p}$ (Anfangswert beliebig $\neq 0$).

Die Zahlen $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ bilden eine Folge zur immer genaueren Berechnung von $\sqrt{2}$. Charakteristisch ist, dass es ein Bildungsgesetz zur Berechnung der Werte $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ gibt. Ein derartiges Aufeinanderfolgen von Zahlen ist von zentraler Bedeutung in der Mathematik und wird nun genauer betrachtet. Man definiert:

Reelle Zahlenfolge

Eine fortlaufende Anordnung reeller Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ mit einem Bildungsgesetz heißt eine **reelle Zahlenfolge**, kurz **Folge**. Üblicherweise schreibt man eine Folge zwischen spitzen Klammern: $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\rangle$ oder kürzer $\langle a_n\rangle$.

Die einzelnen Zahlen werden **Glieder** der Folge genannt. a_1 heißt erstes Glied, a_2 zweites Glied, ..., a_n n-tes Glied oder auch **allgemeines** Glied der Folge. Der Index gibt an, das wievielte Glied der Folge gemeint ist.

Ist die Anzahl der Glieder endlich, so heißt die Folge **endlich**, andernfalls **unendlich**.

Anmerkungen:

(1) Eine Folge kann auch als Funktion $y = f(n)$ aufgefasst werden mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ im Falle einer unendlichen Folge oder $D = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ im Falle einer endlichen Folge mit m Gliedern.

Man spricht auch von einer *diskreten* Funktion, weil die Definitionsmenge aus einzelnen, durch endliche Intervalle voneinander getrennten Zahlenwerten besteht. Der Gegensatz zu diskret ist kontinuierlich.

(2) Bei Anwendungsaufgaben beginnt der Zählindex n öfters bereits mit 0, sodass es also auch ein nulltes Glied a_0 gibt. Dies ist dann ausdrücklich angegeben.

(3) Beachte, dass bei einer Aufzählung der Folge die *Reihenfolge* wesentlich ist. Die Folge $\langle a_n\rangle = \langle 1, 2, 3, 4, \ldots\rangle$ und die Folge $\langle b_n\rangle = \langle 1, 2, 4, 3, \ldots\rangle$ sind verschiedene Folgen!

Wesentlich für eine Folge ist ihr **Bildungsgesetz**. Dieses kann in Worten ausgedrückt sein (beispielsweise die Folge der Ziffern von π, also die Folge $\langle 3, 1, 4, 1, 5, \ldots\rangle$). Praktisch sind besonders zwei Arten eines Bildungsgesetzes von Bedeutung:

a) **Termdarstellung** einer Folge: Angabe eines Terms (einer "Formel"), wie das allgemeine Glied a_n aus dem Index n berechnet werden kann.

b) **Rekursive Darstellung** einer Folge (rekursiv = zurücklaufend): Angabe, wie ein Folgeglied aus dem *vorhergehenden* Folgeglied oder aus mehreren *vorhergehenden* Folgegliedern berechnet werden kann.

Beispiel 1.2 : Folgen und ihr Bildungsgesetz

Gib die ersten sechs Glieder der Folge an:

a) $\langle a_n\rangle = \langle n^2\rangle$ **b)** $\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{n}{n+1}\right\rangle$ **c)** $\langle x_n\rangle = \left\langle (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right\rangle$ **d)** $\langle c_n\rangle = \left\langle \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right\rangle$

e) $\langle a_n\rangle = \langle 2n - 1\rangle$ **f)** $\langle b_n\rangle = \langle 2 \cdot 2^{-n}\rangle$ **g)** $x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n^2 + 1$ **h)** $f_0 = 1, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

In **a)** bis **f)** ist die Folge in einer Termdarstellung, in **g)** und **h)** rekursiv gegeben.

Lösung

Zu **a)** $\langle n^2\rangle = \langle 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \ldots\rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\rangle$

Zu **b)** $\left\langle \frac{n}{n+1}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1}, \frac{3}{3+1}, \frac{4}{4+1}, \frac{5}{5+1}, \frac{6}{6+1}, \ldots\right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots\right\rangle$

Zu **c)** $\left\langle (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right\rangle = \left\langle (-1)^1 \cdot \frac{1}{1}, (-1)^2 \cdot \frac{1}{2}, (-1)^3 \cdot \frac{1}{3}, (-1)^4 \cdot \frac{1}{4}, (-1)^5 \cdot \frac{1}{5}, (-1)^6 \cdot \frac{1}{6}, \ldots\right\rangle$

$= \left\langle -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right\rangle$

Zu **d)** $\langle c_n\rangle = \left\langle \sin\left(1\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(5\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(6\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \ldots\right\rangle$
$= \langle 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\rangle$

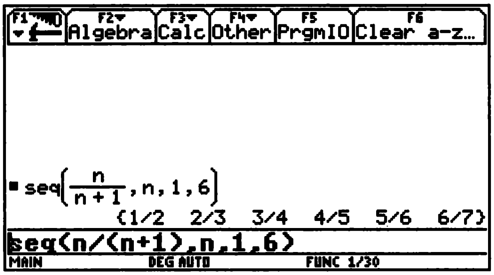
Zu **e)** $\langle a_n\rangle = \langle 2\cdot1-1,\ 2\cdot2-1,\ 2\cdot3-1,\ 2\cdot4-1,\ 2\cdot5-1,\ 2\cdot6-1, \ldots\rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\rangle$;
$\langle a_n\rangle$ ist die Folge der ungeraden natürliche Zahlen.

Zu **f)** $\langle b_n\rangle = \langle 2\cdot2^{-1},\ 2\cdot2^{-2},\ 2\cdot2^{-3},\ 2\cdot2^{-4},\ 2\cdot2^{-5},\ 2\cdot2^{-6}, \ldots\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right\rangle$

Zu **g)** $x_1 = 1,\ x_2 = x_1^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2,\ x_3 = x_2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5,\ x_4 = 5^2 + 1 = 26,$
$x_5 = 26^2 + 1 = 677,\ x_6 = 677^2 + 1 = 458\,330,\ x_7 = 458\,330^2 + 1 = 210\,066\,388\,901, \ldots$
oder $\langle x_n\rangle = (1,\ 2,\ 5,\ 26,\ 677,\ 458\,330,\ 210\,066\,388\,901, \ldots\rangle$

Zu **h)** Für $n \geqslant 1$ ist f_{n+1} die Summe der beiden vorhergehenden Glieder.
$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_2 = 1 + 1 = 2,\ f_3 = 2 + 1 = 3,\ f_4 = 3 + 2 = 5,\ f_5 = 5 + 3 = 8, \ldots$ oder
$\langle f_n\rangle = \langle 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\rangle$.
Diese Folge wird als FIBONACCI[1]-Folge (gesprochen: "fibonatschi", Betonung auf a) bezeichnet.

Voyage 200



Ist eine Folge in der Termdarstellung gegeben, so können ihre Glieder mit Hilfe der Sequence-Funktion `seq()` ermittelt werden (im Menü MATH/List oder Eintippen):
Nach dem allgemeinen Glied wird die Folgenvariable sowie der Index des ersten und letzten Gliedes des eingegeben.

Sind nur einige Glieder einer Folge gegeben, so kann nicht sicher auf das Bildungsgesetz geschlossen werden!
Beispiel: Die Folge $\langle 1, 2, 3, 4, \ldots\rangle$ lässt zwar vermuten, dass das nächste Glied 5 ist.
Aber auch die Folge $\left\langle\frac{1}{8}\cdot\left(n^4 - 10\,n^3 + 35\,n^2 - 42\,n + 24\right)\right\rangle$ beginnt in gleicher Weise, jedoch ist bei ihr das 5. Glied gleich 8.

Beispiel 1.3 : Graphische Darstellung einer Folge

Stelle die Folge graphisch dar: **a)** $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ **b)** $x_{n+1} = 0{,}8\cdot(1 - x_n),\ x_1 = 1$

Lösung

Zu **a)** $\langle a_n\rangle = \left\langle 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \ldots\right\rangle$.
Man kann nun die Folge wie folgt graphisch darstellen:
1. Möglichkeit: a_n als Punkte auf der Zahlengeraden (Abb. 1.1)

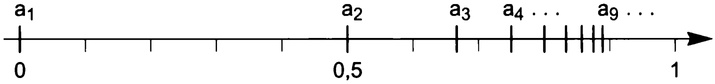


Abb. 1.1 $\langle a_n\rangle$ auf der Zahlengerade

[1] LEONARDO VON PISA, (1180 – 1250), genannt FIBONACCI, italienischer Kaufmann und Mathematiker

2. Möglichkeit: Die Glieder a_n der Folge werden als Funktion des Index n in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt (Abb. 1.2).

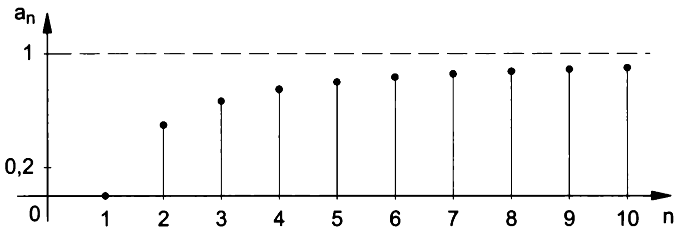


Abb. 1.2 Graph der Folge $\langle a_n \rangle$

Der Graph der Folge ist "diskret", d.h. er besteht aus einzelnen Punkten. Um die Punkte deutlicher sichtbar zu machen, sind sie mit "Stützen" gezeichnet.

Zu **b)** $\langle x_n \rangle = \langle 1, 0, 0{,}8, 0{,}16, 0{,}672, 0{,}262, 0{,}590, 0{,}328, 0{,}538, 0{,}370, \ldots \rangle$. Abb. 1.3 und Abb. 1.4 zeigen zwei Möglichkeiten der graphischen Darstellung.

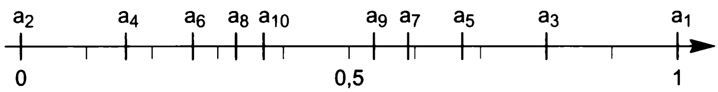


Abb. 1.3 $\langle x_n \rangle$ auf der Zahlengeraden

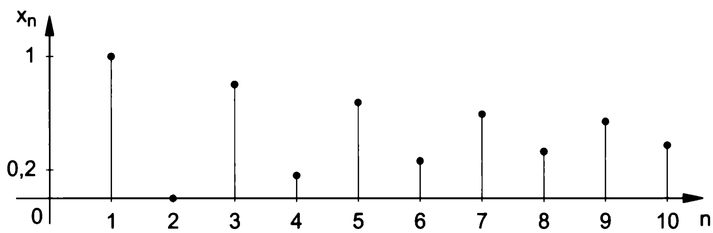
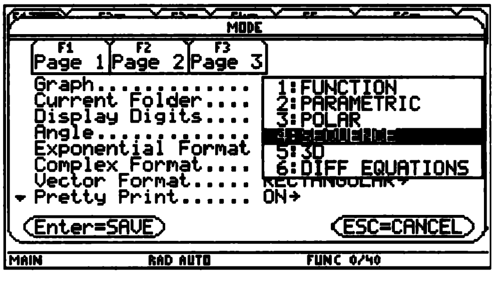
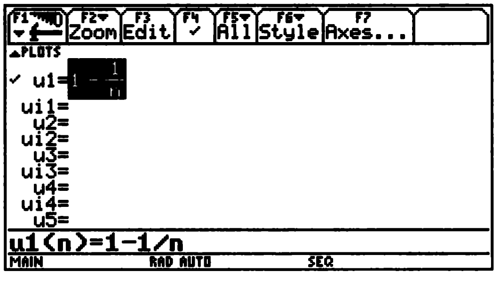


Abb. 1.4 Graph der Folge $\langle x_n \rangle$

Voyage 200

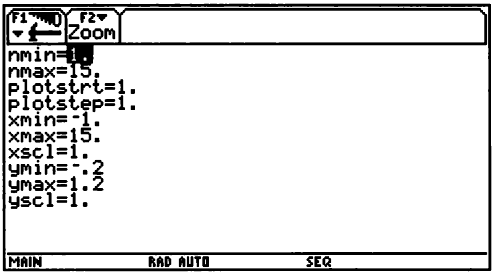


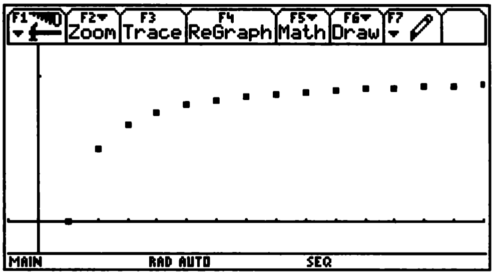



```
Im Mode-Menü wird bei Graph SEQUENCE aktiviert und mit ENTER ENTER be-
stätigt.
```

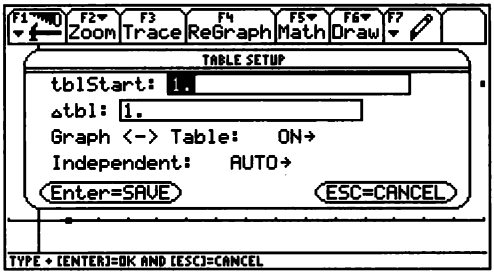
```
Danach ist die Vorgangsweise grundsätzlich gleich wie beim Zeichnen des
Graphen einer Funktion. Statt y1 findet man u1 und gibt dort die Folge
ein (bei allfälligen Änderungen zuerst F3 ).
```

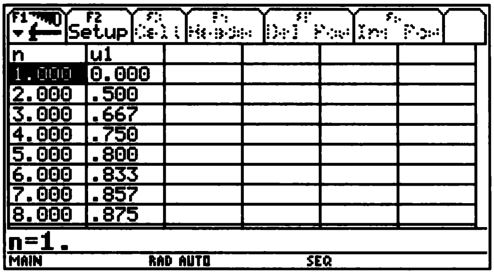
```
Window-Einstellungen:  nmin und nmax geben den n-Bereich für u1 an,
plotstrt den Startwert, plotstep die Schrittweite für n an. Nach Aufruf
der Graphik kann man mit F3 (Trace) den Graph punktweise abtasten.
```



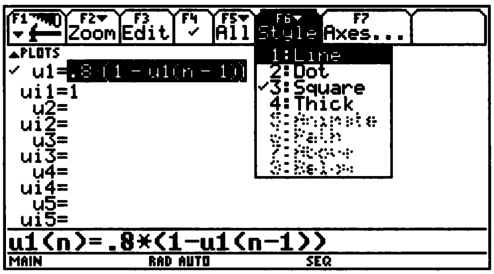


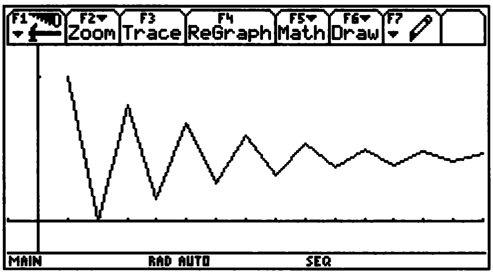
Zur Berechnung der Folgeglieder u1(n) wird zuerst das TABLE SETUP vorgenommen.





Für die Eingabe einer rekursiv gegebenen Folge ist auch der Anfangswert ui1 (i wie initial) anzugeben, das ist der Wert von u1(nmin). Zusätzlich ist zu beachten, dass bei einer rekursiven Eingabe u1 das Folgeglied mit dem Index n ist! Die Gleichung $x_{n+1} = 0{,}8\ (1 - x_n)$ ist daher auf $x_n = 0{,}8\ (1 - x_{n-1})$ umzuschreiben. Statt die Punkte durch kleine Quadrate darzustellen, können im y-Editor nach F6 1 (1: Line) die Punkte durch einen Streckenzug verbunden werden.





Folgen können Regelmäßigkeiten im Verhalten ihrer Glieder zeigen.

$\langle a_n \rangle$ heißt **streng monoton wachsend**, wenn jedes Folgeglied a_{n+1} **größer** als sein Vorgänger a_n ist: $a_n < a_{n+1}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\langle a_n \rangle$ heißt **streng monoton fallend**, wenn jedes Folgeglied a_{n+1} **kleiner** als sein Vorgänger a_n ist: $a_n > a_{n+1}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

Lässt man das Wort "streng" weg, so können alle oder einzelne Folgeglieder auch gleich groß wie ihre Vorgänger sein.

Beispiele:

$\left\langle 1-\frac{1}{n}\right\rangle = \left\langle 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \dots\right\rangle$ ... streng monoton wachsend.

$\langle 2\cdot 2^{-n}\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right\rangle$ ... streng monoton fallend.

Die Folge $\langle x_n\rangle$ mit $x_n = 0{,}8\cdot(1 - x_{n-1})$ und $x_1 = 1$ besitzt kein Monotonieverhalten.

> Eine Folge $\langle a_n\rangle$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl A gibt, sodass *alle* Glieder kleiner oder gleich A sind: $a_n \leqslant A$, $n = 1, 2, 3, \dots$. A heißt eine **obere Schranke** der Folge $\langle a_n\rangle$.
>
> Eine Folge $\langle a_n\rangle$ heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl B gibt, sodass *alle* Glieder größer oder gleich B sind: $a_n \geqslant B$, $n = 1, 2, 3, \dots$. B heißt eine **untere Schranke** der Folge $\langle a_n\rangle$.

Ist A eine obere Schranke der Folge $\langle a_n\rangle$, dann ist auch jedes $A^* > A$ eine obere Schranke dieser Folge. Ist B eine untere Schranke, dann ist auch jedes $B^* < B$ eine solche.

Beispiele:

$\left\langle 1-\frac{1}{n}\right\rangle$ ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt. So ist sicher 1 eine obere und 0 eine untere Schranke, da die Differenz $1-\frac{1}{n}$ stets kleiner als 1 und größer oder gleich 0 ist. Dagegen besitzt die Folge $\langle 2n-1\rangle = \langle 1, 3, 5, \dots\rangle$ wohl eine untere, aber keine obere Schranke.

Im Überblick: Einführung

Eine fortlaufende Anordnung reeller Zahlen $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\rangle$, kurz $\langle a_n\rangle$, heißt reelle Zahlenfolge, kurz **Folge**. a_n heißt n-tes Glied oder **allgemeines** Glied der Folge.

Ist die Anzahl der Glieder endlich, so heißt die Folge **endlich**, andernfalls **unendlich**.

Termdarstellung einer Folge: Angabe eines Terms, wie a_n aus n berechnet werden kann.

Rekursive Darstellung einer Folge: Angabe, wie ein Folgeglied aus dem *vorhergehenden* Folgeglied oder aus mehreren *vorhergehenden* Folgegliedern berechnet werden kann.

Graphische Darstellung einer Folge als Punkte auf der Zahlengeraden oder in einem rechtwinkligen Koordinatensystem:
n liegt auf der Abszisse ("x-Koordinate"), a_n auf der Ordinate ("y-Koordinate").

$\langle a_n\rangle$ heißt **streng monoton wachsend**, wenn jedes Folgeglied a_{n+1} **größer** als sein Vorgänger ist.

$\langle a_n\rangle$ heißt **streng monoton fallend**, wenn jedes Folgeglied a_{n+1} **kleiner** als sein Vorgänger ist.

$\langle a_n\rangle$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl A gibt, sodass *alle* Glieder kleiner oder gleich A sind: $a_n \leqslant A$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

$\langle a_n\rangle$ heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl B gibt, sodass *alle* Glieder größer oder gleich B sind: $a_n \geqslant B$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Aufgaben

Bestimme die ersten sechs Glieder der Folge

1.1 **a)** $\langle 2n \rangle$ **b)** $\langle (-1)^n \rangle$ **c)** $\langle n^3 - n^2 \rangle$ **d)** $\langle n \cdot 2^{-n} \rangle$

e) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ **f)** $b_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ **g)** $c_n = \frac{4n-1}{(n+1)^2}$ **h)** $x_n = (-1)^{2n+1}$

i) $a_n = (-1)^{n+1}$ **j)** $a_n = 1 - (-1)^n$ **k)** $c_n = \cos(n \cdot \pi)$ **l)** $x_n = \sin(n \cdot \pi)$

m) $s_n = 1 - \cos(n \cdot \pi)$ **n)** $b_n = 1 + \cos^2(n \cdot \pi)$ **o)** $a_n = \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)$ **p)** $a_n = \sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)$

1.2 **a)** $a_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 2^n & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$ **b)** $x_n = \begin{cases} n+1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ n-1 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$

1.3 **a)** $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n^2$ **b)** $a_1 = 1, a_{n+1} = -a_n$ **c)** $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 1$

d) $b_1 = 1, b_{n+1} = 2 \cdot b_n$ **e)** $c_1 = 0, c_{n+1} = c_n + 2 \cdot (-1)^n$ **f)** $x_1 = 1, x_{n+1} = 0{,}1 \cdot x_n + 1$

1.4 **a)** $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} + a_n$ **b)** $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} - a_n$

c) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ **d)** $x_1 = 0, x_2 = 1, x_{n+2} = \frac{1}{2} \cdot (x_{n+1} + x_n)$

e) $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3, x_{n+3} = \frac{1}{3} \cdot (x_{n+2} + x_{n+1} + x_n)$

1.5 Bestimme die ersten 10 Glieder der Folge

a) $x_n = \text{int}(1 + \sqrt{n})$ **b)** $y_n = 2 \cdot \text{int}\left(\frac{n}{2}\right)$ **c)** $u_n = n \bmod 2$ **d)** $v_n = n \bmod 3$

1.6 Eine Folge ist rekursiv gegeben. Wie könnte die Termdarstellung der Folge lauten?

a) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$ **b)** $b_1 = 10, b_{n+1} = b_n - 1$ **c)** $u_1 = 0, u_{n+1} = u_n + 0{,}1$

d) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3 \cdot a_n$ **e)** $x_1 = 2, x_{n+1} = 0{,}5 \cdot x_n$ **f)** $u_1 = 1, u_{n+1} = -u_n$

1.7 $x_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(2\,x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$ mit $x_1 = a$ liefert eine Folge von immer besseren Näherungswerten von $\sqrt[3]{a}$. Berechne damit $\sqrt[3]{2}$ auf 5 Nachkommastellen genau.

1.8 Ein *Zufallszahlengenerator* erzeugt eine Folge von Zahlen, die möglichst "zufällig" sein sollen. Da er dazu ein rechnerisches Verfahren verwendet, ist diese Folge nicht wirklich zufällig, weshalb man oft auch von einer Folge von *Pseudo*zufallszahlen spricht. Ein typischer Zufallszahlengenerator geht nach folgender Vorschrift vor:

z_1 beliebig ("seed"), $z_{n+1} = (a \cdot z_n + r) \bmod m$,

wobei alle auftretenden Größen ganzzahlig sind. Dieser Zufallszahlengenerator liefert Zahlen zwischen 0 und $m - 1$, die sich daher nach spätestens m Schritten wiederholen müssen. Seine Tauglichkeit als Zufallszahlengenerator hängt entscheidend von der Wahl von a, r und m ab. Diese Wahl sollte Fachleuten überlassen bleiben.

Dividiert man übrigens die erhaltenen Zahlen durch m, so erhält man (Zufalls-)Zahlen zwischen 0 und 1.

Berechne die sich nach dem folgenden sehr einfachen Zahlengenerator ergebenden Zahlen, bis sie sich wiederholen

a) $z_1 = 1; z_{n+1} = (5 \cdot z_n + 3) \bmod 16$ **b)** $z_1 = 0; z_{n+1} = (7 \cdot z_n + 3) \bmod 16$

c) $z_1 = 6; z_{n+1} = (6 \cdot z_n + 3) \bmod 16$ **d)** $z_1 = 3; z_{n+1} = (12 \cdot z_n + 1) \bmod 11$

1.2 Arithmetische Folgen und Reihen

Zwei Arten von Folgen sind von besonderer praktischer Bedeutung. Betrachten wir eine Folge $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\rangle$, so gibt es zwei einfache Möglichkeiten, wie sich die Glieder ändern: Die Änderung von einem Glied zum nächsten ist entweder absolut oder relativ (prozentuell) *stets* gleich! Im ersten Fall liegt eine arithmetische, im zweiten Fall eine geometrische Folge vor.

Eine Folge $\langle a_n\rangle$ heißt **arithmetische Folge**, wenn die *Differenz* a_{n+1} und a_n je zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. D.h. es gilt für jedes n: $\mathbf{a_{n+1} = a_n + d}$.
d heißt **Differenz** der Folge.

Das allgemeine Glied a_n und damit die Termdarstellung erhält man aus dem ersten Glied a_1 durch $(n-1)$-malige Addition der Differenz d:

Allgemeines Glied a_n einer arithmetischen Folge
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

Beispiel 1.4 : Arithmetische Folge

a) Gegeben ist eine arithmetische Folge mit dem Anfangsglied $a_1 = 1$ und der Differenz $d = 0{,}8$. Berechne a_5 und gib die Termdarstellung für das allgemeine Glied a_n an.

b) Wie lautet das 10. Glied einer arithmetischen Folge mit $a_1 = 100$ und $d = -8$?

c) $a_n = 3n + 2$ und $b_n = n^2 + 1$ sind jeweils das allgemeine Glied einer Folge. Zeige, dass $\langle a_n\rangle$ eine arithmetische Folge ist, nicht jedoch $\langle b_n\rangle$.

Lösung

Zu **a)**

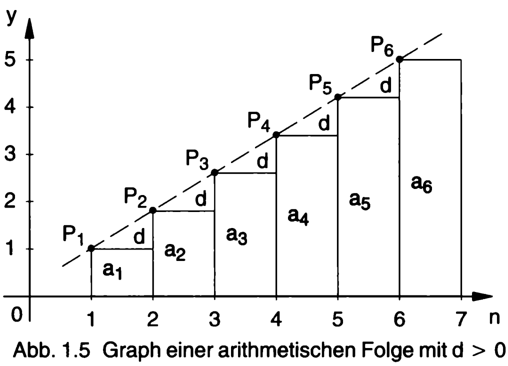


Abb. 1.5 Graph einer arithmetischen Folge mit $d > 0$

$a_5 = a_1 + 4d = 1 + 4\cdot 0{,}8 = 4{,}2;$
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 1 + (n-1)\cdot 0{,}8 =$
$= 1 + 0{,}8\cdot n - 0{,}8 = 0{,}8\cdot n + 0{,}2.$
$\langle a_n\rangle = \langle 1;\ 1{,}8;\ 2{,}6;\ 3{,}4;\ 4{,}2;\ \ldots\rangle.$

Die Folgeglieder nehmen *gleichmäßig* um $d = 0{,}8$ zu, wenn man den Zählindex n schrittweise um 1 erhöht. Daher liegen die Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ in Abb. 1.5 auf einer Geraden mit der Steigung $k = 0{,}8$, allgemein $k = d$. Daher wird eine arithmetische Folge auch als *diskreter linearer Prozess* (Prozess = Vorgang) bezeichnet; "diskret" deshalb, weil das Prozessergebnis nur in *einzelnen* Werten a_n besteht.

Zu **b)** Wegen $d = a_{n+1} - a_n < 0$, ist a_{n+1} kleiner als a_n, die Folge fällt also:
$\langle 100,\ 92,\ 84,\ 76,\ 68,\ \ldots\rangle$.
$a_{10} = a_1 + (n-1)\cdot d = 100 + (10-1)\cdot(-8) = 28.$

Zu **c)** $\langle a_n\rangle = \langle 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots\rangle$ lässt eine arithmetische Folge vermuten. Wir bilden die Differenz zweier beliebiger unmittelbar aufeinander folgender Glieder der Folge $\langle a_n\rangle$:
$d = a_{n+1} - a_n = 3(n+1) + 2 - [3n+2] = 3n + 3 + 2 - 3n - 2 = 3$; d ist stets 3, daher ist $\langle a_n\rangle$ eine arithmetische Folge.
$\langle b_n\rangle = \langle 2, 5, 10, \ldots\rangle$; die ersten beiden Differenzen $5 - 2 = 3$ und $10 - 5 = 5$ sind schon ungleich, daher kann keine arithmetische Folge vorliegen.

Beispiel 1.5 : Lineares Wachstum und lineare Abnahme

a) Jemand zahlt zu Beginn eines Jahres € 1 500,– auf ein Sparbuch ein. Die jährliche Verzinsung beträgt 4 %. Berechne den Wert des Guthabens *nach* dem 1., 2., 3., ... Monat (es sollen nur einfache Zinsen anfallen).

b) Einem Ersatzteillager von anfänglich 1 000 Stück werden täglich im Schnitt 35 Stück entnommen. Wie groß ist der Lagerbestand *nach* 14 Tagen? Nach wie vielen Tagen sinkt der Lagerbestand erstmals unter 100 Stück?

Lösung

Zu **a)** Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

K_0 ... Wert des Guthabens in € zu Jahresbeginn;

$Z_n = K_0 \cdot i \cdot \frac{n}{12} = 1\,500 \cdot 0{,}04 \cdot \frac{n}{12}$ ... Zinsen in € nach n Monaten;

$K_n = K_0 + Z_n = 1\,500 + n \cdot \frac{1500 \cdot 0{,}04}{12} = 1\,500 + n \cdot 5$ ... Guthaben in € nach n Monaten.

Dann gilt: $K_{n+1} = 1\,500 + (n+1) \cdot 5 = 1\,500 + n \cdot 5 + 5 = K_n + 5$.

Es liegt somit eine arithmetische Folge mit d = 5 vor. Hier ist es zweckmäßig, ihr Anfangsglied mit K_0 zu bezeichnen, also die Zählung mit 0 zu beginnen.

$\langle K_0, K_1, K_2, K_3, \ldots \rangle = \langle € \; 1500, € \; 1505, € \; 1510, € \; 1515, \ldots \rangle$.

Prozesse, die ein Fortschreiten in Abhängigkeit von der Zeit beschreiben, werden als Wachstumsprozesse bezeichnet. In unserem Fall spricht man, weil die Guthaben nur zu einzelnen Zeitpunkten (Monatsenden) betrachtet werden, von einem *diskreten linearen Wachstum(sprozess)*.

Zu **b)** Bezeichnungen:

B_0 ... Bestand zu Beginn

B_1 ... Bestand *nach* dem 1. Tag

B_n ... Bestand *nach* n Tagen.

Wegen der konstanten Differenz d = – 35 liegt eine arithmetische Folge vor:

$\langle B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots \rangle = \langle 1000, 965, 930, 895, 860, \ldots \rangle$.

Auch hier ist es zweckmäßig, als kleinsten Zählindex den Wert 0 zu nehmen. Beachte, dass die Termdarstellung $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ nun auf $a_n = a_0 + (n-0) \cdot d = a_0 + n \cdot d$ umzuschreiben ist!

$B_{14} = B_0 + n \cdot d = 1\,000 + 14 \cdot (-35) = 510$.

Da die arithmetische Folge eine Abnahme beschreibt, spricht man auch von einem *(diskreten linearen) Abnahmeprozess*.

Tatsächlich wird der Lagerbestand täglich vermutlich nicht um genau 35 Stück abnehmen; die lineare Abnahme ist nur eine vereinfachende Modellannahme, die ausreichend sein kann. Genauere Überlegungen könnten Annahmen über Schwankungen einschließen.

Für die Beantwortung der zweiten Frage ist eine Ungleichung zu lösen:

$B_n = B_0 + n \cdot d = 1\,000 - 35 \cdot n < 100$; löse nach n.

$$\begin{aligned} 1\,000 - 35n &< 100 && \mid +35n \\ 1\,000 &< 100 + 35n && \mid -100 \\ 900 &< 35n && \mid :35 \\ 25{,}7\ldots &< n \end{aligned}$$

Die Ungleichung wird also gelöst mit n = 26, 27, 28, ...

Somit lautet die Antwort auf die gestellte Frage: Nach dem 26. Tag sinkt der Lagerbestand erstmals unter 100.

Kontrolle: $B_{26} = B_0 + n \cdot d = 1\,000 - 26 \cdot 35 = 90 < 100$.

Zahlenreihe

Ist $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ eine Folge von n Gliedern, so nennt man die *Summe* $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ eine **endliche Reihe**.

Liegt einer Reihe eine *arithmetische* Folge zugrunde, so spricht man von einer **arithmetischen Reihe**.

Wir fragen nun nach dem Wert der Summe $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ einer arithmetischen Reihe von n Gliedern:

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$ oder in umgekehrter Reihenfolge geschrieben:
$s_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$

Addition ergibt:

$2 \cdot s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1);$

Wir berechnen nun den Wert der geklammerten Summen:

$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$
$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2\,d + a_n - 2\,d = a_1 + a_n$
usw.

Diese Summen, die n mal auftreten, sind stets gleich $a_1 + a_n$! Daher:

$2\,s_n = n \cdot (a_1 + a_n)$ oder $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Berücksichtigt man noch die Formel für a_n, so erhält man zusammenfassend:

Summe einer arithmetischen Reihe von n Gliedern:

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$ oder $s_n = \frac{n}{2} \cdot [2\,a_1 + (n-1)\,d]$

Nach diesem Verfahren soll der berühmte deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) schon als kleines Kind in einer Braunschweiger Grundschule die Zahlen von 1 bis 100 addiert haben. Mit dieser Aufgabe wollte der Grundschullehrer die Schüler eine Zeit lang beschäftigen. Der kleine Gauss stellte aber bald fest, dass die Zahlen 1 + 2 + ... + 100 und 100 + 99 + ... + 1 untereinander geschrieben 101 + 101 + ... + 101 ergeben. Das macht 100 mal 101. Da dies das Doppelte der gewünschten Summe ist, war sein Ergebnis $50 \cdot 101 = 5050$.

Beispiel 1.6 : Summe einer arithmetischen Reihe

a) Gegeben ist eine arithmetische Folge mit dem Anfangsglied $a_1 = 1$ und der Differenz $d = 0{,}8$. Berechne die Summe der ersten 10 Glieder.

b) In der obersten Reihe eines trapezförmigen Ziegeldaches liegen 52 Ziegel, in der darunter liegenden 55 Ziegel und in der untersten Reihe 97 Ziegel. Wie viele Ziegel befinden sich auf dieser Dachfläche, wenn die Anzahlen der Ziegel pro Reihe eine arithmetische Folge bilden?

Lösung

Zu **a)** $s_{10} = \frac{n}{2}\,[2\,a_1 + (n-1)\,d] = \frac{10}{2}\,[2 \cdot 1 + 9 \cdot 0{,}8] = 46.$

Zu **b)** $a_1 = 52$, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, d.h. $97 = 52 + (n-1) \cdot 3$; daraus $n = 16$ Reihen;
$s_{16} = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = 8 \cdot (52 + 97) = 1\,192.$

Auf der Dachfläche befinden sich 1 192 Ziegel.

Im Überblick: Arithmetische Folgen und Reihen

Arithmetische Folge $\langle a_n \rangle$: $a_{n+1} = a_n + d$ mit konstanter Zahl d; d heißt Differenz der arithmetischen Folge.
Termdarstellung: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Ist $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ eine Folge von n Gliedern, so nennt man die *Summe* $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ eine **endliche Reihe**. Liegt einer Reihe eine *arithmetische* Folge zugrunde, so spricht man von einer **arithmetischen Reihe**.

Summe einer arithmetische Reihe von n Gliedern:
$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$ oder $s_n = \frac{n}{2} \cdot [2\,a_1 + (n-1)\,d]$

Aufgaben

1.9 In der folgenden Tabelle sind Größen einer arithmetischen Folge angegeben. Vervollständige die Tabelle:

	a_1	a_n	d	n	s_n
a)	4		3	15	
b)		92	5	19	
c)	2	107		16	
d)	113	41	−4		
e)	106		−11	9	
f)			3	12	246

1.10 Von 1 ausgehend soll in **a)** 4, **b)** 9 absolut gleich großen Stufen der Wert 10 erreicht werden. Wie lauten die Glieder der so entstehenden Folge?

1.11 Zwischen den Werten 3 und 135 sollen 32 Glieder so eingeschaltet werden, dass eine arithmetische Folge entsteht.

1.12 Welches Glied der arithmetischen Folge $\langle 4, 9, 14, \ldots \rangle$ ist als Erstes größer als 1 000?

1.13 Ein Rennwagen verzögert seine Geschwindigkeit von 205 km/h gleichmäßig um 12 m/s pro Sekunde.

a) Nach wie vielen Sekunden unterschreitet er die Geschwindigkeit 50 km/h?

b) Nach etwa welcher Zeit kommt der Rennwagen zum Stillstand?

1.14 Wie lautet die Gleichung der Geraden, auf der die Punkte $P_n\,(n/a_n)$ der arithmetischen Folge mit $a_1 = 1$ und $d = 0{,}8$ liegen?

1.15 Zeige, dass bei drei aufeinander folgenden Gliedern einer arithmetischen Folge die mittlere Zahl das arithmetische Mittel ihres Vorgängers und Nachfolgers ist.

1.16 Zeige, dass $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ist.

1.17 Eine Uhr schlägt die ganzen Stunden. Wie viele Schläge macht sie in 12 Stunden?

1.18 Zwischen die Zahlen 12 und 68 sollen 6 Zahlen eingeschaltet werden, sodass eine arithmetische Folge entsteht. Wie lauten ihre Glieder und wie groß ist die Summe aller 8 Glieder?

1.19 30 Rundstäbe liegen parallel dicht nebeneinander. Darauf liegen, wie in Abb. 1.6 angedeutet, in Lücke 10 Lagen weiterer Stäbe. Wie viele Rundstäbe sind insgesamt gestapelt?

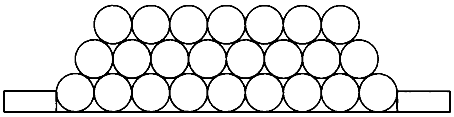


Abb. 1.6

1.20 Jemand legt zu jedem Monatsersten, beginnend am 1. Jänner, € 60,– auf ein Sparbuch. Die Verzinsung beträgt 4%. Berechne den Wert des Guthabens am Jahresende.

1.21 Für das Bohren eines 20 m tiefen Brunnens wird für den ersten Bohrmeter € 30,– gerechnet. Wie groß sind die Bohrkosten, wenn die Kosten pro Bohrmeter linear um € 4,– steigen?

1.22 Ein Körper beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ s frei zu fallen. Ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes gilt für den Fallweg s während der Zeit t: $s = \frac{1}{2} \cdot g\, t^2$ mit $g \approx 10\,\text{m/s}^2$.

a) Bestätige, dass die in der ersten, zweiten, dritten, usw. Sekunde zurückgelegten Teilstrecken $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine arithmetische Folge bilden.

b) Berechne den Fallweg für eine Falldauer von 10 s.

c) Addiere die Teilstrecken bis zum Ende der 10. Sekunde und zeige, dass die Summe gleich dem Ergebnis aus **b)** ist.

1.23 Eine Druckerei erhält das für die Zeitungsherstellung benötigte Papier in Rollen geliefert. Der zylindrische innere Kern einer Rolle hat einen Durchmesser von 20 cm, der äußere Durchmesser der Rolle beträgt 100 cm. Berechne die Länge des aufgewickelten Papiers, wenn die Papierstärke 0,1 mm beträgt.

Hinweis: Einfachheitshalber kann angenommen werden, dass die Papierschichten konzentrische Kreise bilden, dessen erster Kreis den Durchmesser 20 cm besitzt. Die nächste Papierschicht besitzt den Durchmesser 20,02 cm usw.

1.24 Bestimme die Summe:

a) $\sum_{i=1}^{20} i$ **b)** $\sum_{i=1}^{15} (2i + 1)$ **c)** $\sum_{k=5}^{20} \frac{k}{2}$ **d)** $\sum_{k=-10}^{10} \left(1 + \frac{k}{2}\right)$

1.3 Geometrische Folgen und Reihen

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **geometrische Folge**, wenn der *Quotient* je zweier aufeinander folgender Glieder a_{n+1} und a_n konstant ist. D.h. es gilt für jedes n: $\mathbf{a_{n+1} = a_n \cdot q}$.
q heißt **Quotient** der geometrischen Folge.

Das allgemeine Glied a_n und damit die Termdarstellung erhält man aus dem ersten Glied a_1 durch (n – 1)-fache Multiplikation mit dem Quotienten q:

Allgemeines Glied a_n einer geometrischen Folge
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Beispiel 1.7 : Geometrische Folge

a) Gegeben ist eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied $a_1 = 2$ und dem Quotienten $q = 1,2$. Berechne a_5 und gib die Termdarstellung für das allgemeine Glied a_n an. Wie groß ist die prozentuelle Änderung von einem Glied zum nächsten?

b) Wie lautet das 7. Glied einer geometrischen Folge mit $a_1 = 1000$ und $q = 0,2$?

Lösung

Zu **a)**

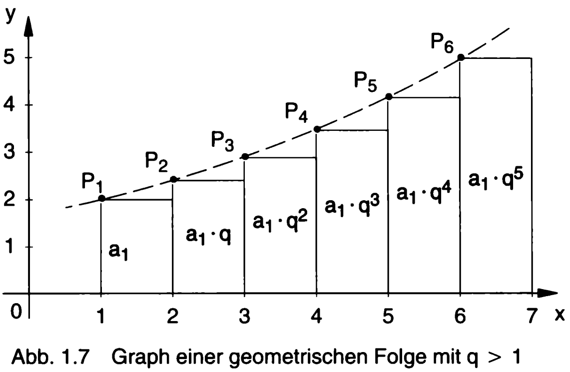


Abb. 1.7 Graph einer geometrischen Folge mit q > 1

$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 1,2^4 \approx 4,147$;
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 1,2^{n-1} =$
$= 2 \cdot 1,2^n \cdot 1,2^{-1} \approx 1,667 \cdot 1,2^n$
$\langle a_n \rangle = \langle 2;\ 2,4;\ 2,88;\ 3,456;\ ... \rangle$.

Wegen $a_{n+1} = a_n \cdot q = 1,2$, nehmen die Folgeglieder *gleichmäßig* um 20 % zu, wenn man den Zählindex n um 1 erhöht. D.h. auch, dass die Punkte P_1, P_2, P_3, ... in Abb.1.7 auf dem Graphen einer Exponentialfunktion liegen. Daher wird eine geometrische Folge auch als *diskreter exponentieller oder geometrischer Prozess* bezeichnet.

Zu **b)** Wegen $a_{n+1} = a_n \cdot 0,2$, ist a_{n+1} kleiner als a_n, die geometrische Folge fällt also.
$\langle 1000;\ 200;\ 40;\ 8;\ 1,6;\ ... \rangle$.
$a_7 = 1000 \cdot 0,2^6 = 0,0640$.

Beispiel 1.8 : Exponentielles Wachstum und exponentielle Abnahme

a) Jemand zahlt zu Beginn eines Jahres € 2000,– auf ein Sparbuch. Die jährliche Verzinsung beträgt 4%. Berechne den Wert des Guthabens *nach* einem, zwei, drei, ... Jahren, wenn die Zinsen zu jedem Jahresende dem Kapital dazugeschlagen werden.

b) Bei einer gedämpften Schwingung bilden die Amplituden (größte Auslenkungen nach einer Seite) $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$, $\hat{y}_3$, ... eine geometrische Folge, was oft in guter Näherung der Fall ist. $\hat{y}_1 = 8{,}0$ cm und jede nachfolgende Amplitude ist um 10% kleiner als die vorhergehende. Wie groß ist die achte Amplitude und welche Amplitude ist als Erste unter 5 % der Anfangsamplitude?

Lösung

Zu **a)** K_0 sei das Guthaben zu Jahresbeginn, K_1 das Guthaben nach einem Jahr, usw., $q = 1 + i = 1{,}04$ (vgl. "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 254):

$K_1 = K_0 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot q;$

$K_2 = K_0 \cdot q^2;$

$K_3 = K_0 \cdot q^3$

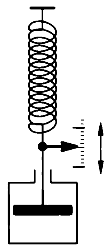
.....

$K_n = K_0 \cdot q^n$ ("Zinseszinsformel")

Es liegt somit eine geometrische Folge mit $q = 1 + i = 1{,}04$ vor. Hier ist es zweckmäßig, das Anfangsglied mit K_0 zu bezeichnen, also die Zählung mit 0 zu beginnen. $\langle K_0, K_1, K_2, K_3, ...\rangle = \langle$€ 2000, € 2080, € 2163,2; € 2249,73; ...$\rangle$.

Man spricht hier von einem *diskreten exponentiellen Wachstum(sprozess)*. Seine Werte stimmen zu den Zeiten (in Jahren) $x = n$, $n = 1, 2, 3, ...$ mit den Werten (in €) der Exponentialfunktion $y = K_0 \cdot q^x = 2000 \cdot 1{,}04^x = 2000 \cdot e^{0{,}0392\,x}$ überein.

Zu **b)** $\hat{y}_1 = 8{,}0$ cm; $q = 0{,}9$;



$\hat{y}_2 = \hat{y}_1 \cdot q = 7{,}2$ cm; usw.

$\hat{y}_8 = \hat{y}_1 \cdot q^7 = 8{,}0 \text{ cm} \cdot 0{,}9^7 = 3{,}8$ cm.

Für die Beantwortung der zweiten Frage ist eine Ungleichung zu lösen:

$\hat{y}_n = 8{,}0 \text{ cm} \cdot 0{,}9^{n-1} < 0{,}4$ cm; löse nach n.

$$\begin{aligned}
8{,}0 \cdot 0{,}9^{n-1} &< 0{,}4 && |\ :8{,}0\\
0{,}9^{n-1} &< 0{,}05 && |\ \text{logarithmieren}\\
\ln 0{,}9^{n-1} &< \ln 0{,}05 &&\\
(n-1) \cdot \ln 0{,}9 &< \ln 0{,}05 && |\ :\ln 0{,}9 \text{ (Beachte, dass } \ln 0{,}9 \text{ negativ ist!)}\\
n - 1 &> \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}9} = 28{,}43... && |\ +1\\
n &> 29{,}43
\end{aligned}$$

Die Ungleichung wird also gelöst mit $n = 30, 31, 32$ .... Somit ist $\hat{y}_{30}$ die erste Amplitude, die kleiner als 5% der Anfangsamplitude $\hat{y}_1$ ist.

Da die geometrische Folge eine Abnahme beschreibt, spricht man auch von einem *(diskreten exponentiellen) Abnahmeprozess*.

Beispiel 1.9 : Normzahlen

Von 1 ausgehend soll in **a)** 5 **b)** 10 **prozentuell gleich großen Stufen** der Wert 10 erreicht werden. Berechne die Zwischenwerte.

Lösung

Zu **a)** $a_1 = 1 \xrightarrow{\cdot q} a_2 \xrightarrow{\cdot q} a_3 \xrightarrow{\cdot q} a_4 \xrightarrow{\cdot q} a_5 \xrightarrow{\cdot q} a_6 = 10$

Die Folgeglieder sind: $1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 = 10 = 1 \cdot q^5 \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[5]{10} = 1{,}585.$
Somit lauten die Zwischenwerte:
$a_2 = 1 \cdot q = 1{,}585; \quad a_3 = 1 \cdot q^2 = 2{,}512; \quad a_4 = 1 \cdot q^3 = 3{,}981; \quad a_5 = 6{,}310.$
D.h. erhöht man, mit 1 beginnend, stets um 58,5 % $\approx$ 60 %, so erreicht man nach fünf solcher Stufen den Wert 10.

Daraus werden die sogenannten Hauptwerte der **Normzahlen der Grundreihe R5** abgeleitet, die vereinbarungsgemäß mit 2 Nachkommastellen angegeben werden:
$\langle 1{,}00;\ 1{,}60;\ 2{,}50;\ 4{,}00;\ 6{,}30;\ 10{,}00 \rangle$.

$q = \sqrt[5]{10}$ heißt "Stufensprung" der Reihe R5.

Die Normzahlen der Grundreihe R5 sind also näherungsweise die ersten 6 Glieder einer endlichen geometrischen Folge mit $a_1 = 1$, $q = \sqrt[5]{10}$.

Die Bezeichnung "Reihe" wird manchmal in der Technik oder auch umgangssprachlich für "Folge" verwendet. So spricht man auch von einer "Messreihe" oder von einer "Fernsehreihe".

Neben den "Hauptwerten" gibt es auch "Genauwerte" (das sind die genauen Werte der Folge) sowie sogenannte "Rundwerte". Näheres in der ÖNORM A 2750.

Normzahlen sind Vorzugszahlen für die Stufung von Größen beliebiger Art. Mit ihnen bezweckt man, mit möglichst wenigen Zahlen bei der Festlegung technischer Größen ein Höchstmaß an Wirtschaftlichkeit zu erreichen.

Zu **b)** Der Stufensprung q beträgt nun $\sqrt[10]{10} = 1{,}295$, d.h. der prozentuelle Sprung beträgt nun 29,5 % $\approx$ 30 %. Da $\left(\sqrt[10]{10}\right)^2 = \sqrt[5]{10}$, ist jeder zweite Wert von R10 auch ein Wert von R5. Die endliche Folge lautet nun:
$\langle 1,\ 1 \cdot q,\ 1 \cdot q^2,\ \dots,\ 1 \cdot q^9,\ 10 \rangle =$
$= \langle 1;\ 1{,}259;\ 1{,}585;\ 1{,}995;\ 2{,}512;\ 3{,}162;\ 3{,}981;\ 5{,}012;\ 6{,}310;\ 7{,}943;\ 10 \rangle$.

Daraus werden wieder die Hauptwerte der **Normzahlen der Reihe R10** abgeleitet:
$\langle 1{,}00;\ 1{,}25;\ 1{,}60;\ 2{,}00;\ 2{,}50;\ 3{,}15;\ 4{,}00;\ 5{,}00;\ 6{,}30;\ 8{,}00;\ 10{,}00 \rangle$.

Es gibt noch zwei weitere Grundreihen: R20 und R40, deren Stufensprünge gleich $\sqrt[20]{10}$ bzw. $\sqrt[40]{10}$ zwischen 1 und 10 sind.

In der Elektrotechnik werden Widerstandswerte nach so genannten IEC-Reihen hergestellt. Dabei handelt es sich um geometrische Folgen, bei denen die Anzahl der Stufen zwischen 1 und 10 gleich 6 (Reihe E6) oder 12 (Reihe E12) oder 24 (Reihe E24) oder 48 (Reihe E48) ist.

Endliche geometrische Reihe:

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ wird auch als **endliche geometrische Reihe** bezeichnet, wenn $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ eine *geometrische Folge* ist. Verhältnismäßig oft wird nach ihrer Summe s_n gefragt:

$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \quad | \cdot q$
$s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n$

Wir bilden nun $s_n \cdot q - s_n$:

$s_n \cdot q - s_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n - (a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1})$
$s_n \cdot q - s_n = a_1 \cdot q^n - a_1$
$s_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1)$

Daraus ergibt sich (für $q \neq 1$):

Summe einer geometrischen Reihe von n Gliedern

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ bzw. } 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Merkhilfe: Die Hochzahl n von q^n ist gleich der *Anzahl* der Glieder der geometrischen Reihe.

Beispiel 1.10 : Summe einer endlichen geometrischen Reihe

a) Bestimme die Summe der ersten n Glieder der geometrischen Folge

(1) $\langle 2; 2{,}8; 3{,}92; \ldots \rangle$, $n = 8$; (2) $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots \rangle$, $n = 10$

b) Berechne: (1) $\sum\limits_{i=0}^{6} (-2)^i = (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + (-2)^6$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{5} x^i = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ für $x = 1{,}2$ und $x = -0{,}8$

(3) $\sum\limits_{k=10}^{20} 4 \cdot 1{,}2^k = 4 \cdot 1{,}2^{10} + 4 \cdot 1{,}2^{11} + \ldots + 4 \cdot 1{,}2^{20}$

Lösung

Zu **a)**

(1) $a_1 = 2$; $q = \frac{2{,}8}{2} = 1{,}4$; $s_8 = 2 + 2 \cdot 1{,}4 + \ldots + 2 \cdot 1{,}4^7 = 2 \cdot \frac{1{,}4^8 - 1}{1{,}4 - 1} \approx 68{,}79.$

(2) $q = \frac{1}{2}$; $s_{10} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -2 \cdot (2^{-10} - 1) = 2 - 2^{-9} = \frac{1023}{512} \approx 1{,}9980.$

Zu **b)**

(1) $\sum\limits_{i=0}^{6} (-2)^i = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64$;

endliche geometrische Reihe von $n = 7$ Gliedern mit $a_1 = 1$, $q = -2$;

$$\sum_{i=0}^{6} (-2)^i = \frac{(-2)^7 - 1}{(-2) - 1} = \frac{-2^7 - 1}{-3} = 43.$$

(2) Es ist rechentechnisch günstig, zuerst die Summe der endlichen geometrischen Reihe mit $a_1 = x$, $q = x$ und $n = 5$ zu berechnen:

$s_5 = x \cdot \frac{x^5 - 1}{x - 1}$;

$x = 1{,}2$: $s_5 = 1{,}2 \cdot \frac{1{,}2^5 - 1}{1{,}2 - 1} \approx 8{,}930$;

$x = -0{,}8$: $s_5 = -0{,}8 \cdot \frac{(-0{,}8)^5 - 1}{-0{,}8 - 1} \approx -0{,}590.$

(3) $\sum\limits_{k=10}^{20} 4 \cdot 1{,}2^k = 4 \cdot 1{,}2^{10} + 4 \cdot 1{,}2^{11} + \ldots + 4 \cdot 1{,}2^{20}$

ist eine geometrische Reihe von $n = 11$ Gliedern mit dem Anfangsglied $4 \cdot 1{,}2^{10}$ und dem Quotienten $q = 1{,}2$. Daher:

$$\sum_{k=10}^{20} 4 \cdot 1{,}2^k = 4 \cdot 1{,}2^{10} \frac{1{,}2^{11} - 1}{1{,}2 - 1} = 796{,}27.$$

Eine andere Lösungsvariante besteht darin, zuerst aus der Reihe $4 \cdot 1{,}2^{10}$ herauszuheben.

Im Überblick: Geometrische Folgen und Reihen

Geometrische Folge $\langle a_n \rangle$: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ mit konstanter Zahl q; q heißt Quotient der geometrischen Folge.
Termdarstellung: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Summe einer geometrischen Reihe von n Gliedern (Reihenglieder $a_1, a_2, \ldots$ bilden eine geometrische Folge):
$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ bzw. $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Normzahlen sind näherungsweise Glieder geometrischer Folgen mit dem Anfangsglied 1 und dem Endglied 10. Es gibt vier sogenannte Grundreihen: R5, R10, R20 und R40 mit den "Stufensprüngen" q gleich: $\sqrt[5]{10}$, $\sqrt[10]{10}$, $\sqrt[20]{10}$ bzw. $\sqrt[40]{10}$; diese Folgen enthalten also 6, 11, 21 bzw. 41 Glieder.

Aufgaben

1.25 Gib das allgemeine Glied a_n folgender geometrischen Folge an:

a) $\langle 2, 6, 18, 54, \ldots \rangle$ **b)** $\langle 10;\ 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ \ldots \rangle$

c) $\left\langle \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots \right\rangle$ **d)** $\left\langle 4, \frac{4}{5}, \frac{4}{25}, \frac{4}{125}, \ldots \right\rangle$

1.26 In der folgenden Tabelle sind Größen einer geometrischen Folge angegeben. Vervollständige die Tabelle!

	a_1	a_n	q	n	s_n
a)	0,5		3	7	
b)		25,6	2	8	
c)	40	0,3125		8	
d)	100	0,78125	0,5		
e)	0,1	−204,8		12	
f)	0,5		2		127,5

1.27 Zeige, dass bei drei aufeinander folgenden Gliedern einer geometrischen Folge die mittlere Zahl das geometrische Mittel ihres Vorgängers und Nachfolgers ist.

Hinweis: $x = \sqrt{a \cdot b}$ ist das geometrische Mittel von a und b.

1.28 Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion, auf deren Graphen die Punkte $P_n\,(n/a_n)$ der geometrischen Folge mit $a_1 = 2$ und $q = 1{,}2$ liegen?

1.29 Der Preis eines Artikels steigt im Zeitraum von 5 Jahren von € 20,– auf € 24,–. Welche mittlere prozentuelle Preissteigerung pro Jahr würde die gleiche Wirkung haben?

Hinweis: Die Preise bilden in diesem Fall eine geometrische Folge $\langle p_n \rangle$, wobei p_1 = € 20,– der Preis im ersten Jahr, p_2 der Preis im zweiten Jahr, ..., p_5 = € 24,– jener im fünften Jahr ist.

1.30 Eine neu gegründete Software-Firma erzielte im ersten Jahr ihres Bestehens einen Umsatz von € 2,1 Mio. Wie groß muss die durchschnittliche jährliche prozentuelle Umsatzsteigerung ausfallen, wenn für das 5. Jahr ein Umsatz von € 2,8 Mio. angestrebt wird?

1.31 Eine Stadt hat zur Zeit 140 000 Einwohner. Wie groß wäre ihre Einwohnerzahl in 10 Jahren, wenn sie im Schnitt jährlich 1 % ihrer Einwohner verlieren würde?

1.32 Angenommen, die Anzahl der Seerosen auf einem Teich verdoppelt sich jeden Tag. Am Ende des ersten Tages befindet sich nur eine Seerose auf dem Teich; am Ende des 30. Tages ist der Teich vollständig mit Seerosen bedeckt. Wann ist

a) die Hälfte,

b) ein Viertel,

c) ein Achtel des Teichs bedeckt?

1.33 Ermittle die "Genauwerte" der Normzahlenreihe R20, also die endliche geometrische Folge $\langle a_1, ..., a_{21} \rangle$ mit $a_1 = 1$ und $a_{21} = 10$.

1.34 Ermittle die geometrische Folge $\langle a_1, a_2, a_3, ..., a_9 \rangle$ mit dem Anfangsglied $a_1 = 1$, wobei jedes zweite Glied eine Verdopplung gibt. Vergleiche die Folgeglieder mit der Folge der Blendenzahlen $\langle 1; 1{,}4; 2; 2{,}8; 4; 5{,}6; 8; 11, 16 \rangle$ des Objektivs einer Fotokamera.

1.35 Ermittle die geometrische Folge mit dem Anfangsglied $a_1 = 1$ und $q = 1/2$ und vergleiche ihre Werte mit den Verschlusszeiten $\langle 1; 1/2; 1/4; 1/8; 1/15; 1/30; 1/60; 1/125, ... \rangle$ einer Fotokamera.

1.36 An einem Regelwiderstand sollen 10 Widerstände $R_1, R_2, ..., R_{10}$ abgegriffen werden können, die

a) eine arithmetische Folge,

b) eine geometrische Folge bilden.

Berechne die Folge der Widerstände, wenn $R_1 = 10{,}0$ kΩ und $R_{10} = 200{,}0$ kΩ ist. Gib ferner den prozentuellen Sprung von R_1 auf R_2 und von R_9 auf R_{10} an.

1.37 Zwischen zwei Zahnräder vom Durchmesser d = 50,0 mm und D = 400,0 mm sollen vier Zahnräder eingeschoben werden, deren Durchmesser geometrisch gestuft sind. Berechne ihre Durchmesser!

1.38 Ein Lichtstrahl verliert beim Durchdringen einer Glasplatte 5 % seiner Intensität. Welche Restintensität hat er nach dem Durchgang von 10 derartigen Glasplatten? Wann ist seine Intensität auf ein Viertel gesunken?

1.39 $\langle a_n \rangle$ ist eine geometrische Folge mit positiven Gliedern, sonst aber beliebig. Zeige, dass $\langle \lg a_n \rangle$ eine arithmetische Folge ist.

1.40 Jemand schreibt einen Brief an fünf Personen mit der Aufforderung, innerhalb einer Woche einen Brief gleichen Inhalts wieder an fünf Personen zu schreiben, usw. ("Kettenbrief"). Wie viele Personen bekommen innerhalb von 8 Wochen einen Brief dieser Art, wenn jede angeschriebene Person mitmacht und keine Person zweimal angeschrieben wird?

Anmerkung: Das Kettenbrief-Prinzip liegt auch, oft gut getarnt, den betrügerischen "Pyramidenspielen" zu Grunde.

1.41 Bestimme die Summe der endlichen geometrischen Reihe:

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{9}{8}+\frac{27}{16}+\frac{81}{32}+\frac{243}{64}$ **b)** $\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

c) $1-\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^3+\ldots+\left(-\frac{3}{2}\right)^{10}$ **d)** $\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3+\ldots+\left(\sqrt{2}\right)^{12}$

1.42 Bestimme die Summe:

a) $\sum\limits_{i=1}^{8}\left(\frac{1}{4}\right)^i$ **b)** $\sum\limits_{i=1}^{12}\left(\frac{2}{5}\right)^i$ **c)** $\sum\limits_{k=2}^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ **d)** $\sum\limits_{k=-2}^{8} 3\cdot 1{,}8^k$

1.43 Eine Legende erzählt, dass sich der Erfinder des Schachspiels folgende Belohnung erbeten hat: Man möge auf das erste Feld 1 Weizenkorn legen, auf das zweite zwei, auf das dritte vier Weizenkörner, usw.; jedesmal möge die Anzahl der Weizenkörner verdoppelt werden. Welche Masse an Weizen würde dies für jeden der 6 Milliarden Bewohner der Erde geben, wenn ein Weizenkorn eine Masse von etwa 0,05 g besitzt?

1.44 In der "Normatmosphäre" fällt der Druck von 0 m Höhe auf 1000 m Höhe von 1013 mbar auf 894 mbar. Bestimme den Druck in 2000 m, 3000 m und 4000 m Höhe, wenn dieser exponentiell abnimmt.

1.45 Führe eine Modellrechnung für den Verbrauch eines Rohstoffs durch, wenn folgende Daten angenommen werden: Aktueller Weltjahresverbrauch V_0: 10 Millionen Tonnen; jährliche Zuwachsrate: 3 %, Reserve M: 500 Millionen Tonnen.

a) Wie lauten die Verbrauchswerte V_1, V_2, nach einem, zwei, usw. Jahren. Welche Folge liegt vor?

b) In wie vielen Jahren verdoppelt sich der Jahresverbrauch?

c) Wie lange reichen die Reserven?

Hinweis: $V_0 + V_1 + \ldots V_n \leq M$; drückt man die linksstehende Summe formelmäßig aus, so ergibt sich eine Exponentialgleichung für n, die händisch lösbar ist.

d) Angenommen, die Reserven könnten auf das 10-fache gesteigert werden. Wie lange reichen die Reserven dann?

e) Angenommen, es würde gelingen, die Verbrauchssteigerung von V_0 auf V_1 einzufrieren, d.h. alle jährlichen Verbrauchssteigerungen bleiben gleich $V_1 - V_0$. Wie lange reichen die Reserven unter dieser Voraussetzung?

f) Wie lange reichen die Reserven, wenn die jährliche Verbrauchssteigerung nicht 3 %, sondern nur 1 % beträgt?

1.46 Der Verbrauch eines Rohstoffs steigt pro Jahr um 4 %. Wie würde sich eine Reduktion der Steigerungsrate auf 2 % auf die Zeit auswirken, in der sich der Verbrauch verdoppelt?

1.4 Wirtschaftsmathematische Anwendungen

Abschreibungsrechnung

Wirtschaftsgüter verlieren durch Verschleiß ihren Wert. Ein PKW, ein Computer, ein Gebäude wird jährlich immer geringer in der Bilanz eines Unternehmens veranschlagt. Man spricht vom **Buch-** oder **Restwert** eines Wirtschaftsgutes. Die Art der Wertminderung und ihre Aufteilung auf die gesamte Nutzungsdauer heißt **Abschreibung** des Gutes.

Im Folgenden werden zwei gebräuchliche Modelle einer Abschreibung besprochen. Mathematisch handelt es sich um einfache Abnahmeprozesse.

Bezeichnungen:

n	Nutzungsdauer in Jahren
R_0	Anschaffungskosten (0-ter Restwert)
A_1	Abschreibung nach dem 1. Jahr
$R_1 = R_0 - A_1$	Restwert oder Buchwert nach dem 1. Jahr
A_2	Abschreibung nach dem 2. Jahr
$R_2 = R_1 - A_2$	Restwert oder Buchwert nach dem 2. Jahr
....	
A_n	Abschreibung nach dem n-ten (letzten) Jahr
$R_n = R_{n-1} - A_n$	Restwert oder Buchwert nach dem letzten Nutzungsjahr, "Schrottwert"

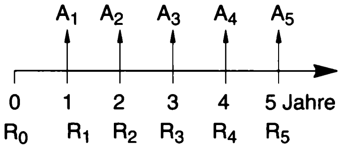


Abb. 1.8

Abb. 1.8 zeigt einen Abschreibungsvorgang über eine Nutzungsdauer von n = 5 Jahren.

Beispiel 1.11 : Lineare Abschreibung

Eine Maschine wird zu einem Preis von R_0 = € 65 000,– angeschafft. Die Nutzungsdauer beträgt 5 Jahre, wobei mit einem Schrottwert von € 5 000,– gerechnet wird.

Bei der **linearen Abschreibung** ist der jährliche Abschreibungsbetrag konstant, die Restwertfolge $\langle R_n \rangle$ bildet daher eine fallende arithmetische Folge. Bestimme diese Folge!

Lösung

$A_1 = \ldots = A_5 = A;$

$R_5 = R_0 - 5\,A$ (beachte wieder, dass die Folge mit R_0 beginnt, daher 5 A statt 4 A!)

$$A = \frac{R_0 - R_5}{5} = € \ \frac{65000 - 5000}{5} = € \ 12000,–$$

Jahr	Restwert zum Jahresbeginn	Abschreibungsbetrag	Restwert zum Jahresende
1	65000	12000	53000
2	53000	12000	41000
3	41000	12000	29000
4	29000	12000	17000
5	17000	12000	5000

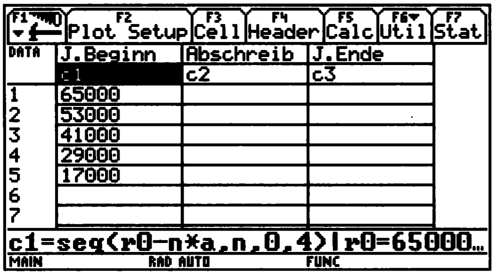
Damit ergibt sich die Restwertfolge in €:

$\langle R_n \rangle = \langle 65000,\ 53000,\ 41000,\ 29000,\ 17000,\ 5000 \rangle.$

Mit 6 (6:Data/Matrix Editor) 3 (3:New) wird eine neue Datentabelle (Type Data) erstellt.

Um der Spalte c1 einen Namen zu geben, wird das freie Feld über c1 markiert und in der Eingabezeile nach c1,Title = als Titel "J.Beginn" geschrieben.

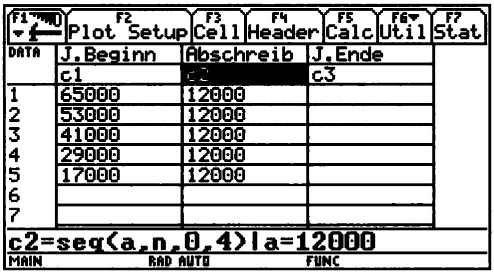
Mit F1 9 (9:Format) kann die Spaltenbreite vergrößert werden, um gegebenenfalls längere Spaltentitel zu ermöglichen. Analog geht man bei der Benennung der Spalten c2 und c3 vor. Danach wird bei markiertem c1 der Befehl seq(r0-n*a,n,0,4)|r0 = 65000 and a = 12000 eingegeben. Dadurch wird in die Spalte c1 die Restwertfolge R_0, R_1, … R_5 geschrieben.

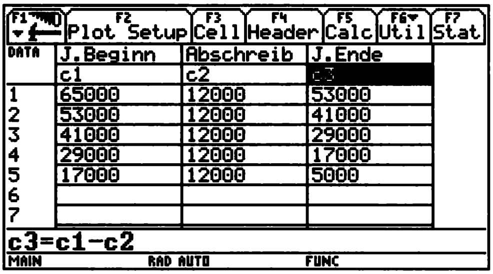


In der Spalte c2 sollen die jährlich gleich bleibenden Abschreibungsbeträge A stehen. Dies wird bei markiertem c2 durch Eingabe des Befehls seq(a,n,0,4)|a = 12000 erreicht.

In der Spalte c3 steht die Differenz Restwert zu Jahresbeginn minus Abschreibungsbetrag. Bei markiertem c3 wird c1-c2 eingegeben.

Hinweis: In der Spalte c1 könnte auch seq(65000-n*12000,n,0,4) und in c2 der Befehl seq(12000,n,0,4) eingegeben werden.





Allgemein gilt:

Lineare Abschreibung

Jährlicher Abschreibungsbetrag: $A = \frac{R_0 - R_n}{n}$;

Restwert nach k Jahren: $R_k = R_0 - k \cdot A, \quad k = 1, 2, \ldots, n$

Während bei der linearen Abschreibung die Abschreibungsbeträge gleich bleiben, nehmen sie bei einer *degressiven*[2] Abschreibung mit der Zeit ab.

Beispiel 1.12 : Geometrisch degressive Abschreibung

Eine Maschine wird zu einem Preis von R_0 = € 65000,– angeschafft. Die Nutzungsdauer n beträgt 5 Jahre, wobei mit einem Schrottwert von € 5000,– gerechnet wird.

Bei der sogenannten **geometrisch-degressiven** Abschreibung werden in jedem Jahr gleich bleibend i = p% vom jeweiligen Restwert abgeschrieben. Bestimme die Folge der Restwerte $\langle R_n \rangle$.

2 degressiv (lat.), abfallend

Lösung

Jahr	Restwert zum Jahresbeginn	Abschreibungsbetrag	Restwert zum Jahresende
1	R_0	$A_1 = i \cdot R_0$	$R_1 = R_0 - A_1 = (1-i) \cdot R_0$
2	$R_1 = (1-i) \cdot R_0$	$A_2 = i \cdot R_1$	$R_2 = R_1 - A_2 = (1-i) \cdot R_1 = (1-i)^2 \cdot R_0$
3	$R_2 = (1-i)^2 \cdot R_0$	$A_3 = i \cdot R_2$	$R_3 = R_2 - A_3 = (1-i) \cdot R_2 = (1-i)^3 \cdot R_0$
4	$R_3 = (1-i)^3 \cdot R_0$	$A_4 = i \cdot R_3$	$R_4 = R_3 - A_4 = (1-i) \cdot R_3 = (1-i)^4 \cdot R_0$
...	...	...	...
n	$R_{n-1} = (1-i)^{n-1} \cdot R_0$	$A_n = i \cdot (1-i)^{n-1} \cdot R_0$	Schrottwert $R_n = (1-i)^n \cdot R_0$

$\langle R_k \rangle$, $k = 0, 1, \ldots, n$, bildet also eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q = 1 - i$.

Für $n = 5$ gilt:

$R_5 = R_0 \cdot (1-i)^5$ (beachte, dass die Folge mit R_0 beginnt, daher $(1-i)^5$ statt $(1-i)^4$!).

Daraus: $1 - i = \sqrt[5]{\frac{R_5}{R_0}} = \sqrt[5]{\frac{5000}{65000}} = 0{,}5987$ oder $i = 0{,}4013 = 40{,}13\,\%$

Die jährliche Abschreibung beträgt somit i = 40,13 % oder etwa 40 % des jeweiligen Restwertes. Damit ergibt sich:

Jahr	Restwert zum Jahresbeginn	Abschreibungsbetrag	Restwert zum Jahresende
1	65000,00	26084,31	38915,69
2	38915,69	15616,75	23298,93
3	23298,93	9349,79	13949,14
4	13949,14	5597,75	8351,39
5	8351,39	3351,39	5000,00

Restwertfolge: $\langle R_0,\ (1-i) \cdot R_0,\ (1-i)^2 \cdot R_0,\ \ldots,\ (1-i)^n \cdot R_0 \rangle =$

$= €\ \langle 65000{,}00;\ 38915{,}69;\ 23298{,}93;\ 13949{,}14;\ 8351{,}39;\ 5000{,}00 \rangle$

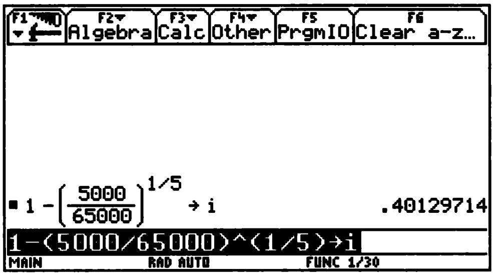
Jeder nachfolgende Restwert ist 59,87 % oder etwa 60 % des vorherigen.

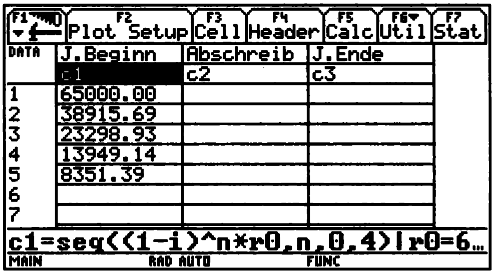
Voyage 200

Um die volle Taschenrechnergenauigkeit zu nützen, wird zuerst i berechnet und danach gespeichert. Dann wird mit APPS 6 (6:Data/Matrix Editor) 3 (3:New) eine neue Datentabelle (Type Data) erstellt.

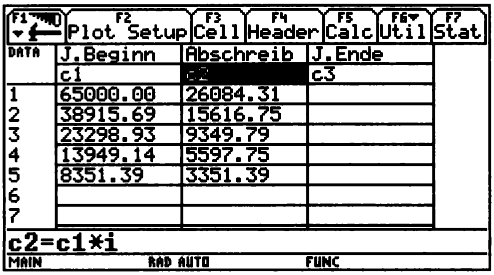
Bei markiertem c1 wird der Befehl `seq((1-i)^n*r0, n,0,4) | r0 = 65000` in der Spalte c1 eingegeben.

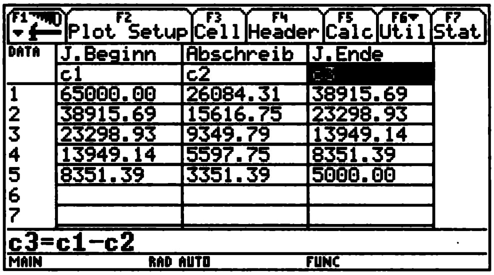
Voyage 200





In die Spalte c2 wird der Befehl c1*i und schließlich in die Spalte c3 der Befehl c1-c2 eingegeben.





Eine Abschreibung auf den Restwert 0 ist bei einer geometrisch-degressiven Abschreibung nicht möglich. Allgemein gilt:

Geometrisch-degressive Abschreibung

Wird n Jahre hindurch jedes Jahr i = p% des jeweiligen Restwertes abgeschrieben, d.h. ist $A_k = i \cdot R_{k-1}$, so ist der Restwert R_k nach k Jahren: $\mathbf{R_k = R_0 \cdot (1 - i)^k}$

mit $i = 1 - \sqrt[n]{\frac{R_n}{R_0}}$ und $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Die folgende Tabelle zeigt, ebenso wie die Abb. 1.9, die beiden Abschreibungsmodelle des Beispiels 1.11 und 1.12 im Vergleich.

Jahr	Restwerte (in €) zum Jahresende bei einer Abschreibung	
	linear	geometrisch-degressiv
1	53000,00	38915,69
2	41000,00	23298,93
3	29000,00	13949,14
4	17000,00	8351,39
5	5000,00	5000,00

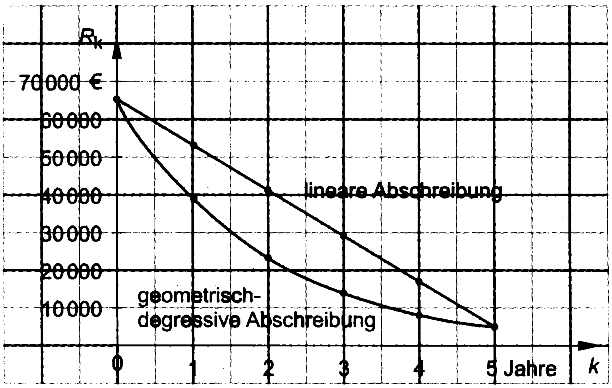


Abb. 1.9

Rentenrechnung

In der Zinseszinsrechnung liegt ganz allgemein die Aufgabe vor, den Wert einer Zahlung oder mehrerer Zahlungen, die oft in ungleicher Höhe und zu verschiedenen Zeitpunkten erfolgten, für einen bestimmten Zeitpunkt (meist den Bar- oder den Endwert) zu bestimmen. Ein praktisch wichtiger Spezialfall liegt in einer Rente vor:

Eine Rente ist eine Folge von Zahlungen in gleicher Höhe und in gleichen Zeitabschnitten.

Es gibt zwei *Grundmodelle* für eine Rente: Erfolgt die einzelne Rentenzahlung in der Höhe R **am Anfang** des zugehörigen Zeitabschnittes, so heißt die Rente **vorschüssig**, erfolgt sie **am Ende**, so heißt sie **nachschüssig**. Beide Rentenmodelle sind in Abb. 1.10 auf einer *"Zeitlinie"* veranschaulicht.

Als **Laufzeit** der Rente bezeichnet man die Anzahl n aller Zeitabschnitte, an deren Anfang bzw. Ende die Zahlungen geleistet werden.

Beispiele: Tilgung von Krediten, Versicherungsleistungen (Prämien einer Lebensversicherung, Pensionen, u.a.), Zahlungsverpflichtungen bei Abfindung, Investitionsrechnung, Kurs- und Renditerechnung von Anleihen.

Wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, nehmen wir im Folgenden an, dass

(1) die in einem Jahr angefallenen Zinsen zum *Jahreswechsel* (= Zinstermin) zum Kapital dazugeschlagen und im nächsten Jahr mit diesem mitverzinst werden sowie

(2) die Rentenzahlungen jährlich und zu diesem Termin erfolgen.

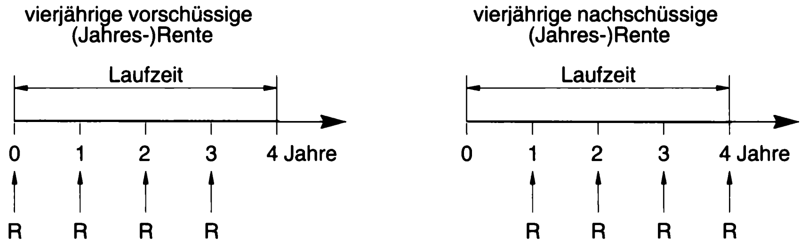


Abb. 1.10 Vorschüssige und nachschüssige Rente

Beispiel 1.13 : Wiederholung: Endwert und Barwert einer einmaligen Zahlung

a) Ein Kapital $K_0 = € \ 1\,000,–$ wird am Anfang eines Jahres zu einem Jahreszinssatz $i = 5\%$ auf ein Konto eingezahlt. Wie groß ist sein Wert ("Endwert") nach 4 Jahren?

b) In 5 Jahren soll ein Kapital € 200000,– betragen. Welcher einmalige Geldbetrag ("Barwert") ist heute bei $i = 6\%$ einzuzahlen?

Lösung

Zu **a)** Nach der Zinseszinsformel ("Ingenieur-Mathematik 2", Seite 254) gilt für den Endwert K_4:
$K_4 = K_0 \cdot (1+i)^4 = € \ 1000 \cdot 1{,}05^4 = € \ 1215{,}51.$

Zu **b)** Barwert $K_0 = \frac{K_5}{q^5} = € \ \frac{200000}{1{,}06^5} = € \ 149451{,}63.$

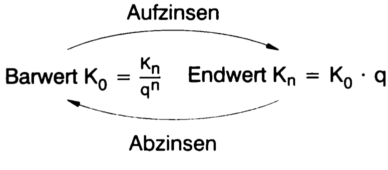


Abb. 1.11 Aufzinsen und Abzinsen

Beispiel 1.14 : Endwert und Barwert einer vorschüssigen (Jahres-)Rente

Zu jedem Jahres*beginn* wird ein Betrag R = € 1 000,– auf ein Konto eingezahlt und dort mit i = 5 % verzinst. Bestimme

a) den Wert dieser Rente am Ende des 8. Jahres,

b) den Barwert der Rente.

Lösung

Zu **a)**

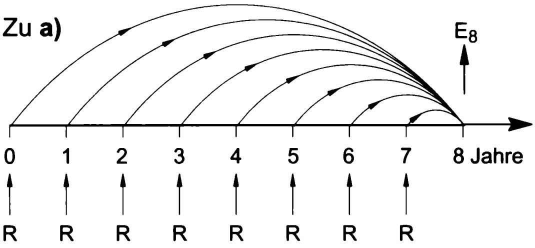


Abb. 1.12 Vorschüssige Rente

Wir brauchen nur den Endwert *jeder* Einzahlung für das Ende des 8. Jahres zu bestimmen und die Ergebnisse zu addieren. Die erste Einzahlung wird 8 Jahre, die zweite 7 Jahre, ..., die letzte Einzahlung 1 Jahr verzinst. Zur Vereinfachung setzen wir 1 + i = q.

Vorschüssiger Rentenendwert E_8 nach 8 Jahren:

$E_8 = R \cdot q^8 + R \cdot q^7 + R \cdot q^6 + \dots + R \cdot q = R \cdot q \cdot (q^7 + q^6 + q^5 + \dots + 1)$

$s_8 = 1 + q + \dots + q^5 + q^6 + q^7$ ist die Summe einer geometrischen Reihe von n = 8 Gliedern, mit dem ersten Glied 1 und dem Quotienten q (siehe Seite 19).

Daher: $s_8 = \frac{q^8 - 1}{q - 1}$.

$$E_8 = R \cdot q \cdot s_8 = R \cdot q \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = € \ 1000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^8 - 1}{1{,}05 - 1} = € \ 10026{,}56.$$

Zu **b)** Den Rentenbarwert B_8 erhält man einfach durch Abzinsen des Rentenendwertes:

$$B_8 = \frac{E_8}{q^8} = \frac{E_8}{1{,}05^8} = € \ 6786{,}37.$$

Anmerkung: Die Überlegung gilt auch näherungsweise, wenn die jährlichen Teilzahlungen der Höhe R zwar in Jahresabständen, aber nicht am Beginn eines Jahres erfolgen (siehe "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 258: Näherungsrechnung bei gemischter Verzinsung).

Beispiel 1.15 : Endwert und Barwert einer nachschüssigen (Jahres-)Rente

Zu jedem Jahres*ende* wird ein Betrag E = € 1000,– auf ein Konto eingezahlt und dort mit i = 5 % verzinst. Bestimme

a) den Wert dieser Rente am Ende des 8. Jahres,

b) den Barwert der Rente.

Lösung

Zu **a)** Die erste Einzahlung erfolgt erst am Ende des ersten Jahres und wird daher nur 7 Jahre verzinst usw., die letzte Einzahlung wird überhaupt nicht mehr verzinst. Daher ist der Endwert E_8 dieser nachschüssigen Rente:

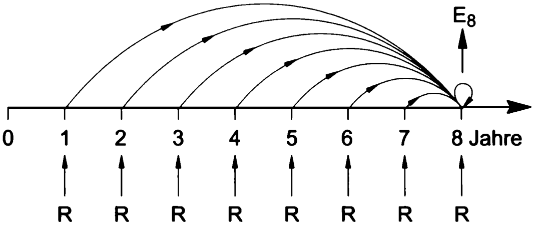


Abb. 1.13 Nachschüssige Rente

$E_8 = R\cdot q^7 + R\cdot q^6 + R\cdot q^5 + \ldots + R = R\cdot(q^7 + q^6 + q^5 + \ldots + 1).$

Mit $s_8 = 1 + q + \ldots + q^5 + q^6 + q^7 = \frac{q^8 - 1}{q - 1}$ ergibt sich

$E_8 = R\cdot\frac{q^8 - 1}{q - 1} = € \; 1000\cdot\frac{1{,}05^8 - 1}{1{,}05 - 1} = € \; 9549{,}11.$

Gegenüber der vorschüssigen Rente hat sich für jede einzelne Zahlung die Anzahl der Jahre (Zinsperioden) um 1 verringert. Daher ist der Rentenendwert der vorschüssigen Rente um den Faktor q größer als jener der nachschüssigen Rente.

Zu **b)** Der Rentenbarwert B_8 ergibt sich wieder durch Abzinsen des Endwertes E_8:

$B_8 = \frac{E_8}{q^8} = \frac{E_8}{1{,}05^8} = € \; 6463{,}21.$

Wichtige Anwendung: Eine Kreditrückzahlung in gleichen Raten R, erste Rate nach einem Jahr, ist eine nachschüssige Rente des Schuldners an den Gläubiger. Der Kreditbetrag ist der Rentenbarwert.

Wir verallgemeinern und fassen zusammen:

Endwert E_n und Barwert B_n einer Rente, wenn R die jährliche Teilzahlung, n die Rentenlaufzeit in Jahren, i der Zinssatz und $q = 1 + i$ ist:

Vorschüssige Rente: $E_n = R\cdot q\cdot\frac{q^n - 1}{q - 1}$, $B_n = \frac{E_n}{q^n}$

Nachschüssige Rente: $E_n = R\cdot\frac{q^n - 1}{q - 1}$, $B_n = \frac{E_n}{q^n}$

Unterjährige Renten

In der Praxis treten statt ganzjähriger Renten sehr oft Renten mit halb-, vierteljährlichen oder monatlichen Zahlungen R auf, also "unterjährige" Renten. Liegt etwa eine Monatsrente vor, so wird statt des Jahreszinssatzes i mit dem Monatszinssatz i_{12} gearbeitet, der bei monatlicher Kapitalisierung nach einem Jahr die gleichen Zinsen erbringt wie der Jahreszinssatz. Man spricht vom **konformen monatlichen Zinssatz i_{12}**. Dann kann man bei einer Monatsrente mit einer Laufzeit n in Monaten rechnen, i wird einfach durch i_{12} ersetzt. Die Formeln bleiben sonst gleich.

Auf unterjährige Renten wird jedoch im Folgenden nicht weiter eingegangen.

Beispiel 1.16 : Rückzahlungen einer Schuld (eines Kredites)

Jemand nimmt einen Kredit von $K_0 =$ € 10000,– bei i = 10% auf. Für die Rückzahlung wird vereinbart: € 3000,– nach einem Jahr, € 2000,– nach dem zweiten Jahr, € 4000,– nach dem dritten Jahr, der Rest am Ende des vierten Jahres. Wie hoch ist dieser Restbetrag?

Lösung

Da es sich hier um Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten handelt, ist es nötig, den Wert aller Zahlungen zu einem einzigen Zeitpunkt zu bestimmen.

Man spricht hier auch vom sogenannten **Äquivalenzprinzip**: *Kapitalien können nur miteinander verglichen werden, wenn sie auf den gleichen Zeitpunkt bezogen werden.*

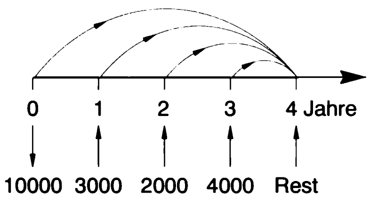


Abb. 1.14

Wir beziehen alle Zahlungen auf das Ende des vierten Jahres.
Wert des Kredites K_0: € $10000 \cdot 1{,}1^4$ = € 14641,–
Wert der 1. Rückzahlung: € $3000 \cdot 1{,}1^3$ = € 3993,–
Wert der 2. Rückzahlung: € $2000 \cdot 1{,}1^2$ = € 2420,–
Wert der 3. Rückzahlung: € $4000 \cdot 1{,}1$ = € 4400,–
Wert aller drei Rückzahlungen: € 10813,–

Differenz: € 14641 – (3993 + 2420 + 4400) = € 3828,–.
Der am Ende des vierten Jahres fällige Restbetrag ist also € 3828,–.

Eine jährliche Rückzahlung im k-ten Jahr wird auch **Annuität**[3] A_k genannt. Die Annuität muss einerseits die im k-ten Jahr anfallenden Zinsen Z_k abdecken, andererseits vermindert sie die jeweilige noch bestehende Restschuld. Diese Restschuldminderung wird (Kapital-) **Tilgung** T_k im k-ten Jahr genannt.

Es gilt also zu jedem Jahresende:

Annuität = Zinsen + Tilgung

Man kann die Rückzahlung auch in einer Tabelle, dem sogenannten **Tilgungsplan**, übersichtlich darstellen. Dabei werden in jeder Zeile das entsprechende Jahr, die (Rest-)Schuld am Anfang dieses Jahres, die in diesem Jahr anfallenden Zinsen, die am Jahresende erfolgende Rückzahlung A_k und die Höhe der Tilgung $T_k = A_k - Z_k$ vermerkt. In der letzten Spalte kann noch die Schuld nach Abzug der Tilgung angeschrieben werden, welche gleich der Schuld am Anfang des nächsten Jahres ist.

Tilgungsplan:

Jahr	Schuld Jahresbeginn	Zinsen	Annuität	Tilgung	Schuld
		Jahresende			
1	10000	1000	3000	2000	8000
2	8000	800	2000	1200	6800
3	6800	680	4000	3320	3480
4	3480	348	3828	3480	0

Soll die Schuld mit Ende des vierten Jahres beglichen sein, muss die letzte Zahlung A_l die Restschuld am Anfang des viertes Jahres sowie die im vierten Jahr anfallenden Zinsen abdecken. Diese Zahlung muss daher € 3828,– ausmachen.

Falls nicht anders angegeben, nehmen wir nun folgende Rückzahlungsform einer Schuld K_0 an:

- Jährliche und *gleich bleibende* Ratenzahlungen A (Annuitäten);
- Rückzahlung "nachschüssig", d.h. die erste Rückzahlung erfolgt ein Jahr nach der Kreditvergabe, die weiteren Rückzahlungen erfolgen in Jahresabständen.

Es handelt sich damit um einen *nachschüssigen Rentenvorgang, dessen Endwert gleich dem Endwert der Schuld* ist: $K_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Daraus lässt sich die Annuität A berechnen:

[3] annus (lat.), Jahr

Annuität A für die Rückzahlung einer Schuld K_0 in n Jahren:
$A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$, $q = 1 + i$

Beispiel 1.17 : Rückzahlung einer Schuld

Jemand nimmt einen Kredit von K_0 = € 10000,– bei i = 10% auf, der in 4 Jahren zurückgezahlt werden soll. Berechne die Höhe A der Annuitäten und stelle einen Tilgungsplan auf.

Lösung

$A = 10000 \cdot 1{,}1^4 \cdot \frac{1{,}1-1}{1{,}1^4 - 1} = 3154{,}71$.

Tilgungsplan:

Jahr	Schuld Jahresanfang	Zinsen	Annuität A	Tilgung	Schuld
		Jahresende			
1	10000,00	1000,00	3154,71	2154,71	7845,29
2	7845,29	784,53	3154,71	2370,18	5475,11
3	5475,11	547,51	3154,71	2607,20	2867,92
4	2867,92	286,79	3154,71	2867,92	0,00

Wegen der fallenden Restschuld und der gleich bleibenden Annuität wird die (Kapital-) Tilgung T_i immer größer. Bei richtiger Rechnung muss die Schuld am Ende des letzten Jahres null sein.

Tilgungsplan mit einer Tabellenkalkulation am Beispiel von Microsoft Excel:

Tilgungsplan					
Kredit:	10000				
Zinssatz in %:	10	q = 1+i:	=1+B3/100		
Laufzeit:	4				
Annuität:	=B2*D3^B4*(D3–1)/(D3^B4–1)				
Jahr	**Schuld**	**Zinsen**	**Annuität**	**Tilgung**	**Schuld**
	Jahresbeginn	Jahresende			
					=B2
1	=F9	=B10*$B$3/100	=$B$5	=D10–C10	=B10–E10

In die Zelle B2 wird der Kredit, in B3 der Zinssatz i in Prozent und in B4 die Laufzeit in Jahren eingegeben. Jede Eingabe wird mit ENTER abgeschlossen. q = 1+i wird in die Zelle D3 als Formel geschrieben, nach ENTER erscheint sofort das Ergebnis. Formeln beginnen mit einem Gleichheitszeichen, als Variable können die Zelladressen verwendet werden. Auch die Annuität wird als Formel in die Zelle B5 eingegeben (siehe Seite 30).

In die Zeilen 7 und 8 wird der Kopf des Tilgungsplans geschrieben. In der Zelle F9 wird für einen späteren, für das Kopieren nötigen Verweis der Kredit eingegeben.

In der 10. Zeile werden nun in den einzelnen Zellen die gewünschten Formeln unter Verwendung von Zelladressen als Variablen eingegeben. Dabei tritt eine zweite Form einer Zelladresse auf, beispielsweise $B$3 statt B3 in Zelle C10. Die beiden Adressenformen unterscheiden sich beim Kopieren: Kopiert man beispielsweise die Zelle C10 in die Zelle C11, so ist in C11 die Formel =B11*$B$3/100 gültig. B10 bleibt beim Kopieren nur "relativ" gleich, dagegen bleibt $B$3 beim Kopieren stets "absolut" gleich.

Nach vollendeter Eingabe in der 10. Zeile markiert man den Zellenbereich von A10 bis F10 und setzt den Cursor auf die rechte untere Ecke des markierten rechteckigen Bereichs. Dadurch wird der Cursor zu einem kleinen Kreuz; bei gedrückter linker Maustaste zieht man den markierten Bereich so weit nach unten, wie es die Laufzeit der Kreditrückzahlung erfordert.

	A	B	C	D	E	F
1	**Tilgungsplan**					
2	Kredit:	10000				
3	Zinssatz in %:	10	q = 1+i:	=1+B3/100		
4	Laufzeit:	4				
5	Annuität:	3154,71				
6						
7	**Jahr**	**Schuld**	**Zinsen**	**Annuität**	**Tilgung**	**Schuld**
8		Jahresbeginn	Jahresende			
9						10000
10	1	10000,00	1000,00	3154,71	2154,71	7845,29
11	2	7845,29	784,53	3154,71	2370,18	5475,11
12	3	5475,11	547,51	3154,71	2607,20	2867,92
13	4	2867,92	286,79	3154,71	2867,92	0,00

Beispiel 1.18 : Vergleich von Zahlungsangeboten

Für ein Gebäude liegen zwei Kaufangebote vor:

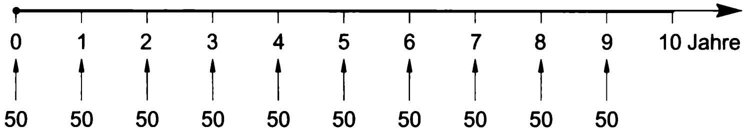
Angebot A: Zehnmal je € 50 Tausend,– ab sofort in Jahresabständen;

Angebot B: Sofort € 150 Tausend,– und ab sofort jährlich nachschüssig € 40 Tausend durch 6 Jahre.

Es wird ein Kalkulationszinssatz von 8% angenommen.

Lösung

Angebot A:



Angebot B:

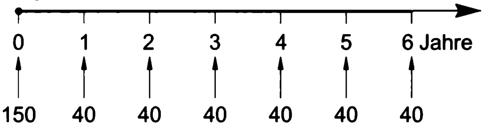


Abb. 1.15 Vergleich zweier Angebote (Zahlungen in Tausend Euro)

Zum Vergleich der beiden Anbote müssen diese auf den gleichen Zeitpunkt bezogen werden, wofür sich am einfachsten der Anfangszeitpunkt 0 anbietet. Wir berechnen also die Barwerte der beiden Angebote. Die Zahlungen sind im Folgenden in € 1000 angegeben.

1. Lösungsvariante: Wir addieren die Barwerte aller Zahlungen für die beiden Angebote:

Angebot A: $50+\frac{50}{1{,}08}+\frac{50}{1{,}08^2}+\frac{50}{1{,}08^3}+\frac{50}{1{,}08^4}+\frac{50}{1{,}08^5}+\frac{50}{1{,}08^6}+\frac{50}{1{,}08^7}+\frac{50}{1{,}08^8}+\frac{50}{1{,}08^9}=362{,}3$

Angebot B: $150+\frac{40}{1{,}08}+\frac{40}{1{,}08^2}+\frac{40}{1{,}08^3}+\frac{40}{1{,}08^4}+\frac{40}{1{,}08^5}+\frac{40}{1{,}08^6}=334{,}9$

2. Lösungsvariante: Wir verwenden die Formeln zur Berechnung der Barwerte.

Angebot A: Es liegt eine vorschüssiger Jahresrente über 10 Jahre vor:

$$50\cdot 1{,}08\cdot\frac{1{,}08^{10}-1}{1{,}08-1}\cdot\frac{1}{1{,}08^{10}}=362{,}3.$$

Angebot B: Es liegt nach einer Einmalzahlung eine nachschüssige Jahresrente über 6 Jahre vor: $150+40\cdot\frac{1{,}08^6-1}{1{,}08-1}\cdot\frac{1}{1{,}08^6}=334{,}9.$

Angebot A ist mit rund € 362300 günstiger als Angebot B mit rund € 334900. Freilich könnten noch andere Überlegungen eine Rolle spielen, etwa dass B eine raschere Bezahlung anbietet.

Im Überblick: Wirtschaftsmathematische Anwendungen

Lineare Abschreibung:

Der jährlicher Abschreibungsbetrag A ist stets gleich $\frac{R_0-R_n}{n}$;

Restwert nach k Jahren: $R_k=R_0-k\cdot A$, $k=1,2,\ldots,n$.

Die Restwerte R_k bilden eine fallende arithmetische Folge.

Geometrisch-degressive Abschreibung:

Der jährliche Abschreibungsbetrag A_k ist gleich $i=p\%$ des jeweiligen Restwertes R_{k-1}: $A_k=i\cdot R_{k-1}$.

Restwert nach k Jahren: $R_k=R_0\cdot(1-i)^k$ mit $i=1-\sqrt[n]{\frac{R_n}{R_0}}$, $k=1,2,\ldots,n$.

Die Restwerte bilden eine fallende geometrische Folge. Dies gilt auch für die Abschreibungsbeträge.

Rente: Folge von Zahlungen in gleicher Höhe R und in gleichen Zeitabschnitten (Jahren).

Vorschüssige Rente (Zahlungen am Anfang der Zeitabschnitte):

$$E_n = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad B_n = \frac{E_n}{q^n}.$$

Nachschüssige Rente (Zahlungen am Ende der Zeitabschnitte):

$$E_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad B_n = \frac{E_n}{q^n}.$$

Dabei ist n die Laufzeit in Jahren, E_n der Rentenendwert, B_n der Rentenbarwert nach n Jahren, i der Zinssatz und $q = 1 + i$.

Rückzahlung einer Schuld K_0 in jährlichen und gleich bleibenden Ratenzahlungen A (Annuitäten) in n Jahren: $A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}, \quad q = 1 + i$

Aufgaben

Abschreibungsrechnung

1.47 Eine PC-Anlage mit einem Neuwert von € 3000,– soll in 4 Jahren voll, d.h. auf den Schrottwert null abgeschrieben werden. Gib die Restwerte bei einer linearen Abschreibung an.

1.48 Ein LKW mit einem Neuwert von € 73000,– soll in 8 Jahren auf einen Schrottwert von € 1 000 abgeschrieben werden. Wie lauten die Restwerte in dieser Zeit bei einer
- **a)** linearen Abschreibung;
- **b)** geometrisch-degressiven Abschreibung.

1.49 Eine Produktionsanlage mit einem Anschaffungswert von € 200000 wird in 6 Jahren geometrisch-degressiv auf einen Restwert € 2000 abgeschrieben. Wie lauten die Restwerte in den einzelnen Jahren?

1.50 Eine Maschine hat nach dreimaliger jährlicher Abschreibung um 38 % einen Restwert von € 1 191,64,– . Wie hoch war der Neuwert?

1.51 Eine Maschine wird um € 60000 gekauft. Der Abschreibungsbetrag nach dem zweiten Nutzungsjahr beträgt € 11 000. Wie groß ist der Restwert der Maschine nach 5 Jahren
- **a)** bei linearer Abschreibung;
- **b)** bei geometrisch-degressiver Abschreibung?

1.52 Eine Maschine wurde in 4 Jahren auf einen Schrottwert von € 1 000 abgeschrieben. Wie groß war der Anschaffungspreis, wenn die letzte Abschreibung € 9000 betrug
- **a)** bei linearer Abschreibung;
- **b)** bei geometrisch-degressiver Abschreibung?

1.53 Ein Gut wird vom Neuwert R_0 = € 10000 auf den Schrottwert R_n = € 1000 in n = 5 Jahren geometrisch-degressiv abgeschrieben.
- **a)** Wie lautet die Folge der Abschreibungsbeträge $\langle A_k \rangle$ mit k = 1, 2, ..., n?
- **b)** Zeige allgemein: Ist $1 - i$ der Quotient der Restwertfolge $\langle R_k \rangle$, so ist $\langle A_k \rangle$ ebenfalls eine geometrische Folge mit dem gleichen Quotienten.

1.54 Eine Maschine wird zu einem Preis von € 65000,– angeschafft. Die Nutzungsdauer n beträgt 5 Jahre, wobei mit einem Schrottwert von € 5000,– gerechnet wird. Bei der sogenannten arithmetisch-degressiven Abschreibung bilden die Abschreibungsbeträge eine fallende arithmetische Folge $\langle n \cdot A_n, (n-1) \cdot An, \ldots, 3\,A_n, 2\,A_n, A_n \rangle$, wobei A_n der letzte Abschreibungsbetrag ist. Bestimme die Folge der Restwerte $\langle R_n \rangle$.

Rentenrechnung

1.55 Wie groß sind der Endwert und Barwert einer nachschüssigen Jahresrente von

a) € 10000,– durch 10 Jahre bei $i = 5\%$,

b) € 10000,– durch 20 Jahre bei $i = 5\%$,

c) € 10000,– durch 10 Jahre bei $i = 8\%$.

1.56 Wie groß sind Endwert und Barwert einer vorschüssigen Jahresrente von

a) € 20000,– durch 5 Jahre bei $i = 5\%$,

b) € 20000,– durch 10 Jahre bei $i = 5\%$,

c) € 20000,– durch 5 Jahre bei $i = 8\%$.

1.57 Eine Rentenzahlung von jährlich € 10000,– wird 12 Jahre lang geleistet. Der Zinssatz beträgt 6%. Wie hoch ist der Rentenendwert, wenn die Zahlungen

a) zu Beginn eines jeden Jahres, **b)** am Ende eines jeden Jahres erfolgen?

1.58 Welchen Betrag muss man ansparen, um davon 20 Jahre lang jeweils am Jahresbeginn eine Rente von € 20000,– zu beziehen, wenn mit $i = 5\%$ gerechnet wird?

1.59 Ein Mann hat 10 Jahre hindurch zu Jahresbeginn € 2000.– zu zahlen. Durch welche einmalige Zahlung zu Beginn der Zahlungen könnte er die gesamte Schuld tilgen, wenn

a) $i = 5\%$ **b)** $i = 8\%$ **c)** $i = 10\%$.

1.60 Jemand hat die Verpflichtung, 5 Jahre lang € 1000,– jeweils zu Jahresbeginn zu zahlen. Wie hoch ist bei $i = 6\%$ die Jahresrate, wenn er die 5 Zahlungen erst mit Ende des Jahres beginnen möchte?

1.61 Ein Wald hat einen Holzbestand von 100000 m³. Jährlich werden 1000 m³ abgeholzt. Mit welchem Holzbestand kann nach 25 Jahren gerechnet werden, wenn der jährliche Holzzuwachs **a)** 3%, **b)** 1% beträgt?

Hinweis: Betrachte den Abholzungsvorgang als nachschüssige Rente!

1.62 Ein Schüler bekommt von seinen Eltern zum Geburtstag ein Sparbuch mit einem Guthaben von € 1000,–. Ein Jahr danach beginnt er mit jährlichen Einzahlungen von je € 100,–, was insgesamt fünfmal erfolgt. Wie groß ist das Guthaben ein Jahr nach der letzten Einzahlung bei einer jährlichen Verzinsung von 3%?

1.63 Zwei Freunde haben vor, 30 Jahre hindurch jeweils zu Jahresbeginn € 2000,– auf einen Pensionsfond einzuzahlen. Der eine bekommt den Zinssatz $i = 6\%$, dem anderen der beiden gelang es nach zähem Feilschen 6,25% zu bekommen. Wie groß ist der prozentuelle Unterschied des Endwertes nach 30 Jahren unter der Voraussetzung, dass die Zinssätze konstant blieben?

1.64 Eine Schuld soll in 20 Jahresraten zu € 1 000,– zurückgezahlt werden. Der Schuldner ist in Geldnot und ersucht um einen Aufschub des Zahlungsbeginns um ein Jahr. Wie groß ist der Unterschied der Barwerte beider Rückzahlungsformen, wenn mit einem Zinssatz von 8 % kalkuliert wird?

1.65 Eine Maschine mit einer Nutzungsdauer von 10 Jahren kostet € 20 000,–. Die jeweils zu Jahresende fälligen Betriebskosten betragen € 800.

a) Berechne den Barwert dieser Investition.

b) Wie viel müsste durch die neue Maschine jährlich erwirtschaftet werden, um ihre Anschaffung zu decken? Es kann dabei angenommen werden, dass die jährlichen Erträge zum Jahresende anfallen.

Der Kalkulationszinssatz beträgt 8 %.

1.66 Eine Schuld von € 40 000 ist bei i = 8 % durch folgende Annuitäten zu tilgen: A_1 = € 15 000,– nach einem Jahr, A_2 = € 20 000,– nach dem zweiten Jahr, Restzahlung A_3 am Ende des dritten Jahres. Wie groß ist A_3? Erstelle einen Tilgungsplan!

1.67 Eine Schuld von € 40 000,– soll bei i = 6 % **a)** in 5 Jahren, **b)** in 10 Jahren durch gleich bleibende Annuitäten getilgt werden. Wie hoch ist die Annuität? Erstelle einen Tilgungsplan!

1.68 Kann man eine Schuld von € 1 000,– bei i = 7 % mit einer Annuität A = € 50,– jemals tilgen? Wie groß muss die Annuität mindestens sein, damit man wenigstens die in jedem Jahr anfallenden Zinsen zahlen kann?

1.69 Ein Kredit von € 11 000,– soll bei i = 8 % in 5 Jahren getilgt werden.

a) Berechne die erforderliche Annuität A.

b) Runde den für A erhaltenen "krummen" Wert auf Hunderter ab. Dadurch erhält man einen für die Handhabung angenehmeren Wert für A. Erstelle nun mit diesem Wert für A den Tilgungsplan. Durch die kleinere Annuität bleibt ein Kreditrest nach 5 Jahren. Wie groß ist dieser Kreditrest?

1.70 Eine Firma steckt in Schwierigkeiten. Ihr Eigentümer denkt ans Aufhören und möchte verkaufen. Er erhält zwei Übernahmeangebote:

Angebot A: € 6 Mio. sofort und siebenmal je € 2 Mio. in Jahresabständen, beginnend ein Jahr nach der Übernahme.

Angebot B: Durch fünf Jahre hindurch je € 4 Mio. mit sofortigem Beginn.

Welches Angebot ist für den Eigentümer günstiger? Rechne mit einem Kalkulationszinssatz von 8 %.

1.71 Es soll zwischen zwei Investitionsprojekten A und B entschieden werden. Die Anschaffungszahlungen betragen € 30 000 beim Projekt A und € 55 000 beim Projekt B. Projekt A lässt über 6 Jahre einen jährlichen Ertrag von € 10 000 erwarten, Projekt B einen solchen von € 15 000 über den gleichen Zeitraum. Die jährlichen Erträge fallen zum Jahresende an.

Welche Investition ist vorzuziehen, wenn ein Kalkulationszinssatz von 7 % angenommen wird?

1.5 Konvergenz unendlicher Folgen und Reihen

Viele Probleme, wie etwa die Bestimmung der Tangente in einem Kurvenpunkt oder des Flächeninhaltes unter einer Kurve, lassen sich mit der Elementarmathematik nicht lösen. Die zentralen Operationen der darüber hinausgehenden "höheren" Mathematik bauen auf einem neuen Begriff, nämlich dem des *Grenzwertes* auf. Bei einer unendlichen Folge kann es sein, dass die vom Anfang der Folge "weit entfernten" Glieder schließlich einer bestimmten Zahl g beliebig nahe kommen. Ist dies der Fall, so sagt man, dass die Folge den Grenzwert g besitzt.

Beispiel 1.19 : Grenzwert einer (unendlichen) Folge

Gegeben ist die Folge $\left\langle \frac{n-1}{n} \right\rangle$. Untersuche die vom Anfang der Folge "weit entfernten" Glieder dieser Folge.

Lösung

Wir berechnen die Glieder der Folge und richten dabei das besondere Augenmerk auf die Glieder mit einem hohen Index, etwa $n > 100$. Die Folge besteht einfach aus Brüchen, deren Nenner eine um 1 größere natürliche Zahl als der Zähler ist:

$$\left\langle 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{99}{100}, \frac{100}{101}, \frac{101}{102}, \frac{102}{103}, \ldots \right\rangle =$$

$$= \langle 0;\ 0{,}5;\ 0{,}667;\ 0{,}750;\ 0{,}800;\ 0{,}833;\ 0{,}875;\ \ldots,\ 0{,}9900;\ 0{,}9901;\ 0{,}9902;\ 0{,}9903;\ \ldots \rangle.$$

Man darf vermuten, dass die Glieder der Folge sich der Zahl 1 beliebig nähern. Abb.1.16 zeigt den Sachverhalt auf der Zahlengeraden.

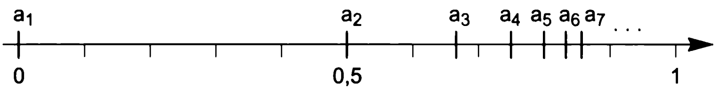


Abb. 1.16 Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \frac{n-1}{n}$

Um sicher zu sein, ist eine Begründung nötig. $|1 - a_n| = 1 - a_n$ ist der Abstand des Folgegliedes a_n von 1.

Zur Erinnerung: $|a - b|$ ist der Abstand zweier Zahlen a und b auf der Zahlengeraden. Da ein Abstand nicht negativ ist, müssen im Allgemeinen die Betragsstriche gesetzt werden. Ist $a > b$, kann freilich $|a - b| = a - b$ gesetzt werden; ist $a < b$, so ist $|a - b| = b - a$.

Wir untersuchen nun diesen Abstand in seiner Abhängigkeit von n:

$$1 - a_n = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{n - n + 1}{n} = \frac{1}{n}.$$

a_n hat also von 1 den Abstand $\frac{1}{n}$ und dieser kann beliebig klein gemacht werden, wenn nur der Nenner ausreichend groß ist. D.h. die Folgeglieder kommen der Zahl 1 *beliebig* nahe, sofern nur ihr Zählindex n genügend groß ist.

Man nennt 1 den **Grenzwert** der Zahlenfolge $\left\langle \frac{n-1}{n} \right\rangle$ und sagt, dass $\left\langle \frac{n-1}{n} \right\rangle$ **gegen 1 strebt**.

Man schreibt dafür:

$\mathbf{a_n \to 1}$ **für** $\mathbf{n \to \infty}$ oder $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{a_n = 1}$ (gelesen: "limes[4] a_n für n gegen unendlich ist 1".

Das Symbol $n \to \infty$ besagt, dass n jede noch so große Zahl übersteigt.

[4] limes (lat.), Grenze

Es stellt sich die Frage, ob eine Folge immer einen Grenzwert besitzt. Dazu das folgende Beispiel:

Beispiel 1.20 : Folgen, die keinen Grenzwert besitzen

Untersuche, ob die Folge einen Grenzwert besitzt:

a) $\left\langle (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n} \right\rangle$ **b)** $\langle 2n-1 \rangle$

Lösung

Zu **a)** $\left\langle 0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{99}{100}, -\frac{100}{101}, \frac{101}{102}, -\frac{102}{103}, \ldots \right\rangle$

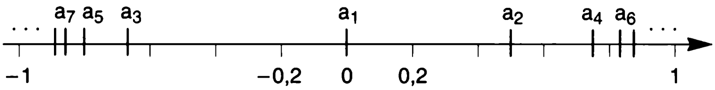


Abb. 1.17 Beispiel einer Folge, die keinen Grenzwert besitzt

Alle Glieder mit geradem Zählindex nähern sich beliebig der Zahl 1, die Glieder mit ungeradem Index beliebig der Zahl −1 (Abb.1.17). Es gibt aber keine Zahl, der schließlich *alle* Folgeglieder beliebig nahe kommen, daher hat diese Folge auch keinen Grenzwert.

Zu **b)** $\langle 2n-1 \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots \rangle$.

Mit wachsendem n übersteigen die Folgeglieder jede noch so große Zahl. Damit gibt es auch hier keine Zahl, der schließlich alle Folgeglieder beliebig nahe kommen. Trotzdem schreibt man in diesem Fall symbolisch $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1) = \infty$.

Eine Zahl g heißt **Grenzwert** oder **Limes** einer unendlichen Folge $\langle a_n \rangle$, wenn sich ihre Glieder unbegrenzt dieser Zahl nähern. Das bedeutet, dass fast alle (= alle bis auf endlich viele) Folgeglieder der Zahl g so nahe kommen, wie man es nur wünscht.

Man sagt, dass die Folge $\langle a_n \rangle$ gegen g **konvergiert**[5] und schreibt:

$$\mathbf{a_n \to g \text{ für } n \to \infty} \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{a_n = g}.$$

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**, andernfalls heißt sie **divergent**[6].

Besitzt eine konvergente Folge den Grenzwert 0, so heißt sie **Nullfolge**.

Übersteigen fast alle Folgeglieder jede noch so große Zahl bzw. unterschreiten sie jede noch so kleine (negative) Zahl, so heißt die Folge $\langle a_n \rangle$ **bestimmt divergent**. Man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a_n} = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{a_n} = -\infty.$$

Daher ist die Folge $\left\langle \frac{n-1}{n} \right\rangle$ konvergent, während die Folgen $\left\langle (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n} \right\rangle$ und $\langle 2n-1 \rangle$ divergent sind, letztere ist bestimmt divergent.

5 convergere (lat.), zusammenstreben
6 divergere (lat.), auseinanderstreben

Beispiel 1.21 : Konvergente und divergente Folgen

Untersuche, ob die Folge einen Grenzwert besitzt:

a) $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ **b)** $\left\langle \frac{n}{2n+1} \right\rangle$ **c)** $\langle (-1)^n \rangle$ **d)** $\left\langle \frac{1}{n} + n \bmod 3 \right\rangle$

Lösung

Zu **a)** Für $n \to \infty$ nähern sich die Brüche $\frac{1}{n}$ unbegrenzt der Zahl 0. Die Folge ist daher eine Nullfolge.

Zu **b)** Dividiert man im Bruch $\frac{n}{2n+1}$ Zähler und Nenner durch n, so erhält man $\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$.

Da $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ eine Nullfolge ist, gilt:

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$. Die Folge ist daher konvergent mit dem Grenzwert $\frac{1}{2}$.

Zu **c)** $\langle -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots \rangle$; die Glieder springen stets zwischen -1 und 1 hin und her; es gibt keine Zahl, der sich die Folgeglieder unbegrenzt nähern, daher ist die Folge divergent.

Zu **d)** Für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ ist n mod 3, der Rest der Division von n durch 3, gleich 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, usw. Daher lautet die Folge:

$\left\langle \frac{1}{1} + 1, \frac{1}{2} + 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} + 1, \frac{1}{5} + 2, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} + 1, \frac{1}{8} + 2, \frac{1}{9}, \ldots \right\rangle$.

Man kann zwar aus der Folge drei konvergente Teilfolgen mit den Grenzwerten 0, 1 und 2 bilden, doch für die Folge $\left\langle \frac{1}{n} + n \bmod 3 \right\rangle$ gibt es keine Zahl, der sich schließlich alle ihre Glieder unbegrenzt nähern. Daher ist diese Folge divergent.

Rechnen mit Grenzwerten

Für die Grenzwertberechnung konvergenter Folgen leisten die sogenannten Grenzwertsätze gute Dienste. Mit ihnen kann man oft aus Folgen mit bekanntem Grenzwert jenen einer anderen Folge bestimmen. In Beispiel 1.21 b) wurde davon schon stillschweigend Gebrauch gemacht. Sie werden ohne Beweis angegeben.

Grenzwertsätze für Folgen

Es seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ zwei konvergente Folgen. Dann gilt:

1. $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} b_n$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \cdot \lim\limits_{n \to \infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n}$ (alle auftretenden Nenner $\neq 0$ vorausgesetzt)

In Worten:

Der Grenzwert der Summe (Differenz) zweier konvergenter Folgen ist gleich der Summe (Differenz) der Grenzwerte dieser Folgen.

Der Grenzwert des Produktes oder Quotienten zweier konvergenter Folgen ist gleich dem Produkt bzw. Quotienten der Grenzwerte dieser Folgen.

Beispiel 1.22 : Rechnen mit Grenzwerten

Bestimme den Grenzwert der Folge

a) $\left\langle \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} \right\rangle$ b) $\left\langle \frac{3\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+1} \right\rangle$ c) $\left\langle \frac{2n^3 - 5n^2}{n^3 + 8n} \right\rangle$

Lösung

Zu **a)** Da $\left\langle \frac{1}{2n} \right\rangle$ und $\left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle$ konvergente Folgen sind (der Grenzwert ist in beiden Fällen null), gilt nach dem ersten Grenzwertsatz: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0 + 0 = 0.$

Zu **b)** Da $\langle 3\sqrt{n} + 2\rangle$ und $\langle \sqrt{n} + 1\rangle$ keine konvergente Folgen sind, können die Grenzwertsätze nicht unmittelbar angewendet werden. In diesem Fall und in ähnlichen Fällen können geeignete Umformungen auf konvergente Folgen führen. Wir dividieren Zähler und Nenner durch $\sqrt{n}$:

$$\frac{3\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+1} = \frac{\frac{3\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}} = \frac{3 + \frac{2}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 3$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ (beides nach dem ersten Grenzwertsatz oder auch unmittelbar ersichtlich), ist nach dem dritten Grenzwertsatz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3 + \frac{2}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{3}{1} = 3.$$

Zu **c)** Hier liegt eine Folge vor, deren allgemeines Glied ein Bruch ist, bei dem sowohl der Zähler wie auch der Nenner ein Polynom in n ist. Wir dividieren in einem solchen Fall Zähler und Nenner durch die *höchste vorkommende Potenz von n*, hier also durch n^3:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3 - 5n^2}{n^3 + 8n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3}{n^3} - \frac{5n^2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} + \frac{8n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2 - \frac{5}{n}}{1 + \frac{8}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{8}{n^2}\right)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Beispiel 1.23 : Die Zahl e als Grenzwert einer Folge

Berechne das erste, zweite, dritte, zehnte, 100., 1000. und 10000. Glied der Folge $\left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\rangle$.

Lösung

$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2;\ a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25;\ a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2{,}37037\ldots;$

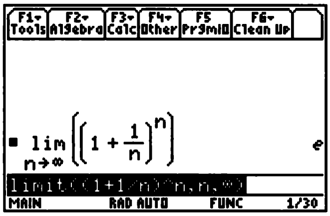
$a_{10} = 1{,}1^{10} = 2{,}59374\ldots$

$a_{100} = 1{,}01^{100} = 2{,}70481\ldots$

$a_{1000} = 1{,}001^{1000} = 2{,}71692\ldots$

$a_{10000} = 1{,}0001^{10000} = 2{,}71814\ldots$

Ohne Beweis: Die Folge $\left\langle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\rangle$ ist konvergent. Ihr Grenzwert definiert die **EULER'sche Zahl e** = 2,718 281 828 459 045 235 36…, die in der Mathematik fundamentale Bedeutung besitzt.



Mit F3 3 (3:limit) oder eintippen kann gegebenenfalls der Grenzwert einer Folge bestimmt werden:

limit(a_n, n, ∞).

Beispiel 1.24 : Stetige Verzinsung

Ein Kapital K_0 = € 100 wird bei i = 4% Jahreszinsen für ein Jahr verzinst. Berechne den Endwert K des Kapitals bei

a) der üblichen jährlichen Verzinsung (Zinstermin: Jahresende),

b) halbjährlicher Verzinsung (Zinstermin: Halbjahresende),

c) monatlicher Verzinsung (Zinstermin: Monatsende),

d) täglicher Verzinsung (Zinstermin: Tagesende),

e) stetiger Verzinsung (Zinstermin: "augenblicklich").

Lösung

K bezeichnet im Folgenden stets den Endwert nach einem Jahr.

Zu **a)** $K = K_0 \cdot (1 + i) =$ € 104,–

Zu **b)** Kapital nach dem ersten Halbjahr: $K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)$

Kapital nach dem zweiten Halbjahr: $K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^2 =$ € 104,04; dieser Wert ist etwas größer als bei der ganzjährlichen Verzinsung, da die Zinsen bereits nach einem Halbjahr zum Kapital dazugeschlagen werden und danach mitverzinst werden.

Zu **c)** Endkapital nach dem 12-ten Monat: $K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} =$ € 104,07

Zu **d)** Endkapital nach dem 360. Tag: $K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{360}\right)^{360} =$ € 104,08

Zu **e)** Wird das Jahr in m Zinsperioden (z.B. m = 12 bei monatlicher Verzinsung) unterteilt, so ist das Endkapital nach der m-ten Zinsperiode: $K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$;

Wir setzen nun $n = \frac{m}{i}$: $K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot i} = K_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^i$.

Nun soll m über alle Grenzen wachsen, d.h. die Zinsperioden schrumpfen, bis im Grenzfall $m \to \infty$ "in jedem Augenblick" verzinst wird; dann gilt auch $n = \frac{m}{i} \to \infty$.

Es gilt dann (Grenzwertsatz: "Grenzwert eines Produktes = Produkt der Grenzwerte")

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^i = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^i = K_0\cdot e^i .$$

D.h. das Kapital nach einem Jahr ist bei der **stetigen Verzinsung**, auch **Augenblicksverzinsung** genannt, einfach gleich $K_0\cdot e^i$!

Im konkreten Zahlenbeispiel ist $K = 100\cdot e^{0,04} = 104{,}08$.

Unendliche Reihen

Wir betrachten die geometrische Folge $\left\langle\frac{1}{2^n}\right\rangle = \left\langle\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots\right\rangle$ und bilden die Summe der Anfangsglieder:

$s_1 = \frac{1}{2}$

$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

usw.

Wir erhalten also eine Folge von *Summen* $\langle s_1, s_2, s_3, \dots\rangle$, von der wir fragen können, ob sie einen Grenzwert besitzt.

Anschaulich erkennt man aus Abb.1.18, dass dies der Fall sein sollte, weil die eingezeichneten Teilflächen gerade die Flächeninhalte $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ besitzen. Nimmt man von der verbleibenden Restfläche die Hälfte, so erhält man eine Teilfläche mit dem Inhalt $\frac{1}{32}$, usw. Die Summen der Inhalte der so erfassten Flächen bilden gerade die Teilsummen $s_1, s_2, s_3, \dots$.

Geometrisch wird daher nahegelegt, dass diese Teilsummen immer größer werden und ihr Grenzwert 1, also der Inhalt der gesamten Quadratfläche ist.

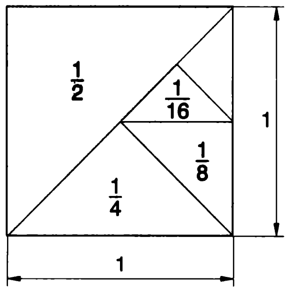


Abb. 1.18

Rechnerische Begründung, dass $s_n \to 1$ für $n\to\infty$:

n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$
1	$\frac{1}{2}$
10	$\frac{1}{2^{10}}$
100	$\frac{1}{2^{100}}$
...	...
∞	0

Wir müssen zeigen, dass der Abstand $|s_n - 1|$ beliebig klein gemacht werden kann.

$$|s_n - 1| = \left|1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right| = \left|-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

$\left\langle\frac{1}{2^n}\right\rangle$ ist eine Nullfolge. Daher wird der Abstand $|s_n - 1|$ beliebig klein, wenn man n groß genug wählt.

Somit ist die Summenfolge konvergent und besitzt den Grenzwert 1. Man schreibt dies üblicherweise auch so:

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots}_{\text{eine unendliche geometrische Reihe}} = 1$$

Allgemein wird definiert:

Unendliche geometrische Reihe

$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots a \cdot q^n + \ldots$ heißt **unendliche geometrische Reihe**. Die Summe ihrer ersten n Glieder $s_n = a + a \cdot q + \ldots + a \cdot q^{n-1}$ wird n-te Teilsumme (auch n-te Partialsumme) genannt. Ist diese Folge konvergent mit dem Grenzwert s, so heißt auch die unendliche geometrische Reihe **konvergent**; s wird als **Summe** der unendlichen Reihe bezeichnet. Man schreibt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^n + \ldots = s$$

Die Glieder einer geometrischen Reihe bilden also eine geometrische Folge: $\langle a, a \cdot q, a \cdot q^2, \ldots \rangle$. Es gibt auch unendliche Reihen anderer Art wie beispielsweise

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Wann besitzt eine unendliche geometrische Reihe eine Summe? Man muss entsprechend ihrer Definition von der Folge der Teilsummen $\langle s_n \rangle$ ausgehen:

$$s_n = a + a \cdot q + \ldots + a \cdot q^{n-1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{q-1} \cdot q^n - \frac{a}{q-1}.$$

Entscheidend ist das Verhalten von q^n im Term für s_n. Ist $q = \frac{1}{2}$, wie im eben gerechneten Beispiel, so ist die Folge $\langle s_n \rangle$ konvergent, weil in diesem Fall $q^n \to 0$, wenn $n \to \infty$. Man kann überlegen, dass das Gleiche eintritt, wenn etwa $q = \frac{1}{3}$, $q = \frac{4}{5}$ oder auch $q = -\frac{2}{3}$ ist.

Dagegen ist $\langle s_n \rangle$ nicht mehr konvergent, wenn beispielsweise $q = 2$ ist. Betrachten wir dazu die unendliche geometrische Reihe mit $a = 1$:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$$

Ihre Teilsummen wachsen über alle Schranken, es gibt keinen Grenzwert und damit auch keine Summe dieser Reihe. Dies trifft auch zu, wenn $q = 1$, $q = 1{,}2$ oder $q = -3$ ist (überlege!).

Allgemein kann man sagen, dass $q^n \to 0$ für $n \to \infty$ genau dann, wenn $|q| < 1$ ist. In diesem Fall gilt:

$$s_n = a + a \cdot q + \ldots + a \cdot q^{n-1} = \frac{a}{q-1} \cdot q^n - \frac{a}{q-1} \quad \to \quad -\frac{a}{q-1} = \frac{a}{1-q}.$$

Rechnet man mit Termen, die keinen Sinn haben, kann folgender Trugschluss passieren:

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = x;$

$1 + (2 + 4 + 8 + 16 + \ldots) = 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + \ldots) = 1 + 2x;$

daraus folgt: $x = 1 + 2x$ mit der Lösung $x = -1$!?

Konvergenzsatz für unendliche geometrische Reihen

Ist $|q| < 1$, so gilt $\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots a \cdot q^n + \ldots = \frac{a}{1-q}$.

Für $|q| \geqslant 1$ besitzt die Reihe keine (endliche) Summe.

Beispiel 1.25 : Unendliche geometrische Reihen

Bestimme, falls möglich, die Summe folgender unendlichen geometrischen Reihe:

a) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

b) $\sum_{i=0}^{\infty} 3^i = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-k} = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots$

Lösung

Zu **a)** $a = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, wegen $|q| < 1$, besitzt die Reihe eine Summe:

$s = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ in Übereinstimmung mit dem Ergebnis auf Seite 42.

Zu **b)** Da mit $q = 3$ gilt, dass $|q| > 1$, besitzt die Reihe keine Summe (was freilich offenkundig ist).

Zu **c)** $a = 1$, $q = -\frac{1}{2}$; wegen $|q| < 1$, besitzt die Reihe eine Summe: $s = \dfrac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

Zu **d)** $a = 0{,}3$; $q = 0{,}1$; wegen $|q| < 1$, besitzt die Reihe eine Summe: $s = \dfrac{0{,}3}{1 - 0{,}1} = \dfrac{0{,}3}{0{,}9} = \dfrac{1}{3}$.

Üblicherweise schreibt man $0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots = 0{,}3333\ldots = 0{,}\dot{3}$.

Eine periodische Dezimalzahl ist eine unendliche geometrische Reihe!

Unendliche geometrische Folgen oder Reihen treten oft in geometrischer Einkleidung auf. Dabei werden geometrisch ähnliche Figuren betrachtet, bei denen sich eine bestimmte Länge, ein bestimmter Flächen- oder Rauminhalt fortwährend um einen stets gleichbleibenden Bruchteil q verringert.

Beispiel 1.26 : Eine Fläche mit endlichem Inhalt, die ins Unendliche reicht

An ein Quadrat (siehe Abb.1.19) mit der Seite 1 m wird ein Rechteck mit den Seiten 1 m und $\frac{1}{2}$ m angefügt, dann eine weiteres mit den Seiten 1 m und $\frac{1}{4}$ m, ein drittes mit den Seiten 1 m und $\frac{1}{8}$ m, usw.

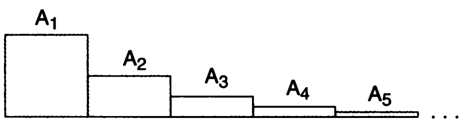


Abb. 1.19

Lösung

Es liegt eine fortlaufende Halbierung der Flächeninhalte (in m^2) vor:

$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$.

Dies ist eine unendliche geometrische Reihe mit $a = 1$ und $q = \frac{1}{2}$. Ihre Summe ist: $s = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Obwohl diese "Treppenfläche" ins Unendliche reicht, hat sie doch den endlichen Flächeninhalt 2 m^2.

Beispiel 1.27 : Stapel von Quadraten

Einem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundlinie c und der Höhe h ist nach Abb.1.20 ein "unendlicher" Stapel von aufeinander liegenden Quadraten eingeschrieben. Wie groß ist die Summe ihre Flächeninhalte?

Lösung

Gesucht ist die Summe s der unendlichen Reihe:

$s = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots,$

wobei $A_1 = a_1^2$, $A_2 = a_2^2$, $A_3 = a_3^2$, ... die Flächeninhalte der Quadrate mit den Seiten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sind. Zuerst ist zu zeigen, dass eine *geometrische* Reihe vorliegt. Dazu betrachten wir in Abb.1.20 die an die Quadrate angrenzenden rechtwinkligen Dreiecke. Diese Dreiecke sind *ähnlich* und durch Umformung erhält man:

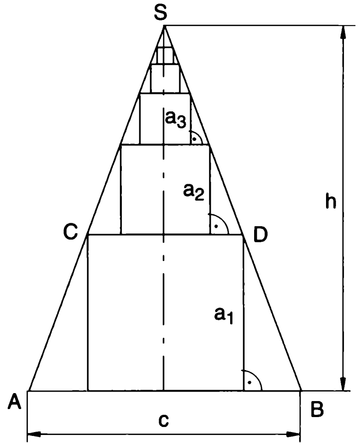


Abb. 1.20

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = k$ mit $0 < k < 1$.

Daraus folgt:

$a_2 = a_1 \cdot k$ oder $A_2 = A_1 \cdot k^2$,

$a_3 = a_2 \cdot k = a_1 \cdot k^2$ oder $A_3 = A_1 \cdot k^4$,

$a_4 = a_3 \cdot k = a_1 \cdot k^3$ oder $A_4 = A_1 \cdot k^6$,

usw.

Damit ist: $s = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots = A_1 + A_1 \cdot k^2 + A_1 \cdot k^4 + A_1 \cdot k^6 + \ldots$.

Die Reihe der Flächeninhalte ist daher eine unendliche geometrische Reihe mit dem Anfangsglied A_1 und dem Quotienten $q = k^2 < 1$.

Wir müssen nun A_1 und k berechnen. Das Quadrat mit der Seite a_1 ist das unterste Quadrat im gleichschenkligen Dreieck ABS. Zur Berechnung von a_1 verwenden wir den 2. Strahlensatz:

$$h : (h - a_1) = \frac{c}{2} : \frac{a_1}{2}. \qquad (*)$$

Daraus $a_1 = \frac{c \cdot h}{c + h}$

Das Quadrat mit der Seite a_2 ist das unterste Quadrat im gleichschenkligen Dreieck CDS mit der Grundlinie a_1 und der Höhe $h - a_1$. Gleichung (*) kann sinngemäß angewendet werden, wenn man dort c durch a_1 sowie h durch $h - a_1$ ersetzt:

$$a_2 = \frac{a_1 \cdot (h - a_1)}{a_1 + (h - a_1)}.$$

Daraus erhält man nach Einsetzen für a_1: $a_2 = \frac{c \cdot h^2}{(c + h)^2}$ und weiter $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{h}{c + h}$.

$$\text{Daher: } s = \frac{A_1}{1 - k^2} = \frac{\left(\frac{c \cdot h}{c+h}\right)^2}{1 - \left(\frac{h}{c+h}\right)^2} = \frac{c \cdot h^2}{c + 2h}.$$

Im Überblick: Konvergenz undendlicher Folgen und Reihen

Nähern sich die Glieder einer Folge $\langle a_n \rangle$ unbegrenzt einer Zahl g, so heißt $\langle a_n \rangle$ **konvergent** mit dem **Grenzwert** g.

Man schreibt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oder $a_n \to g$ für $n \to \infty$.

Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie **divergent**. Im Besonderen heißt eine Folge $\langle a_n \rangle$ *bestimmt* divergent, wenn fast alle Folgeglieder jede noch so große Zahl überschreiten bzw. jede noch so kleine (negative) Zahl unterschreiten; man schreibt:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Grenzwertsätze für Folgen:

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ (alle auftretenden Nenner $\neq 0$ vorausgesetzt)

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (EULER'sche Zahl)

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \dots a \cdot q^n + \dots$ heißt **unendliche geometrische Reihe.**

Sie heißt **konvergent**, wenn die Folge $\langle s_n \rangle$ der Teilsummen (Partialsummen), $s_n = a + a \cdot q + \dots + a \cdot q^{n-1}$, konvergent ist; ihr Grenzwert wird als **Summe** der unendlichen Reihe bezeichnet.

Ist $|q| < 1$, so gilt $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \dots a \cdot q^n + \dots = \frac{a}{1-q}$.

Für $|q| \geqslant 1$ besitzt die Reihe keine (endliche) Summe.

Aufgaben

Unendliche Folgen

1.72 Die Folge $\left\langle \frac{2n}{n+1} \right\rangle$ hat den Grenzwert 2; berechne jenen Index N, ab dem der Abstand der Folgeglieder von 2 kleiner als

a) 0,01 **b)** 0,001 **c)** 0,0001 ist.

1.73 Bestimme den Grenzwert der Folge:

a) $\left\langle \frac{1}{2n} \right\rangle$ **b)** $\left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle$ **c)** $\left\langle \frac{1}{2n^2} \right\rangle$ **d)** $\left\langle 2 + \frac{1}{n^2} \right\rangle$

e) $\left\langle 2 - \frac{1}{n} \right\rangle$ **f)** $\left\langle 1 + \frac{1}{n^2} \right\rangle$ **g)** $\left\langle \frac{1}{3n^2} + 2 \right\rangle$ **h)** $\left\langle \frac{n-1}{n} \right\rangle$

1.74 Bestimme den Grenzwert der Folge:

a) $\left\langle \frac{2n-1}{n} \right\rangle$ **b)** $\left\langle \frac{1-3n}{n} \right\rangle$ **c)** $\left\langle \frac{n^2-1}{n^2} \right\rangle$ **d)** $\left\langle \frac{3+2n^2}{n^2} \right\rangle$

e) $\left\langle \frac{1}{(n+3)^2} \right\rangle$ **f)** $\left\langle \frac{(n+1)^2}{n^2} \right\rangle$ **g)** $\left\langle \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\rangle$ **h)** $\left\langle 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\rangle$

1.75 Untersuche, ob die Folge konvergent ist:

a) $\langle \sqrt{n} \rangle$ **b)** $\langle \sin(n\pi) \rangle$ **c)** $\langle \cos(n\pi) \rangle$ **d)** $\langle \tan(n\pi) \rangle$

e) $\langle \cos^2(n\pi) \rangle$ **f)** $\langle 3+2(-1)^n \rangle$ **g)** $\left\langle \frac{1}{(-2)^n} \right\rangle$ **h)** $\langle n \bmod 2 \rangle$

1.76 Bestimme, falls möglich, den Grenzwert der Folge:

a) $\left\langle \frac{2n-1}{n+1} \right\rangle$ **b)** $\left\langle \frac{2n-1}{n^2+1} \right\rangle$ **c)** $\left\langle \frac{n^3+n^2-1}{n^2+1} \right\rangle$ **d)** $\left\langle \frac{-n^4+2n^2+3}{2n^4+1} \right\rangle$

e) $\left\langle \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \right\rangle$ **f)** $\left\langle \frac{\sqrt{n}}{1+n} \right\rangle$ **g)** $\left\langle \frac{n}{1+\sqrt{n}} \right\rangle$ **h)** $\left\langle \frac{n}{1+n\sqrt{n}} \right\rangle$

1.77 Bestimme, falls möglich, den Grenzwert der Folge:

a) $\left\langle \frac{n^2}{n-1} - n \right\rangle$ **b)** $\left\langle \frac{n^2}{n-1} + 2n \right\rangle$ **c)** $\left\langle \frac{n^2}{n-1} + \frac{n+1}{n} \right\rangle$ **d)** $\left\langle \frac{n^2}{1+n^2} + \frac{n+1}{2n} \right\rangle$

e) $\left\langle \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \right\rangle$ **f)** $\left\langle \frac{2}{n} + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \right\rangle$ **g)** $\left\langle \frac{2-n}{n} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \cdot \frac{n}{n+2} \right\rangle$

1.78 Über einer Strecke der Länge d (Abb.1.21) ist ein Halbkreis mit der Bogenlänge b_1 gezeichnet. Dieser Halbkreis wird durch zwei aneinander gefügte Halbkreise mit dem halben Radius des ersten Halbkreises ersetzt. Die Länge der beiden Halbkreisbögen ist b_2. Danach wird jeder der beiden Halbkreisbögen wieder durch zwei Halbkreisbögen ersetzt; die Länge der nunmehr vier Halbkreisbögen ist b_3. Auf diese Weise fährt man fort. Untersuche die Folge $\langle b_n \rangle$! Die Anschauung legt nahe, dass diese Folge gegen die Länge d konvergiert. Ist dies richtig?

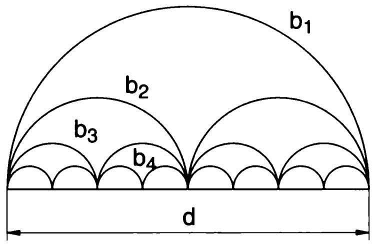


Abb. 1.21

1.79 In Abb.1.22 wird jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a in drei gleich lange Teilstrecken geteilt und das mittlere Teilstück durch ein gleichseitiges Dreieck ohne Grundseite ersetzt. Jede Teilstrecke der zweiten Figur wird wieder in drei gleich lange Teilstrecken geteilt und die mittlere Teilstrecke durch ein gleichseitiges Dreieck ohne Grundlinie ersetzt. Fährt man auf diese Weise unbegrenzt fort, so erhält man ein *Fraktal*, die sogenannte KOCH'sche Scheeflockenkurve (siehe auch "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 154). Bilde die Folge der Umfänge $\langle U_n \rangle$ und Flächeninhalte $\langle A_n \rangle$ der schrittweise entstehenden Figuren. Besitzen diese Folgen Grenzwerte, die man als Umfang bzw. Flächeninhalt der Schneeflockenkurve bezeichnen könnte?

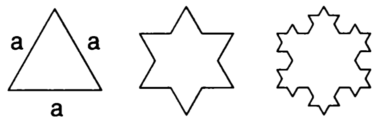


Abb. 1.22

Unendliche geometrische Reihen

1.80 Bestimme die Summe der unendlichen geometrischen Reihe $a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots$ mit:

a) $a = 2,\ q = 0{,}1$ **b)** $a = 2,\ q = -0{,}1$ **c)** $a = 3,\ q = \frac{1}{2}$ **d)** $a = -1,\ q = -\frac{1}{3}$

1.81 Bestimme die Summe der unendlichen geometrischen Reihe:

a) $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots$ **b)** $\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots$ **c)** $1 + 0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + \ldots$

d) $1 - 0{,}1 + 0{,}1^2 - 0{,}1^3 + \ldots$ **e)** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$ **f)** $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \ldots$

g) $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \ldots$ **h)** $10 + 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \ldots$ **i)** $4 + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 1 + \ldots$

1.82 Bestimme die Summe der unendlichen geometrischen Reihe:

a) $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i$ **b)** $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i$ **c)** $\sum\limits_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i$ **d)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k$

e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 0{,}9^n$ **g)** $\sum\limits_{k=5}^{\infty} 3 \cdot 0{,}9^k$ **h)** $\sum\limits_{n=-2}^{\infty} 0{,}5 \cdot 0{,}8^n$

1.83 Schreibe die folgende periodische Dezimalzahl als unendliche geometrische Reihe und forme sie über die Ermittlung ihrer Summe in einen Bruch um:

a) $0{,}\dot{2}$ **b)** $0{,}\dot{9}$ **c)** $0{,}3\dot{2}$ **d)** $2{,}\dot{5}$ **e)** $0{,}\overline{23}$

f) $1{,}\overline{04}$ **g)** $3{,}\overline{10}$ **h)** $0{,}\overline{02}$ **i)** $1{,}\overline{234}$ **j)** $0{,}1\overline{23}$

1.84 Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe ist $\frac{4}{3}$; ihr zweites Glied ist $\frac{1}{3}$. Gib die ersten 5 Glieder der Reihe an.

1.85 Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe ist 27. Die Summe ihrer ersten drei Glieder ist 26. Gib die ersten 5 Glieder der Reihe an.

1.86 "Achilles und die Schildkröte" ist ein aus dem 5. Jh. v. Chr. stammendes altgriechisches Paradoxon (Betonung auf der 2. Silbe, scheinbar zugleich wahre als auch falsche Aussage): Achilles und eine Schildkröte machen einen Wettlauf. Wir nehmen an, dass Achilles zehnmal so schnell läuft wie die Schildkröte. Die Schildkröte erhält einen Vorsprung von 100 m zugestanden. Hat nun Achilles diesen Vorsprung von 100 m zurückgelegt, ist die Schildkröte um 10 m weiter. Hat Achilles diese 10 m zurückgelegt, so ist die Schildkröte noch 1 m voraus; hat Achilles diesen Meter nachgeholt, ist die Schildkröte um 10 cm voraus, usw. Der Abstand wird zwar immer geringer, aber er verschwindet nie ganz. Also wird Achilles die Schildkröte nie einholen!

a) Zeige, dass die Vorsprünge der Schildkröte eine geometrische Folge bilden.

b) Bilde die Summe dieser Vorsprünge. Dies ist die von der Schildkröte zurückgelegte Strecke, wenn sie von Achilles überholt wird.

1.87 Eine Figur mit dem Flächeninhalt 0 und dabei unendlich großem Umfang:

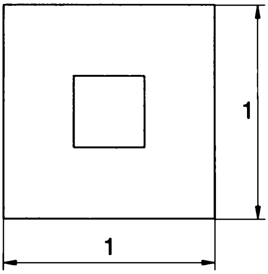


Abb. 1.23 a)

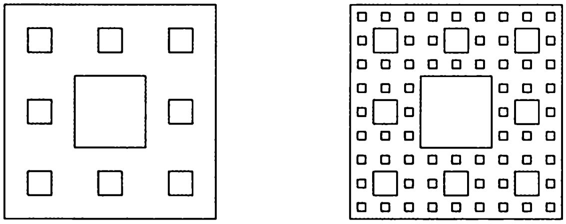


Abb. 1.23 b)

Aus einem Einheitsquadrat (Quadrat mit der Seite 1) wird, wie in Abb.1.23 a) und b) gezeigt, durch fortwährendes Ausschneiden von quadratischen Löchern eine Folge A_1, A_2, A_3, ... von Flächen erzeugt. Setzt man diesen Prozess unendlich oft fort, so entsteht ein sogenanntes Fraktal (siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 154), der *Sierpinski-Teppich*, der 1927 von dem polnischen Mathematiker Sierpinski erfunden wurde.

a) Zeige, dass die Folge $\langle A_n \rangle$ der Flächeninhalte gegen null konvergiert.

b) Die gesamte Randlänge des Sierpinski-Teppichs ist (bis auf das erste Glied) eine unendliche geometrische Reihe. Bilde die Randlängen U_1, U_2, U_3 der Flächen A_1, A_2 und A_3 und entnimm daraus das Bildungsgesetz für diese Reihe. Begründe, dass ihre Teilsummen über alle Schranken wachsen.

1.88 In einem Quadrat mit der Seite a werden die Seitenmitten durch Strecken verbunden, wodurch wieder ein Quadrat entsteht. In dieses wird auf gleiche Weise ein weiteres Quadrat gezeichnet, usw. Ermittle die Summe

a) der Umfänge,

b) der Flächeninhalte aller Quadrate.

1.89 In einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a werden die Seitenmitten durch Strecken verbunden, wodurch wieder ein gleichseitiges Dreieck entsteht. In dieses wird auf gleiche Weise ein weiteres gleichseitiges Dreieck gezeichnet, usw. Ermittle die Summe

a) der Umfänge,

b) der Flächeninhalte aller gleichseitigen Dreiecke.

1.90 Aus Halbkreisbögen wird nach Abb.1.24 eine Schlangenlinie gebildet, wobei die Radien eine geometrische Folge bilden. Wie lang ist diese Linie?

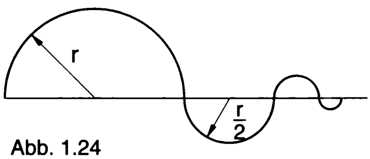


Abb. 1.24

1.91 Ein Ball wird aus einer Höhe von 2,00 m frei fallengelassen. Nach jedem Aufprall am Boden springt er auf 80 % seiner vorherigen Fallhöhe zurück. Dies wiederholt sich immer wieder. Welchen Gesamtweg legt der Ball dabei zurück?

2 Diskrete Systeme

2.1 Einführung

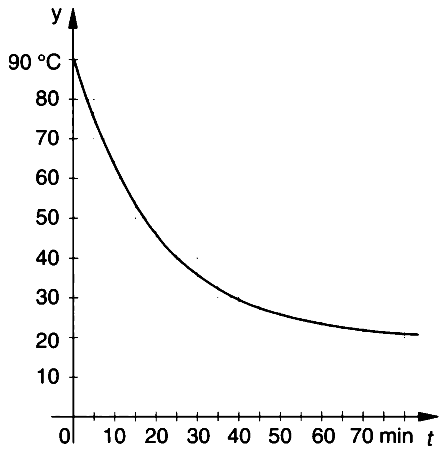


Abb. 2.1 a) Zeitkontinuierliche Darstellung

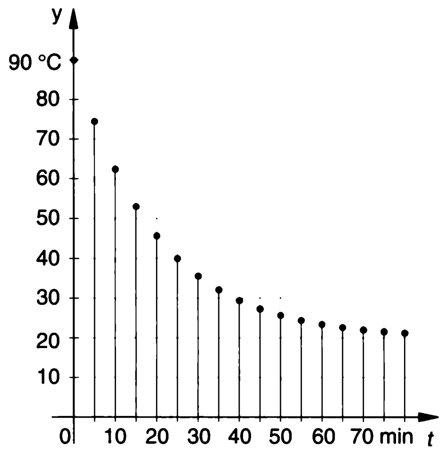


Abb. 2.1 b) Zeitdiskrete Darstellung

In Abb. 2.1 a) ist der Temperaturverlauf y = f (t) bei der Abkühlung eines Körpers für *jeden* Zeitpunkt t innerhalb eines Intervalls graphisch dargestellt: Man spricht von einer **zeitkontinuierlichen** Darstellung. In Abb. 2.1 b) ist dagegen der gleiche Abkühlvorgang in Form einer Folge $\langle y_0, y_1, y_2, ...\rangle$ von Temperaturwerten dargestellt, die zu bestimmten einzelnen Zeitpunkten von der Temperaturkurve "abgetastet" oder auch gemessen wurden: die Darstellung ist nun **zeitdiskret**.

Nicht nur die zeitmäßige, auch die *wertmäßige* Darstellung einer Größe kann kontinuierlich oder diskret sein. Eine wertkontinuierliche Größe kann jeden Wert innerhalb eines Bereichs annehmen, eine wertdiskrete nur einzelne Werte. Zeit- *und* wertdiskrete Größen werden auch als **digitale Größen** bezeichnet.

Allgemein versteht man unter einem **System** [2] eine Anordnung von Gebilden, die miteinander in Beziehung stehen. Diese Anordnung wird aufgrund bestimmter Vorgaben gegenüber ihrer Umgebung abgegrenzt. Ein *Vorgang* in einem solchen System, durch den Materie, Energie oder auch Information umgeformt, transportiert oder auch gespeichert wird, heißt ein **Prozess**. Bei der Abkühlung eines Körpers wird Wärme an die umgebende Luft abgegeben. Die Abkühlung des Körpers ist daher ein Prozess im Körper-Luft-System.

Eine *rechnerische* Beschreibung des betrachteten Abkühlprozesses kann in kontinuierlicher Form durch das NEWTON'sche Abkühlungsgesetz erfolgen (siehe "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 82): $y(t) = 20 + 70 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$, wenn y die Temperatur in °C, t die Zeit in Minuten nach Beginn des Abkühlprozesses und die Umgebungstemperatur 20 °C beträgt.

Man kann den Abkühlprozess aber auch *rechnerisch* diskret beschreiben, indem man einen (näherungsweisen) Zusammenhang zwischen den Gliedern der Temperaturfolge $\langle y_n \rangle$ herzustellen versucht. Der kontinuierliche Prozess wird so durch einen diskreten Prozess ersetzt.

Es gibt auch diskrete Prozesse, bei denen von vornherein gewisse Zustandsgrößen nur zu bestimmten Zeitpunkten betrachtet werden. Dabei wird die Veränderung innerhalb eines Zeitschrittes angegeben. Beispielsweise gibt man durch die Verzinsung an, wie sich ein Sparguthaben innerhalb des Zeitschrittes 1 Jahr ändert.

Beispiel 2.1 : Einführende Beispiele

a) Zu Beginn eines Jahres wird einmalig ein Betrag von € 500,– bei einer jährlichen Verzinsung von $i = 4\%$ auf ein Sparkonto eingezahlt.

b) Wie a), jedoch wird am Ende *jedes* Jahres ein Betrag von $B =$ € 50,– abgehoben.

c) Der Betrag von € 500 wird nicht verzinst, trotzdem werden am Ende eines *jeden* Jahres € 50 abgehoben.

Gib jeweils eine Formel an, wie der Kontostand am Jahresanfang aus dem des vorhergehenden Jahresanfangs berechnet werden kann.

Lösung

Zu **a)**

Jahr	Kontostand am Jahresanfang	Jahreszinsen
1	$y_0 =$ € 500	$y_0 \cdot i =$ € 20
2	$y_1 = y_0 + y_0 \cdot i = y_0 \cdot (1 + i) =$ € 520	$y_1 \cdot i =$ € 20,8
3	$y_2 = y_1 + y_1 \cdot i = y_1 \cdot (1 + i) =$ € 540,8	$y_2 \cdot i =$ € 21,63
4	$y_3 = y_2 + y_2 \cdot i = y_2 \cdot (1 + i) =$ € 562,43	$y_3 \cdot i =$ € 22,50
...		

Damit lautet der gesuchte Zusammenhang $y_n = (1 + i) \cdot y_{n-1} = 1{,}04 \cdot y_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$ Mit dieser Formel könnte man Jahr für Jahr den Kontostand berechnen.

Zu **b)**

Jahr	Kontostand am Jahresanfang	Jahreszinsen	Abhebung
1	$y_0 =$ € 500	$y_0 \cdot i =$ € 20	$B =$ € 50
2	$y_1 = y_0 \cdot (1 + i) - B =$ € 470	$y_1 \cdot i =$ € 18,8	$B =$ € 50
3	$y_2 = y_1 \cdot (1 + i) - B =$ € 438,8	$y_2 \cdot i =$ € 17,55	$B =$ € 50
4	$y_3 = y_2 \cdot (1 + i) - B =$ € 406,35	$y_3 \cdot i =$ € 16,25	$B =$ € 50
...			

Somit: $y_n = (1 + i) \cdot y_{n-1} - B = 1{,}04 \cdot y_{n-1} - 50$. Damit kann wieder der Kontostand Jahr für Jahr berechnet werden.

Zu **c)** Wie b) mit $i = 0\%$ und damit $q = 1$: $y_n = y_{n-1} - 50$;

damit ergibt sich:

$y_1 = y_0 - 50 = 500 - 50 = 450$

$y_2 = y_1 - 50 = 450 - 50 = 400$

usw.

Der Kontostände fallen linear ab.

Eine Gleichung der Form $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$ heißt eine **lineare Differenzengleichung 1. Ordnung**. Sie beschreibt, wie ein Wert y_n aus dem vorhergehenden Wert y_{n-1} berechnet werden kann. Ist ein Startwert $\mathbf{y_0}$ als **Anfangswert** gegeben, so können schrittweise die Werte $y_1, y_2, y_3, \ldots$ berechnet werden. Die Werte $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ bilden somit eine **Zahlenfolge**.

Die Differenzengleichung $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$ mit einem Anfangswert y_0 stellt also eine rekursive Folge dar. Abb. 2.2 zeigt die Graphen der drei Folgen des Beispiels 2.1.

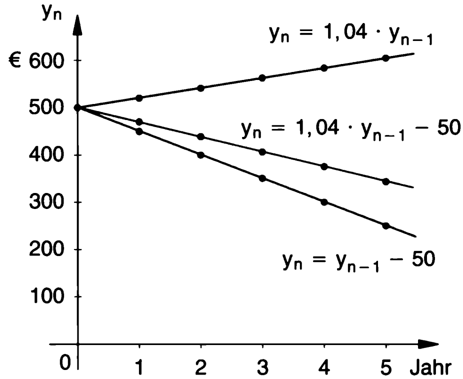


Abb. 2.2

Obwohl die Graphen nur aus einzelnen Punkten (n/y_n) bestehen, sind diese Punkte hier durch einen Streckenzug verbunden. Damit kann das Verhalten der Folge verdeutlicht werden.

Die Folgen, welche die Differenzengleichungen in Beispiel 2.1 lösen, sind streng monoton steigend oder fallend. Vor einer systematischen Behandlung von Differenzengleichungen 1. Ordnung sollen im nächsten Beispiel noch einige weitere Gleichungen dieser Art betrachtet werden.

Beispiel 2.2 : Unterschiedliches Lösungsverhalten einer Differenzengleichung 1. Ordnung

Bestimme die Werte $y_1, y_2, \ldots, y_6$ aus der folgenden Differenzengleichung und dem Anfangswert y_0 und stelle sie graphisch dar.

a) $y_n = 0,5\, y_{n-1} + 2$; $\quad y_0 = 0,5$

b) $y_n = -1,5 \cdot y_{n-1} + 5$; $\quad y_0 = 2,2$

c) $y_n = -0,7 \cdot y_{n-1} + 5,1$; $\quad y_0 = 4$

d) $y_n = -0,7 \cdot y_{n-1} + 3,4$; $\quad y_0 = 2$

e) $y_n = 2 \cdot y_{n-1} \cdot (1 - y_{n-1})$, $\quad y_0 = 0,1$

Lösung

Zu **a)**
$$
\begin{aligned}
y_0 &= 0,5 \\
y_1 &= 0,5 \cdot 0,5 + 2 = 2,25 \\
y_2 &= 0,5 \cdot 2,25 + 2 = 3,125 \\
y_3 &= 0,5 \cdot 3,125 + 2 = 3,563 \\
y_4 &= 0,5 \cdot 3,563 + 2 = 3,781 \\
y_5 &= 0,5 \cdot 3,781 + 2 = 3,891 \\
y_6 &= 0,5 \cdot 3,891 + 1 = 3,945
\end{aligned}
$$
usw.

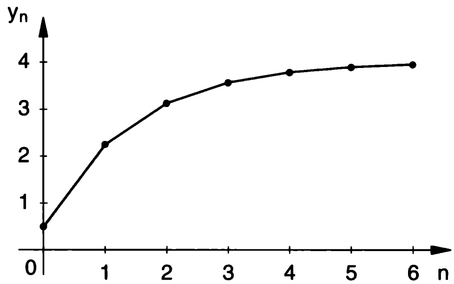


Abb. 2.3 $\quad y_n = 0,5\, y_{n-1} + 2$; $y_0 = 0,5$

Abb. 2.3 zeigt eine monoton wachsende Folge, die - was allerdings aus der Graphik nicht sicher ablesbar ist - gegen einen Grenzwert konvergiert. Dies unterscheidet diese Differenzengleichung von jenen des Beispiels 2.1, wo die Lösungsfolgen *unbeschränkt* wachsen oder fallen!

Zu **b)** bis **e)**: Abb. 2.4 bis 2.7 zeigen die Graphen des Anfangs der jeweiligen Lösungsfolge. Bestätige die Abbildungen durch Berechnen der Folgeglieder!

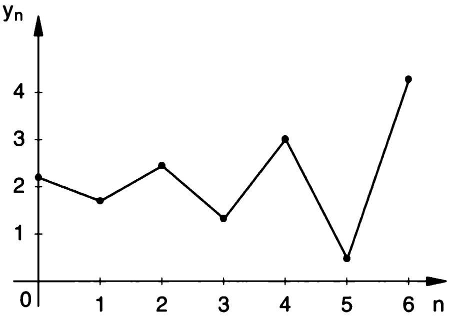


Abb. 2.4 $y_n = -1{,}5 \cdot y_{n-1} + 5;\ y_0 = 2{,}2$

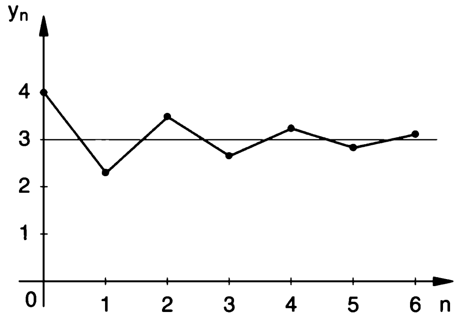


Abb. 2.5 $y_n = -0{,}7 \cdot y_{n-1} + 5{,}1;\ y_0 = 4$

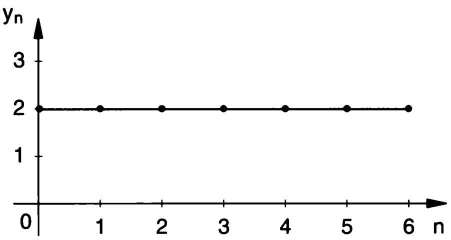


Abb. 2.6 $yn = -0{,}7 \cdot y_{n-1} + 3{,}4;\ y_0 = 2$

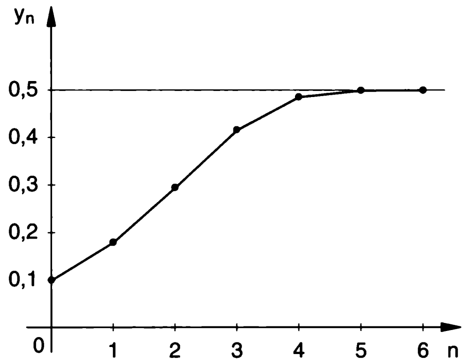


Abb. 2.7 $y_n = 2 \cdot y_{n-1} \cdot (1 - y_{n-1}),\ y_0 = 0{,}1$

Abb. 2.4 zeigt auch anschaulich, wie die ersten Folgeglieder *oszillierend* auseinander laufen. Abb. 2.5 vermittelt den Eindruck, dass die Folgeglieder *oszillierend* mit wachsendem n der Zahl 3 beliebig nahekommen. Abb. 2.6 zeigt eine Folge mit konstanten Gliedern.

Abb. 2.7 lässt vermuten, dass sich die Folgeglieder rasch beliebig der Zahl 0,5 annähern. Diese Differenzengleichung ist nicht von der einfachen Form $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$. Sie ist ein Beispiel einer sogenannten *logistischen* Differenzengleichung $y_n = a \cdot y_{n-1} \cdot (y_{n-1} - 1)$. Mit solchen Differenzengleichungen wird öfters versucht, Wachstumsvorgänge in einem eingeschränkten Lebensraum zu beschreiben.

Im Überblick: Einführung

System: Gegenüber der Umgebung abgegrenzte Anordnung von Gebilden, die miteinander in Beziehung stehen.
Prozess: Vorgang in einem System, durch den Materie, Energie oder auch Information umgeformt, transportiert oder gespeichert wird.

Zeitliche Darstellung einer (System-)Größe:
Zeitkontinuierlich: Angabe zu jedem beliebigen Zeitpunkt innerhalb eines Intervalls.
Zeitdiskret: Angabe nur zu einzelnen Zeitpunkten.

Eine Gleichung der Form $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$ heißt eine **lineare Differenzengleichung 1. Ordnung**. Zusammen mit einem Anfangswert y_0 stellt sie eine Folge rekursiv dar.

Aufgaben

2.1 Zu Beginn eines Jahres wird einmalig ein Betrag von € 500,– bei einer jährlichen Verzinsung von i = 4% auf ein Sparkonto eingezahlt. Bei welcher Abhebung B am Jahresende ergibt sich ein gleich bleibender Kontostand zu den Jahresanfängen? Wie lautet die Differenzengleichung?

2.2 Zu Beginn des Jahres n = 1 wird ein Kredit von € 10000,– zu i = 6% aufgenommen. Die Schuld soll durch konstante Rückzahlungen A = € 2000,– jeweils am Jahresende getilgt werden. Gib die Differenzengleichung der Schuldentilgung an, wenn y_n die Restschuld am Ende des n-ten Jahres nach getätigter Rückzahlung ist.

2.3 Berechne $y_1, y_2, \dots y_6$ aus der Differenzengleichung $y_n = a \cdot y_{n-1} + 1$ mit $y_0 = \frac{1}{4}$ und zeichne dazu den Graphen, wenn:

a) $a = \frac{1}{2}$ **b)** $a = \frac{5}{4}$ **c)** $a = 1$ **d)** $a = -\frac{1}{2}$ **e)** $a = -\frac{3}{2}$ **f)** $a = -1$

2.4 Berechne $y_1, y_2, \dots y_6$ aus der Differenzengleichung und zeichne dazu den Graphen:

a) $y_n = \frac{1}{2} \cdot y_{n-1} + 2$; $y_0 = 6$ **b)** $y_n = -\frac{1}{2} \cdot y_{n-1} + 4{,}5$; $y_0 = 5$

c) $y_n = y_{n-1} + 0{,}5$; $y_0 = 1{,}5$ **d)** $y_n = -y_{n-1} + 4$; $y_0 = 2$

e) $y_n = -y_{n-1} + 4$; $y_0 = 3$ **f)** $y_n = 1{,}1 \cdot y_{n-1} + 1$; $y_0 = 0{,}5$

g) $y_n = -1{,}2 \cdot y_{n-1} + 3$; $y_0 = 2$

2.2 Lineare Differenzengleichungen

Jede Gleichung für die Folge $\langle y_n \rangle$ der Form $y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_{n-m})$, m ganzzahlig und positiv, heißt eine **Differenzengleichung m-ter Ordnung**. m ist die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Index.

Anmerkungen:

(1) Häufig betrachtet man im Zusammenhang mit Differenzengleichungen Folgen $\langle y_n \rangle$ mit $n \in \mathbb{Z}$, also Folgen $\langle \ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots \rangle$.

(2) Statt y_n schreibt man in den Anwendungen auch $y(n)$ oder $y[n]$.

Speziell heißt jede Gleichung für die Folge $\langle y_n \rangle$ der Form

$$y_n + a_1 \cdot y_{n-1} + a_2 \cdot y_{n-2} + \ldots + a_m \cdot y_{n-m} = b(n)$$

eine **lineare Differenzengleichung m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten** a_1, $a_2, \ldots, a_m$. Ist $b(n) = 0$ für alle n, so heißt die Differenzengleichung **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Unter den Differenzengleichungen sind die linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten von besonderer praktischer Bedeutung.

Beispiele:

(1) $y_n - a \cdot y_{n-1} = b$	Ordnung 1, linear
(2) $y_n + 0{,}7 \cdot y_{n-1} = 5{,}2$	Ordnung 1, linear, inhomogen, konstanter Koeffizient
(3) $y_n - 2\, y_{n-1}(1 - y_{n-1}) = 0$	Ordnung 1, nichtlinear, Beispiel einer sogenannten logistischen Differenzengleichung
(4) $y_n - y_{n-1} - y_{n-2} = 0$	Ordnung 2, linear, homogen, konstante Koeffizienten; ist $y_0 = y_1 = 1$, so erhält man die Folge der Fibonacci-Zahlen
(5) $y_n - y_{n-1} + y_{n-3} = 2n$	Ordnung 3, linear, inhomogen, konstante Koeffizienten
(6) $y_n = \frac{1}{2} \cdot \left(y_{n-1} + \frac{2}{y_{n-1}}\right)$	Ordnung 1, nichtlinear; für $y_0 > 0$ Berechnung der Wurzel aus 2 (siehe Seite 4)

Die Indizes der Größen y können beliebig verschoben werden, d.h. es kann jede ganze Zahl zu den Indizes addiert werden. So stellen $y_n + 0{,}7 \cdot y_{n-1} = 5{,}2$ und $y_{n+2} + 0{,}7 \cdot y_{n+1} = 5{,}2$ die gleiche Differenzengleichung dar.

Anfangswertproblem für eine Differenzengleichung

Eine Differenzengleichung $y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_{n-m})$ ermöglicht die rekursive Berechnung der Glieder $\langle y_n \rangle$ der Lösungsfolge, wenn sogenannte **Anfangswerte** oder **Anfangsbedingungen** gegeben sind. Man spricht dann auch vom **Anfangswertproblem** für eine Differenzengleichung. Für eine Differenzengleichung 1. Ordnung ist häufig y_0 angegeben, es könnte jedoch auch y_1 oder y_4 sein. Eine Differenzengleichung 2. Ordnung erlaubt die rekursive Berechnung der Glieder $\langle y_n \rangle$, wenn etwa y_0 und y_1 oder auch y_0 und y_{-1} gegeben sind.

Im Folgenden soll nur die lineare Differenzengleichung 1. Ordnung $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$ mit konstanten Größen a und b genauer untersucht werden. Schon bei diesen sehr einfachen Differenzengleichungen zeigt sich ein stark unterschiedliches Lösungsverhalten. Dabei gibt eine besondere graphische Darstellung einer Differenzengleichung 1. Ordnung, der Web-Plot, eine gute Möglichkeit, sich über ihr Lösungsverhalten einen Überblick zu verschaffen. Anschließend wird auf die rechnerische Lösung eingegangen.

Web-Plot einer Differenzengleichung 1. Ordnung

Der **Web-Plot** oder **Cobweb** (cobweb, engl., Spinnengewebe) ist eine weitere Möglichkeit, die Lösung einer Differenzengleichung 1. Ordnung *graphisch* darzustellen. Damit sind besonders gut Aussagen über das Verhalten der Folgeglieder y_n für große n möglich, also über das **"Langzeitverhalten"**.

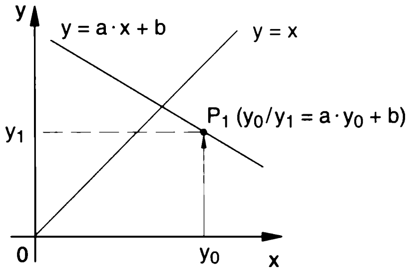


Abb. 2.8 a)

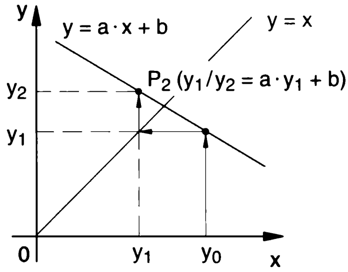


Abb. 2.8 b)

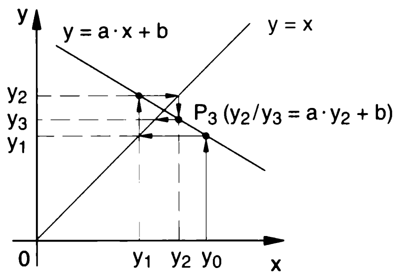


Abb. 2.8 c)

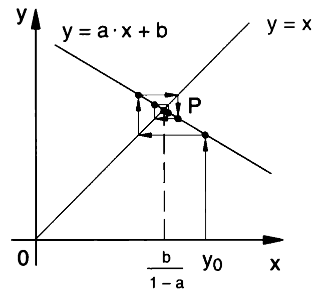


Abb. 2.8 d)

Für die Differenzengleichung $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$ werden in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Gerade $y = a \cdot x + b$ und zusätzlich die Hilfsgerade $y = x$ gezeichnet. Ist etwa $x = y_0$, so liest man y_1 auf der Geraden $y = a \cdot x + b$ ab. Die Hilfsgerade dient dazu, den Wert y_1 wieder auf die x-Achse zu spiegeln, sodass erneut das nächste Folgeglied y_2 auf der Geraden $y = a \cdot x + b$ abgelesen werden kann. Die Abbildungen 2.8 a) bis 2.8 d) zeigen diese Vorgangsweise.

Auf diese Weise fährt man fort und erhält eine Art "Spinnengewebe". In unserem Fall zieht sich die Punktfolge $P_1, P_2, P_3, \ldots$ auf den *Schnittpunkt* der beiden Geraden zusammen und die Folgeglieder y_n konvergieren gegen die Schnittstelle. Die Schnittstelle ist Lösung der Gleichung $a \cdot x + b = x$, was den Wert $b/(1 - a)$ ergibt.

Beispiel 2.3 : Web-Plot einer Differenzengleichung

Zeichne den Web-Plot der Differenzengleichung:

a) $y_n = -0{,}7 \cdot y_{n-1} + 5{,}1;$ $\quad y_0 = 4$

b) $y_n = -1{,}5 \cdot y_{n-1} + 5;$ $\quad y_0 = 2{,}2$

c) $y_n = -y_{n-1} + 4;$ $\quad y_0 = 3$

d) $y_n = 0{,}5\, y_{n-1} + 2;$ $\quad y_0 = 0{,}5$

e) $y_n = 2 \cdot y_{n-1} \cdot (1 - y_{n-1});$ $\quad y_0 = 0{,}25$ (eine logistische Differenzengleichung)

Lösung

a)

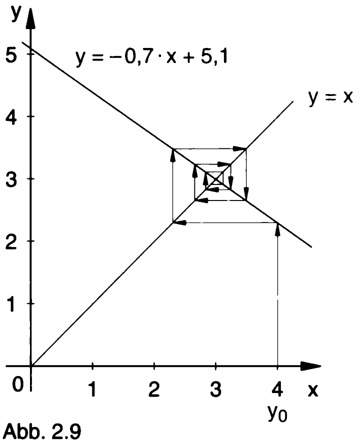


Abb. 2.9

b)

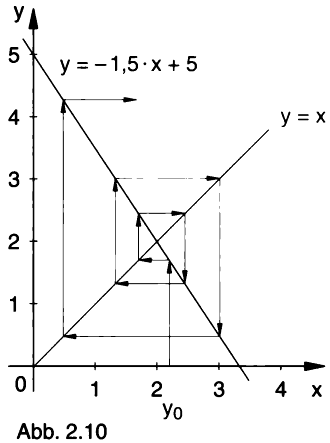


Abb. 2.10

Zu **a)** Gleichgültig, wo der Startpunkt y_0 liegt, ziehen sich die Folgeglieder oszillierend auf die Schnittstelle $\frac{b}{1-a} = \frac{5,1}{1+0,7} = 3$ zusammen.

Dies ist darin begründet, dass die Gerade $y = a \cdot x + b$ eine Steigung $a = -0,7$ besitzt, die betragsmäßig kleiner als 1 ist. Damit verläuft sie ausreichend flach.

Zu **b)** Diesmal entfernen sich die Folgeglieder von der Schnittstelle $\frac{b}{1-a} = \frac{5}{1+1,5} = 2$. Der Grund dafür ist, dass die Steigung a der Geraden $y = a \cdot x + b$ betragsmäßig größer als 1 ist und daher die Gerade zu steil ist.

c)

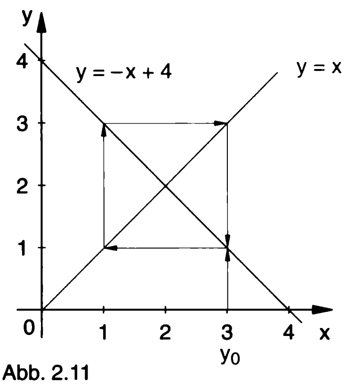


Abb. 2.11

d)

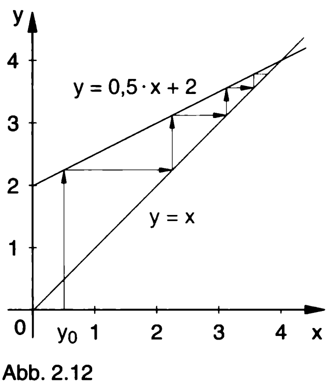


Abb. 2.12

Zu **c)** Der Web-Plot ist ein sich periodisch wiederholendes Rechteck, was für jeden Startwert y_0 zutrifft, der nicht gleich der Schnittstelle $\frac{b}{1-a} = \frac{4}{1+1} = 2$ ist. Dies kommt daher, weil die Steigung der Geraden $y = a \cdot x + b$ gleich $= -1$ ist.

Zu **d)** Die Folgeglieder bilden eine streng monoton wachsende Folge, die gegen die Schnittstelle $\frac{b}{1-a} = \frac{2}{1-0,5} = 4$ konvergiert. Dieses Verhalten ist durch die positive Steigung $a = 0,5$ begründet.

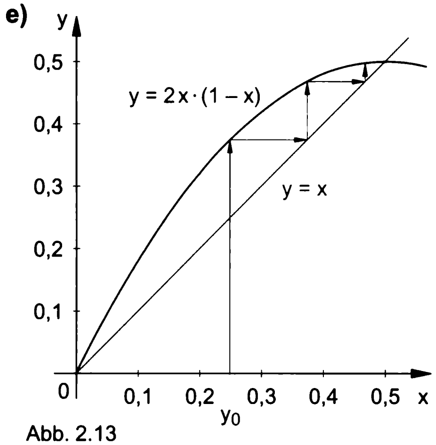


Abb. 2.13

Zu e)

Bei dieser nichtlinearen Differenzengleichung konvergieren die Folgeglieder für den gewählten Startwert $y_0 = 0{,}25$ auf die größere der *beiden* Schnittstellen der Parabel $y = 2x(1 - x)$ mit der Geraden $y = x$, also den Wert 0,5.

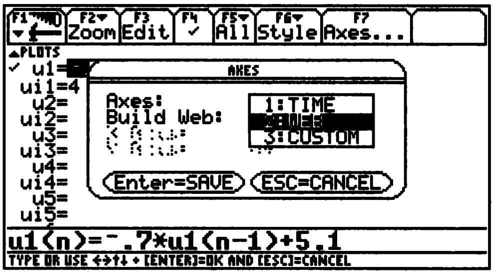
In den Beispielen 2.3 a) und d) konvergiert die Folge $\langle y_n \rangle$ für jeden Startwert — wie der Web-Plot nahelegt — gegen die Schnittstelle $\frac{b}{1-a}$ der Geraden $y = a \cdot x + b$ mit der Hilfsgeraden $y = x$. Eine solche Zahl heißt **stabiler Fixpunkt** (Gleichgewichtspunkt) der Differenzengleichung.

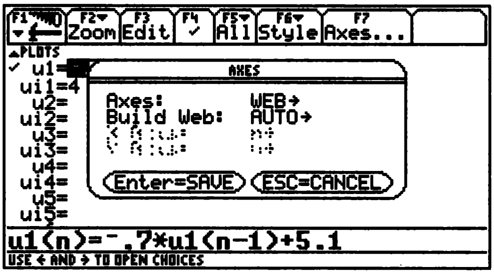
Besitzt eine lineare Differenzengleichung 1. Ordnung $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$ mit konstantem Koeffizienten a und konstantem Term b einen stabilen Fixpunkt, so konvergiert die Lösungsfolge (für jeden Startwert) gegen diesen Fixpunkt. Der Web-Plot macht verständlich, dass eine Differenzengleichung 1. Ordnung einen stabilen Fixpunkt $\frac{b}{1-a}$ besitzt, wenn $|a| < 1$ ist.

Beachte, dass nicht der Schnittpunkt zwischen den Geraden $y = a \cdot x + b$ und der Hilfsgeraden $y = x$ als Fixpunkt bezeichnet wird, sondern dessen x-Koordinate.

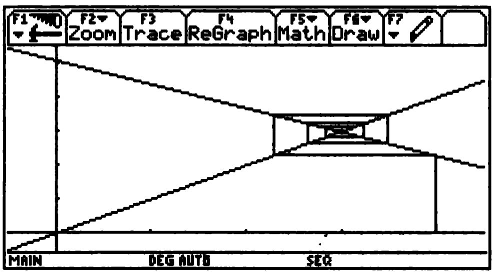
Für die Differenzengleichung des Beispiels 2.3 b) heißt der Wert $\frac{b}{1-a} = 2$ auch instabiler Fixpunkt, für die Differenzengleichung des Beispiels 2.3 c) der Wert $\frac{b}{1-a} = 2$ periodisch stabiler Fixpunkt.

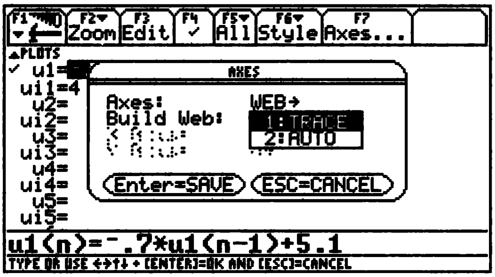
Voyage 200

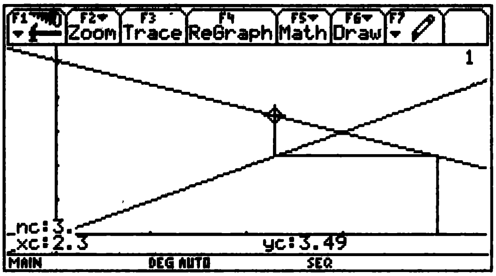




`Nach Eingabe der Folge u1(n) = -0.7*u1(n-1) + 5.1 und ui1 = 4 im y-Editor drückt man F7, Cursor nach rechts, 2 (2:WEB). Bei Build Web, drückt man den Cursor nach rechts, 2 (2:AUTO) und ENTER. Windows-Einstellungen: nmax = 6, wenn der Web Plot bis zum 6. Folgeglied gezeichnet werden soll (xmin = -1, xmax = 5, ymin = -1 und ymax = 6).`







`Aktiviert man bei Build Web 1:TRACE, so kann man im Graphikfenster nach Drücken von` **F3** `und durch Drücken des Cursors nach rechts den Web-Plot schrittweise aufbauen (bis nmax). Dabei werden n (= nc),` y_{nc} `(= yc) und` y_{nc-1} `(= xc) angegeben.`

Lösung der Differenzengleichung $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$, a und b konstant, mit dem Anfangswert y_0:

$y_1 = a \cdot y_0 + b$

$y_2 = a \cdot y_1 + b = a \cdot (a \cdot y_0 + b) + b = a^2 \cdot y_0 + a \cdot b + b$

$y_3 = a \cdot y_2 + b = a \cdot (a^2 \cdot y_0 + a \cdot b + b) + b = a^3 \cdot y_0 + a^2 \cdot b + a \cdot b + b$

$y_4 = a \cdot y_3 + b = a \cdot (a^3 \cdot y_0 + a^2 \cdot b + a \cdot b + b) + b = a^4 \cdot y_0 + a^3 \cdot b + a^2 \cdot b + a \cdot b + b$

usw.

Allgemein:

$y_n = a^n \cdot y_0 + a^{n-1} \cdot b + a^{n-2} \cdot b + \ldots + a^2 \cdot b + a \cdot b + b = a^n \cdot y_0 + b \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1)$

$a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1$ ist eine endliche geometrische Reihe mit der Summe $\frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$, sofern $a \neq 1$ ist.

Ist a = 1, so ist $a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1 = 1^{n-1} + 1^{n-2} + \ldots + 1^2 + 1 + 1 = n$

Damit lautet die Lösung

$y_n = a^n \cdot y_0 + b \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a} = \left(y_0 - \frac{b}{1 - a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1 - a}$ für $a \neq 1$ bzw.

$y_n = 1^n \cdot y_0 + b \cdot n = y_0 + b \cdot n$ für a = 1.

Lösung der Differenzengleichung $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$, a und b konstant, mit dem Anfangswert y_0:

$a \neq 1$: $y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1 - a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1 - a}$

$a = 1$: $y_n = y_0 + b \cdot n$ (n = 1, 2, 3, ...)

Beispiel 2.4 : Lösung von Differenzengleichungen aus den Beispielen 2.1 und 2.2

a) $y_n = 1{,}04 \cdot y_{n-1}$; $y_0 = 500$

b) $y_n = 1{,}04 \cdot y_{n-1} - 50$; $y_0 = 500$

c) $y_n = y_{n-1} - 50$; $y_0 = 500$

d) $y_n = -1{,}5 \cdot y_{n-1} + 5$; $y_0 = 2{,}2$

e) $y_n = -0{,}7 \cdot y_{n-1} + 5{,}1$; $y_0 = 4$

f) $y_n = -0{,}7 \cdot y_{n-1} + 3{,}4$; $y_0 = 2$

Lösung

Zu **a)** $a = 1{,}04 \neq 1$; $b = 0$; $y_0 = 500$

$$y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)\cdot a^n + \frac{b}{1-a} = \left(500 - \frac{0}{1-1{,}04}\right)\cdot 1{,}04^n + \frac{0}{1-1{,}04} = 500\cdot 1{,}04^n,$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, was in der Einkleidung des Beispiels 2.1 gerade die bekannte Zinseszinsformel ist.

Zu **b)** $a = 1{,}04 \neq 1$; $b = -50$; $y_0 = 500$:

$$y_n = \left(500 - \frac{-50}{1-1{,}04}\right)\cdot 1{,}04^n + \frac{-50}{1-1{,}04} = 1250 - 750\cdot 1{,}04^n \text{ für alle } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Zu **c)** $a = 1$; $b = -50$: $y_n = y_0 + b\cdot n = 500 - 50\,n$.

Zu **d)** $a = -1{,}5$; $b = 5$; $y_0 = 2{,}2$:

$$y_n = \left(2{,}2 - \frac{5}{1-(-1{,}5)}\right)\cdot(-1{,}5)^n + \frac{5}{1-(-1{,}5)} = 2 + 0{,}2\cdot(-1{,}5)^n \text{ für alle } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Die Terme $a^n = (-1{,}5)^n$ sind abwechselnd positiv und negativ, daher oszillieren die Glieder y_n um den Wert 2; weil $|a| = |-1{,}5| = 1{,}5 > 1$, werden diese Oszillationen um 2 immer größer und wachsen über alle Schranken.

Zu **e)** $a = -0{,}7$; $b = 5{,}1$; $y_0 = 4$:

$$y_n = \left(4 - \frac{5{,}1}{1-(-0{,}7)}\right)\cdot(-0{,}7)^n + \frac{5{,}1}{1-(-0{,}7)} = (-0{,}7)^n + 3 \text{ für alle } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Auch hier sind die Terme $a^n = (-0{,}7)^n$ abwechselnd positiv und negativ; daher oszillieren die Glieder y_n wieder und zwar um 3; weil $|a| = |-0{,}7| = 0{,}7 < 1$, gehen diese Oszillationen unbegrenzt gegen 0.

Zu **f)** $a = -0{,}7$; $b = 3{,}4$; $y_0 = 2$:

$$y_n = \left(2 - \frac{3{,}4}{1-(-0{,}7)}\right)\cdot(-0{,}7)^n + \frac{3{,}4}{1-(-0{,}7)} = 0\cdot(-0{,}7)^n + 2 = 2 \text{ für alle } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Ist $a \neq 1$, so kann aus $y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)\cdot a^n + \frac{b}{1-a}$ das Verhalten der Lösungsfolge abgelesen werden: Ist $y_0 - \frac{b}{1-a} = 0$, so ist $y_n = \frac{b}{1-a}$ und damit die Folge $\langle y_n\rangle$ konstant; andernfalls ist das Verhalten von a^n in der Lösungsformel entscheidend.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Lösungsfolge $\langle y_n\rangle$ also entweder streng monoton oder oszillierend oder konstant ist:

Lösungsverhalten der Differenzengleichung $y_n = a\cdot y_{n-1} + b$, a und b konstant:		
Kriterium 1:	$a \geqslant 0$	$\langle y_n\rangle$ ist streng monoton (oder konstant).
	$a < 0$	$\langle y_n\rangle$ ist oszillierend (oder konstant).
Kriterium 2:	$\lvert a\rvert > 1$	$\langle y_n\rangle$ ist unbeschränkt (oder konstant)
	$\lvert a\rvert < 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{b}{1-a}$
	$a = 1$	$\langle y_n\rangle$ ist eine arithmetische Folge.
	$a = -1$	$y_n = y_0$, wenn n gerade; $y_n = -y_0 + b$, wenn n ungerade.

Bei nichtlinearen Differenzengleichungen 1. Ordnung ist die Angabe einer geschlossenen Lösung im Allgemeinen nicht möglich.

Beispiel 2.5 : Diskretes logistisches Wachstum

Ein Nachricht breitet sich in einer Schule mit S = 1 000 Schülern, ausgehend von einem Schüler, aus. Als Modellannahme soll gelten, dass die *Zunahme* der informierten Schüler pro Zeitschritt 1 Schultag sowohl proportional zur Anzahl der *bereits* informierten Schüler als auch proportional zur Anzahl der noch *nicht* informierten Schüler ist. Der Proportionalitätsfaktor k wird mit 0,001 angenommen.

Wie viele Schüler sind nach 8 Tagen informiert? Wie lange braucht es, bis alle Schüler informiert sind?

Lösung

y_n ... Anzahl der nach n Tagen (Zeitschritten) informierten Schüler;

Modellannahme: $y_n - y_{n-1} = k \cdot y_{n-1} \cdot (S - y_{n-1}) = 0{,}001 \cdot y_{n-1} \cdot (1000 - y_{n-1})$ mit $y_0 = 1$.

Die Lösung erfolgt schrittweise (Rundung auf ganze Zahlen):

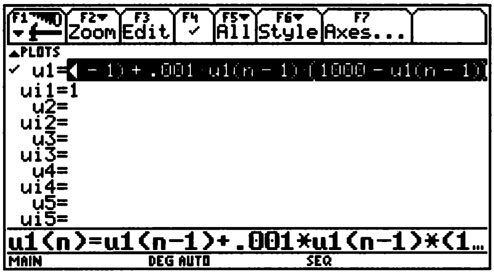
$\langle y_n \rangle = \langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, 62, 120, 226, 401, 641, 871, 983, 1000, \ldots \rangle$.

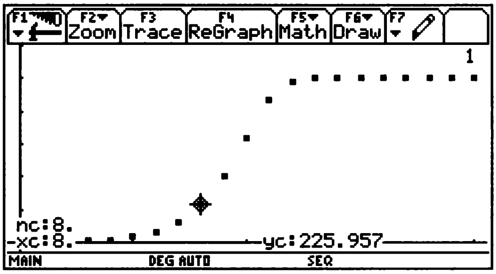
Nach 8 Tagen sind $y_8 = 226$ Schüler, nach 12 Tagen praktisch alle Schüler bei der gemachten Modellannahme informiert. Das Wachstum ist zuerst in guter Näherung exponentiell (Verdopplung pro Tag), wird aber immer mehr eingebremst.

Das hier beschriebene beschränkte Wachstum bis zu einer Sättigungsgrenze S wird als **diskretes logistisches Wachstum** bezeichnet.

Auch die Verbreitung von Waren wie Autos, Handys und dgl. in einem Land kann mit dem logistischen Wachstumsmodell untersucht werden. In "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 89, Aufgabe 4.15, wird eine zeitkontinuierliches Wachstum untersucht.

Voyage 200





Beispiel 2.6 : "Chaotisches" Verhalten

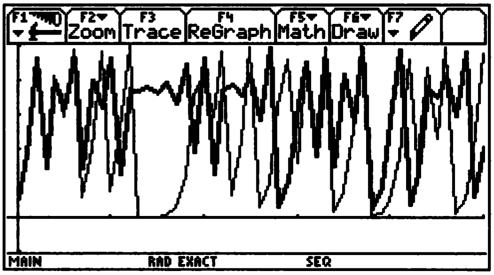
Gegeben ist eine logistische Differenzengleichung der Form $y_n = 4 \cdot y_{n-1} \cdot (1 - y_{n-1})$. Berechne die ersten 10 Glieder der Lösungsfolgen $\langle y_n \rangle$ für die Anfangswerte $y_0 = 0{,}1$ und $y_0 = 0{,}101$.

Lösung

Man könnte erwarten, dass sich der kleine Unterschied in den Anfangswerten nur wenig auf die Glieder der Lösungsfolge auswirkt ("kleine Ursachen, kleine Wirkungen"). Die Glieder der beiden Lösungsfolgen sollten daher knapp nebeneinander liegen:

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
0,100	0,3600	0,9216	0,2890	0,8219	0,5854	0,9708	0,1133	0,4020	0,9616
0,101	0,3632	0,9251	0,2770	0,8011	0,6373	0,9246	0,2788	0,8042	0,6298

Voyage 200



Die beiden Folgen verlaufen schon nach wenigen Schritten anscheinend unabhängig voneinander und weisen große Unterschiede auf!

Die Graphen der beiden Lösungsfolgen sind für die ersten 50 Glieder gezeichnet. Die Punkte sind, um eine deutlichere Darstellung zu erreichen, durch einen dünn bzw. dick gezeichneten Streckenzug verbunden.

Eine **empfindliche Abhängigkeit der Lösung von Anfangswerten** wie bei der Differenzengleichung in Beispiel 2.6 ist kein Einzelfall. Es bedeutet, dass sich minimale Veränderungen dramatisch auf die Lösung auswirken. Messfehler sowie Rundungsfehler, die in jedem Computer durch die begrenzte Stellenanzahl unvermeidlich sind, können unter diesen Umständen zu wertlosen Ergebnissen führen.

Dieser Effekt wird nach dem Meteorologen Edward LORENZ auch "Schmetterlingseffekt" genannt. LORENZ sprach diesen Mangel an Vorhersagbarkeit 1979 in einer Arbeit unter dem Titel "Löst das Flattern eines Schmetterlingsflügels in Brasilien einen Tornado in Texas aus?" Die Möglichkeit eines solchen Effektes stellt beispielsweise eine sichere Wettervorhersage über mehrere Tage grundsätzlich in Frage.

Eine empfindliche Abhängigkeit der Lösung von Anfangswerten ist ein Kennzeichen eines sogenannten **chaotischen** Verhaltens. Die "Chaostheorie" ist in den letzten Jahrzehnten zu einem wichtigen Zweig der Mathematik geworden.

Letztlich soll noch kurz eine Differenzengleichung höherer Ordnung als 1 besprochen werden, ohne näher auf Strategien für eventuell mögliche geschlossene Lösungen, d.h. auf eine Termdarstellung des allgemeinen Gliedes y_n einzugehen.

Beispiel 2.7 : Differenzengleichung 2. Ordnung

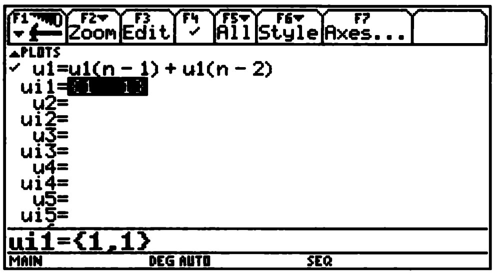
Gegeben ist die Differenzengleichung $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$ mit $y_0 = 1$ und $y_1 = 1$. Ermittle die ersten 6 Glieder der Lösungsfolge.

Lösung

Diese Differenzengleichung wird durch die FIBONACCI-Folge (siehe Beispiel 1.2 h), Seite 5) gelöst. Ihre Glieder werden rekursiv berechnet:

$y_2 = y_1 + y_0 = 1 + 1 = 2$
$y_3 = y_2 + y_1 = 2 + 1 = 3$
$y_4 = y_3 + y_2 = 3 + 2 = 5$
$y_5 = y_4 + y_3 = 5 + 3 = 8$
usw.

Voyage 200



Die Anfangswerte werden in geschwungenen Klammern, getrennt durch ein Komma, eingegeben.

Im Überblick: Differenzengleichungen

Differenzengleichung m-ter Ordnung: $y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_{n-m})$, $m \in \mathbb{N}^*$
Speziell: **Lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten** $a_1, a_2, \ldots, a_m$;
$$y_n + a_1 \cdot y_{n-1} + a_2 \cdot y_{n-2} + \ldots + a_m \cdot y_{n-m} = b(n);$$
ist $b(n) = 0$ für alle n, so heißt die lineare Differenzengleichung **homogen**, andernfalls **inhomogen**.
Anfangswertproblem für eine Differenzengleichung:
Lösung der Differenzengleichung $y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_{n-m})$, wenn m aufeinanderfolgende **Anfangswerte** (z.B. $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$) vorgegeben sind

Der **Web-Plot** einer Differenzengleichung 1. Ordnung ist eine graphische Möglichkeit, besonders das "Langzeitverhalten" ihrer Lösungsfolge zu beurteilen.

Die Zahl $b/(1 - a)$ heißt **stabiler Fixpunkt** (oder Gleichgewichtspunkt) der Differenzengleichung 1. Ordnung $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$, a und b konstant, wenn sie Grenzwert der Folge $\langle y_n \rangle$ ist.

Lösung der Differenzengleichung $y_n = a \cdot y_{n-1} + b$, a und b konstant, mit dem Anfangswert y_0:
$$a \neq 1: \; y_n = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$$
$$a = 1: \quad y_n = y_0 + b \cdot n \qquad\qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
Die Lösungsfolge $\langle y_n \rangle$ ist entweder streng monoton oder oszillierend oder konstant (siehe Seite 61).

Chaotisches Verhalten: Das mathematische System (Differenzengleichung) weist eine empfindliche Abhängigkeit von Anfangswerten auf.

Aufgaben

2.5 Zeichne den Web-Plot der Differenzengleichung $y_n = a \cdot y_{n-1} + 1$ mit $y_0 = \frac{1}{4}$ und gib an, ob sie einen stabilen Fixpunkt besitzt.

a) $a = \frac{1}{2}$ **b)** $a = \frac{5}{4}$ **c)** $a = 1$ **d)** $a = -\frac{1}{2}$ **e)** $a = -\frac{3}{2}$ **f)** $a = -1$

2.6 Zeichne den Web-Plot der Differenzengleichung und gib an, ob sie einen stabilen Fixpunkt besitzt.

a) $y_n = \frac{1}{2} \cdot y_{n-1} + \frac{1}{2}$; $y_0 = 2$ **b)** $y_n = 2 \cdot y_{n-1} - 2$; $y_0 = 2{,}5$
c) $y_n = -y_{n-1} + 3$; $y_0 = 2$ **d)** $y_n = y_{n-1} + 1$; $y_0 = 1$
e) $y_n = -\frac{1}{2} \cdot y_{n-1} + 3$; $y_0 = 3$ **f)** $y_n = -1{,}5 \cdot y_{n-1} + 3$; $y_0 = 2{,}5$

2.7 Berechne die Glieder $y_1, y_2, \ldots, y_6$ und zeichne den Web-Plot folgender logistischer Differenzengleichung $y_n = 2{,}8 \cdot y_{n-1}(1 - y_{n-1})$ bei $y_0 = 0{,}1$.

2.8 Ermittle die Lösung der Differenzengleichung $y_n = a \cdot y_{n-1} + 1$ mit $y_0 = \frac{1}{4}$, wenn:

a) $a = \frac{1}{2}$ **b)** $a = \frac{5}{4}$ **c)** $a = 1$ **d)** $a = -\frac{1}{2}$ **e)** $a = -\frac{3}{2}$ **f)** $a = -1$

2.9 Ermittle die Lösung der Differenzengleichung :

a) $y_n = \frac{1}{2}\cdot y_{n-1} + 2;\ y_0 = 8$ **b)** $y_n = -\frac{1}{2}\cdot y_{n-1} + 4{,}5;\ y_0 = 5$

c) $y_n = -\frac{3}{4}\cdot y_{n-1} + 3{,}5;\ y_0 = 1$ **d)** $y_n = \frac{3}{4}\cdot y_{n-1} + 0{,}25;\ y_0 = 1$

e) $y_n = \frac{3}{4}\cdot y_{n-1} + 0{,}25;\ y_0 = 4$ **f)** $y_n = y_{n-1} + 0{,}5;\ y_0 = 1{,}5$

g) $y_n = -y_{n-1} + 4;\ y_0 = 2$ **h)** $y_n = -y_{n-1} + 5;\ y_0 = 3$

i) $y_n = 1{,}1\cdot y_{n-1} + 1;\ y_0 = 0{,}5$ **j)** $y_n = -1{,}2\cdot y_{n-1} + 6{,}6;\ y_0 = 3{,}5$

2.10 Gegeben ist die logistischen Differenzengleichung $y_n = 2\cdot y_{n-1}\cdot(1 - y_{n-1})$. Berechne die ersten 10 Glieder der Lösungsfolgen für die Anfangswerte $y_0 = 0{,}1$ und $y_0 = 0{,}101$. Zeigt sich dabei eine empfindliche Abhängigkeit vom Anfangswert wie in Beispiel 2.6?

2.11 Gegeben ist eine logistische Differenzengleichung der Form $y_n = k\cdot y_{n-1}\cdot(1 - y_{n-1})$. Stelle die ersten 50 Glieder der Lösungsfolge $\langle y_n\rangle$ für den Anfangswert $y_0 = 0{,}1$ rechnergestützt graphisch dar, wenn

a) $k = 1{,}8$ **b)** $k = 2{,}9$ **c)** $k = 3{,}2$ **d)** $k= 3{,}5$ **e)** $k = 4$

2.12 Vergleiche rechnergestützt die Graphen der ersten 40 Glieder der Lösungsfolge der Differenzengleichung $y_n = k\cdot\cos(y_{n-1})$ für die Anfangswerte $y_0 = 0{,}5$ und $y_0 = 0{,}501$, wenn

a) $k = 1$ **b)** $k = 1{,}5$ **c)** $k = 3$ **d)** $k= 4$ **e)** $k = 5$

2.13 Berechne die Glieder $y_2, y_3, \ldots, y_6$ der Differenzengleichung mit $y_0 = 1$, $y_1 = 0$

a) $y_n = y_{n-1} - 0{,}2\cdot y_{n-2}$ **b)** $y = y_{n-1} - 0{,}9\cdot y_{n-2}$

2.14 Berechne die Glieder y_2, y_3, y_4, y_5 und y_6 der Differenzengleichung $y_n + 0{,}7\cdot y_{n-2} = 1$ mit $y_0 = 1$ und $y_1 = 1$.

2.15 Stelle die ersten 50 Glieder der Lösungsfolge von $y_n = 0{,}1\cdot y_{n-1} - 0{,}5\cdot y_{n-2} + \sin(100n)$ graphisch rechnergestützt dar, wenn $y_0 = 2$ und $y_1 = 0$.

2.16 Der Umsatz eines kleinen Unternehmens steigt von einem anfänglichen Jahresumsatz von € 50000 pro Jahr um (durchschnittlich) 3%. Stelle dazu eine Differenzengleichung auf und löse sie.

2.17 Zu Beginn eines Jahres wird einmalig ein Betrag von € 500,– bei einer jährlichen Verzinsung von i = 4% auf ein Sparkonto eingezahlt. Am Ende eines jeden Jahres wird € 20,– abgehoben. Beschreibe den Vorgang durch eine Differenzengleichung, löse sie und interpretiere das Ergebnis.

2.18 Jemand legt am Beginn jedes Jahres R = € 100 zu i = 5% auf ein Konto. Beschreibe den Vorgang durch eine Differenzengleichung! Löse sie und bestätige damit die Formel für den Endwert einer vorschüssigen Rente.

2.19 Ein Bauherr nimmt zu Beginn eines Jahres ein Darlehen von K_0 = € 100000 zu i = 6% auf, das er in gleichen Raten A immer am Ende eines Jahres, das erste Mal ein Jahr nach Aufnahme des Darlehens, zurückzahlen will.

a) Beschreibe den Rückzahlungsvorgang durch eine Differenzengleichung.

b) Löse die Differenzengleichung und berechne aus der Lösung die Höhe A der jährlichen Rate, wenn die Schuld nach 10 Jahren getilgt sein soll.

Hinweis: $y_{10} = 0$ ergibt eine Gleichung zur Berechnung von A.

2.3 Simulation des Systemverhaltens

Wir betrachten die folgenden Beispiele:

1. Aufbau eines Sparguthabens
   Eingangsgröße: Einzahlung zu Jahresbeginn
   Ausgangsgröße: Kontostand am Jahresende
2. Abkühlung oder Erwärmung eines Körpers
   Eingangsgröße: Zeitlich konstante Umgebungstemperatur
   Ausgangsgröße: Körpertemperatur
3. RC-Glied
   Eingangsgröße: Sinusförmige Spannung
   Ausgangsgröße: Spannung am Kondensator oder am Ohm'schen Widerstand

In allen drei Fällen liegt ein System mit einer Eingangsgröße $x(t)$ und einer Ausgangsgröße $y(t)$ vor. Lässt sich die Ausgangsgröße $y(t)$ eindeutig aus der Eingangsgröße $x(t)$ bestimmen, so heißt dieser Zusammenhang das **Übertragungsverhalten** des Systems.

Systeme mit nur *einer* Eingangs- und Ausgangsgröße sind der einfachste Fall. Im Allgemeinen gibt es mehrere Eingangs- und Ausgangsgrößen.

Diskrete Systeme

Betrachtet man die Eingangsgröße $x(t)$ und die Ausgangsgröße $y(t)$ nur an einzelnen, gleichabständigen Zeitpunkten, also zeitdiskret, so liegen die Eingangsgröße und Ausgangsgröße, sieht man von der physikalischen Einheit ab, als *Zahlenfolgen* vor: wir schreiben dann $\langle x_n \rangle$ und $\langle y_n \rangle$. Auch das System selbst bezeichnet man dann als **(zeit-)diskret**. In diesem Fall lässt sich das Übertragungsverhalten durch eine **Differenzengleichung** beschreiben. Diese stellt den Zusammenhang zwischen der Eingangsfolge $\langle x_n \rangle$ und der Ausgangsfolge $\langle y_n \rangle$ bei einem oder eventuell auch mehreren gegebenen Anfangswerten der Ausgangsfolge dar (Abb. 2.14).

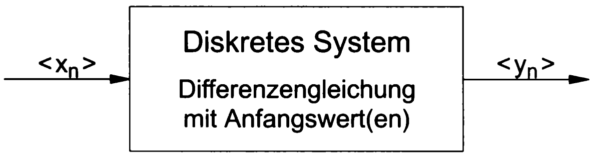


Abb. 2.14

Bei einer zeitkontinuierlichen Eingang- und Ausgangsgröße wird das Übertragungsverhalten durch eine sogenannte Differentialgleichung beschrieben. Näheres dazu in "Ingenieur-Mathematik 4".

Beispiel 2.8 : Aufbau eines Sparguthabens

Auf ein Sparkonto (Zinssatz 3%) werden viermal je € 1000 zu Jahresbeginn eingezahlt. Zwei Jahre nach der letzten Einzahlung wird das Guthaben behoben. Berechne seinen Wert!

Lösung

Eingangsfolge $\langle x_n \rangle$: Wir legen den Zeitpunkt der ersten Einzahlung auf $t = 0$ Jahre auf der Zeitachse fest. Dann erfolgt die nächste Einzahlung zum Zeitpunkt 1 Jahr, usw., die letzte zum Zeitpunkt n = 3 Jahre (siehe Abb. 2.15). Dann gilt für $n \geqslant 0$:

$\langle x_n \rangle =$ € $\langle 1000, 1000, 1000, 1000, 0, 0, \ldots \rangle$.

Ausgangsfolge $\langle y_n \rangle$: Die Folgeglieder sollen für n = 0, 1, 2, 3, 4 und 5 die Guthaben am Ende des n-ten Jahres bezeichnen.

Achtung!
Die sorgfältige Festlegung der Bedeutung der Folgeglieder ist wesentlich für die richtige Formulierung der Differenzengleichung!

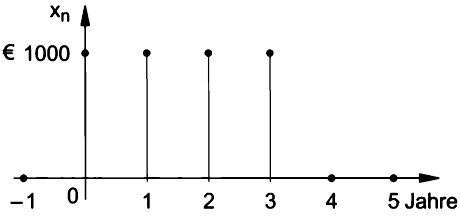


Abb. 2.15 Eingangsfolge $\langle x_n \rangle$

Dann ist der Zusammenhang zwischen der so festgelegten Eingangsfolge $\langle x_n \rangle$ und Ausgangsfolge $\langle y_n \rangle$ durch das Anfangswertproblem ($n \geqslant 1$):

$y_n = 1{,}03 \cdot (y_{n-1} + x_{n-1}), \quad y_0 = 0$

gegeben. Daraus:

$y_1 = 1{,}03 \cdot (y_0 + x_0) = 1030$
$y_2 = 1{,}03 \cdot (y_1 + x_1) = 2090{,}90$
$y_3 = 1{,}03 \cdot (y_2 + x_2) = 3183{,}63$
$y_4 = 1{,}03 \cdot (y_3 + x_3) = 4309{,}14$
$y_5 = 1{,}03 \cdot (y_4 + x_4) = 4438{,}41 \quad (x_4 = 0)$

Somit beträgt das Guthaben € 4438,41.

Die Entwicklung des Kontostandes bei unterschiedlichen Zinssätzen, der Einfluss der Umgebungstemperatur auf den Abkühlungsprozess oder das Verhalten der Lösungsfolge einer bestimmten Differenzengleichung bei unterschiedlichen Anfangswerten kann mit Hilfe von Computern (eventuell mit spezieller Simulationssoftware) oft rasch durchgerechnet werden. Dabei kann man nachsehen, wie sich solche Veränderungen quantitativ auswirken. Ein solches numerisches "Durchspielen" einer Systementwicklung bezeichnet man als Simulation. Im Folgenden ist das Grundschema der **Simulation** eines diskreten Systems angegeben:

1. Man denkt man sich die Zeitachse (Abb. 2.16) in Zeitschritte der Dauer Δt zerlegt, wodurch man die Zeitpunkte ..., −2, −1, 0, 1, 2, 3, ..., n − 1, n, ... erhält. In der Regel ist $t = 0$ der Anfangszeitpunkt. x_n und y_n sind die Glieder der Eingangs- bzw. Ausgangsfolge zum Zeitpunkt n.

   Die Dauer Δt der Zeitschritte ist entweder vorgegeben (z.B. Δt = 1 Jahr), wird durch technische Überlegungen nahegelegt oder muss — falls die Differenzengleichungen nur ein näherungsweises Berechnen der Ausgangsgröße gestattet — hinreichend klein gewählt werden.

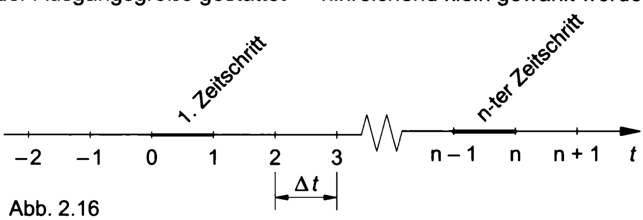


Abb. 2.16

2. Für die Ausgangsgröße y müssen ein Anfangswert y_0, eventuell auch davorliegende Anfangswerte, bekannt sein.
3. Aus der Differenzengleichung wird y_1 berechnet.
4. Danach ist $t = 1$ der "Anfangszeitpunkt" für den zweiten Simulationsschritt, die Berechnung von y_2. Dies wird solange fortgesetzt, bis der Endzeitpunkt der Simulation erreicht ist.

Beispiel 2.9 : Kontinuierlicher Zufluss

In eine anfänglich mit 10 *l* gefüllte Wassertonne fließen pro Minute 2 Liter Wasser. Führe eine diskrete Simulation dieses kontinuierlichen Vorgangs durch.

Lösung

Zeitschritt $\Delta t = 1$ min

Sind (Abb. 2.17) V_0, V_1, V_2, usw. die Füllmengen in Liter am Anfang, nach einem Zeitschritt $\Delta t = 1$ min, nach 2 Zeitschritten, usw., so gilt:

$V_1 = V_0 + 2$, $V_2 = V_1 + 2$, usw.

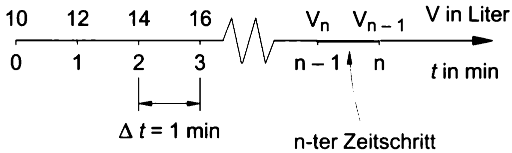


Abb. 2.17

Allgemein: $V_n = V_{n-1} + 2$.

Diese Differenzengleichung wird für $V_0 = 10$ gelöst durch $V_n = 10 + 2n$, eine arithmetische Folge.

Beispiel 2.10 : Abkühlprozess

Eine Tasse Kaffee von anfangs 90 °C kühlt kontinuierlich in einer Umgebung von 20 °C ab. Führe eine diskrete Simulation der Abkühlung durch.
Es ist verständlich, dass in einem Zeitschritt die Abkühlung umso stärker ausfällt, je höher dort die Temperatur des Kaffees über der Umgebungstemperatur von 20 °C liegt. Wir nehmen an, dass diese Abkühlung *proportional* zur Temperaturdifferenz auf 20 °C und zur Länge des Zeitschritts Δt ist. Berechne die Temperatur des Kaffees nach 20 Minuten für einen Proportionalitätsfaktor 0,2.

Lösung

Ist ϑ_{n-1} (siehe Abb. 2.18) die Temperatur am Anfang des n-ten Zeitschrittes und ϑ_n jene am Ende, so ist $\vartheta_{n-1} - \vartheta_n$ die Temperaturabnahme in diesem Zeitschritt. Dann soll gelten:

$\vartheta_{n-1} - \vartheta_n = c \cdot (\vartheta_{n-1} - 20) \cdot \Delta t$

mit c als Proportionalitätsfaktor.

Setzt man c = 0,2, so folgt

$\vartheta_n = a \cdot \vartheta_{n-1} + b \quad (*)$

mit $a = 1 - 0{,}2 \cdot \Delta t$, $b = 4 \cdot \Delta t$;

$\vartheta_0 = 90$ (in °C).

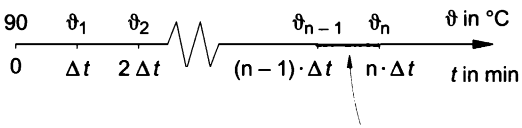


Abb. 2.18

Nimmt man für die Dauer Δt eines Zeitschrittes etwa 0,1 min an, so gilt:

$\vartheta_n = 0{,}98 \cdot \vartheta_{n-1} + 0{,}4$; $\vartheta_0 = 90$.

Der Zeitschritt Δt darf nicht zu groß sein, da die Temperatur auch in der Zeitdauer Δt fällt. Hier wird jedoch so gerechnet, als ob die Temperatur während der Dauer Δt konstant bleibt!

Für diese lineare Differenzengleichung 1. Ordnung mit a = 0,98 und b = 0,4 kann ϑ_n explizit angegeben werden (siehe Seite 59):

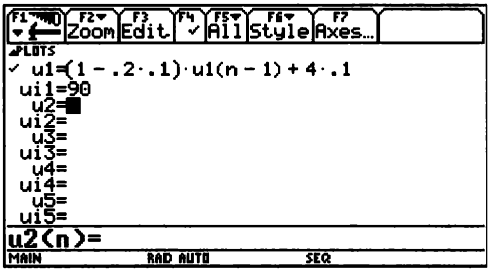
$$\vartheta_n = \left(90 - \frac{0{,}4}{1 - 0{,}98}\right) \cdot 0{,}98^n + \frac{0{,}4}{1 - 0{,}98} = 70 \cdot 0{,}98^n + 20 = 70 \cdot e^{-0{,}0202 \cdot n} + 20.$$

$t = 20$ min sind n = 20 : 0,1 = 200 Zeitschritte: $\vartheta_{200} = 21{,}23$ °C.

Nimmt man $\Delta t = 1$ min in Gleichung (*) an, so erhält man (n = 20): $\vartheta_{20} = 20{,}81$ °C.
Für $\Delta t = 0{,}01$ min erhält man (n = 2000): $\vartheta_{2000} = 21{,}28$ °C.

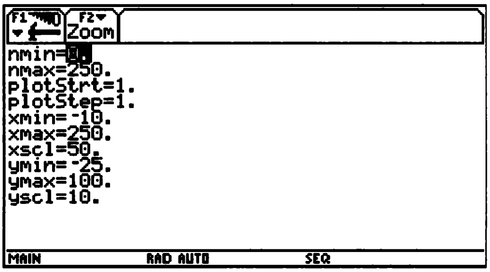
Lässt man Δt unbegrenzt gegen 0 gehen, so erhält man aus der Differenzengleichung eine "Differentialgleichung", die in "Ingenieur-Mathematik 4" gelöst wird. Ihr Ergebnis ist:
$\vartheta(t) = 20 + 70 \cdot e^{-0{,}2\,t}$, das Newtonsche Abkühlungsgesetz.
Setzt man hier $t = 20$ min, so erhält man die Temperatur 21,28 °C.

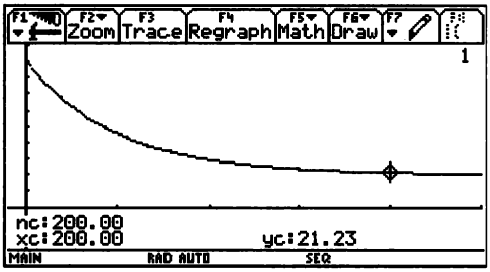
Voyage 200



Graphik-Modus: SEQUENCE. Als Zeichenstil wird im y-Editor *Dot* (Taste F6) gewählt. Dies deshalb, weil nur einzelne Punkte anfallen. Durch die große Anzahl von Punkten entsteht allerdings der Eindruck einer durchlaufenden Kurve.

Mit F3 kann der Graph abgetastet werden: $\vartheta_{200} = 21{,}23$ °C.

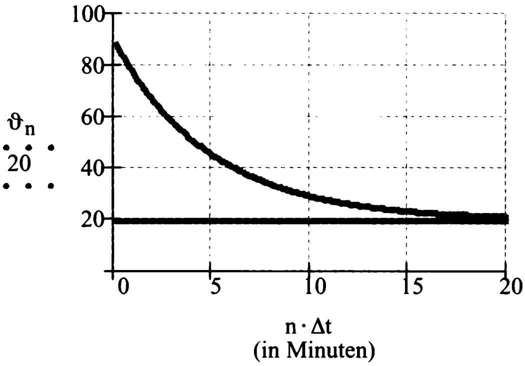




MC

Zeitschritt (in Minuten): $\Delta t := 0.1$ Ende der Berechnung (in Minuten): $t_0 := 20$
Nummern der Zeitschritte: $n := 1 .. \frac{t_0}{\Delta t}$ Proportionalitätsfaktor: $c := 0.2$
Differenzengleichung mit Anfangsbedingung: $\vartheta_0 := 90$ $\vartheta_n := (1 - c \cdot \Delta t) \cdot \vartheta_{n-1} + c \cdot \Delta t \cdot 20$
Zu beachten ist, dass die Anfangsbedingung *vor* der Differenzengleichung stehen muss!

Anmerkung: ϑ ist nicht auf der Griechisch-Palette enthalten. Man erhält dieses Zeichen durch Tippen von J, danach <Strg> G. Näheres siehe Mathcad Hilfe (<F1>), Registerblatt: Index, Griechische Buchstaben, Griechische Buchstaben einfügen.



$$k := 0..5 \qquad \vartheta_k = \begin{bmatrix} 90 \\ 88.6 \\ 87.23 \\ 85.88 \\ 84.57 \\ 83.27 \end{bmatrix}$$

Abb. 2.19

Als Format der Spur wurde "Punkte" (Stärke 2) gewählt. Dies deshalb, weil nur einzelne Punkte anfallen. Durch die große Anzahl dicht nebeneinander liegender Punkte entsteht aber fast eine durchlaufende Linie.

Temperatur in Grad Celsius am Berechnungsende t_0: $m := \frac{t_0}{\Delta t}$ $\vartheta_m = 21.23$

Auf Seite 355 wird Beispiel 2.10 mit Hilfe einer Tabellenkalkulation behandelt.

Beispiel 2.11 : Übertragungsverhalten eines *RC*-Gliedes

An einem *RC*-Glied (siehe Abb. 2.20) mit $R = 10\,\text{k}\Omega$ und $C = 50\,\mu\text{F}$ liegt eingangsseitig die Spannung u. Die Spannung am Kondensator werde mit u_C bezeichnet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ s wird der Schalter geschlossen. Der Kondensator ist anfänglich ungeladen, so dass die Anfangsbedingung $u_C(0) = 0$ V besteht.

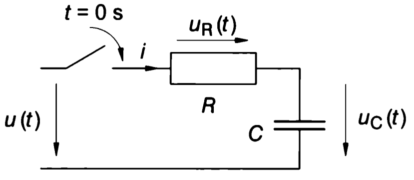


Abb. 2.20

Stelle eine Differenzengleichung für die Kondensatorgleichung $u(t)$ bei einer Zeitschrittlänge $t = 0{,}01$ s auf und bestimme daraus $u_C(t)$ zum Zeitpunkt 1 s, wenn (Spannung in V, Zeit in Sekunden)

a) $u(t) = 5$ (Aufladen eines Kondensators durch eine Gleichspannung)

b) $u(t) = 4 \cdot t$ (linearer Anstieg)

c) $u(t) = 26 \sin(3 \cdot t)$ **d)** $u(t) = 26 \sin(10 \cdot t)$

Lösung

Nach der 2. KIRCHHOFF'schen Regel (Maschenregel) ist die Summe der Spannungsabfälle am Widerstand und Kondensator gleich der äußeren Spannung:

$u_R + u_C = u$.

Vereinbarung: Um gegebenenfalls eine zusätzliche Indizierung in der Bezeichnung der Kondensatorspannung u_C zu vermeiden, wird nun uc statt u_C geschrieben.

Wir betrachten nun das *RC*-Glied beginnend mit $t = 0$ in kleinen Zeitschritten der Länge Δt (Abb. 2.21). Im n-ten Zeitschritt verändert sich die Ladung q des Kondensators von q_{n-1} auf q_n und die Kondensatorspannung von uc_{n-1} auf uc_n:

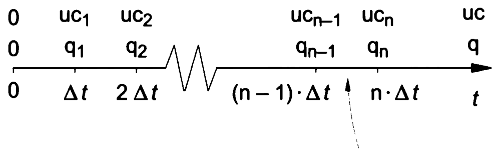


Abb. 2.21

$\Delta q = q_n - q_{n-1}$ und $\Delta uc = uc_n - uc_{n-1}$.

Da zwischen q und uc stets die Beziehung $q = C \cdot uc$ besteht, ist $\Delta q = C \cdot \Delta uc$.

Im n-ten Zeitschritt durchfließt die Ladungsmenge Δq den Leiterquerschnitt. Der Quotient ist daher näherungsweise die Stromstärke i in diesem Zeitschritt: $i \approx \frac{\Delta q}{\Delta t}$.

Für die Spannung u_R am Ohmschen Widerstand R gilt $u_R = R \cdot i$ und daher $u_R \approx R \cdot \frac{\Delta q}{\Delta t} = RC \cdot \frac{\Delta uc}{\Delta t} = \tau \cdot \frac{\Delta uc}{\Delta t}$. $\tau = RC$ ist die Zeitkonstante des *RC*-Glieds. Damit gilt:

$$\tau \cdot \frac{\Delta uc}{\Delta t} + uc = u \quad \text{oder} \quad \tau \cdot \frac{uc_n - uc_{n-1}}{\Delta t} + uc_{n-1} = u_{n-1} \quad \text{mit} \quad uc_0 = 0.$$

Wir haben uc durch uc_{n-1} und u durch u_{n-1} ersetzt, also durch die jeweiligen Werte am Anfang des n-ten Zeitschrittes. Es sind auch andere Vorgangsweisen möglich.

Wir formen noch um:

$$uc_n = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot uc_{n-1} + \frac{\Delta t}{\tau} \cdot u_{n-1} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{mit } u_0 = 0. \qquad (*)$$

Mit $\Delta t = 0{,}01$ und $\tau = R \cdot C = 0{,}5$ s erhält man:

$$uc_n = 0{,}98 \cdot uc_{n-1} + 0{,}02 \cdot u_{n-1} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{mit } uc0 = 0.$$

uc_n ist auch hier im Allgemeinen eine Näherung für $uc(t = n \cdot \Delta t)$; sie geht in den genauen Wert über, wenn Δt gegen null geht. Dies bedeutet den Übergang der Differenzengleichung in eine Differentialgleichung (siehe Beispiel 4.17, "Ingenieur-Mathematik 4", Seite 145). Dort finden sich auch die Herleitungen der genauen Lösungen zu a), b) und c).

Zu **a)**

Mit $\Delta t = 0{,}01$ s und $\tau = R \cdot C = 0{,}5$ s sowie $u_{n-1} = 5$ V folgt aus (*):

$uc_n = 0{,}98 \cdot uc_{n-1} + 0{,}1$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ mit $uc_0 = 0$.

Lösung für das allgemeine Glied (siehe Seite 59, u_n in V) :

$$uc_n = \left(0 - \frac{0{,}1}{1-0{,}98}\right) \cdot 0{,}98^n + \frac{0{,}1}{1-0{,}98} = 5 - 5 \cdot 0{,}98^n = 5 \cdot (1 - 0{,}98^n),\ \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Für $t = 1$ s $= n \cdot \Delta t$, ist $n = 100$. Daher: $uc_{100} = 5 \cdot (1 - 0{,}98^{100}) = 4{,}34$ V.

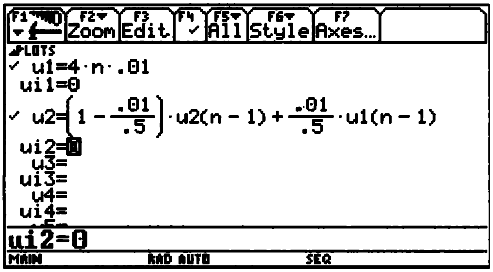
Zu **b)**

Mit $\Delta t = 0{,}01$ s und $\tau = R \cdot C = 0{,}5$ s sowie $u_{n-1} = 4\,(n-1) \cdot \Delta t$ folgt nun aus (*):

$uc_n = 0{,}98 \cdot u_{n-1} + 0{,}0008 \cdot (n-1)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ mit $uc_0 = 0$.

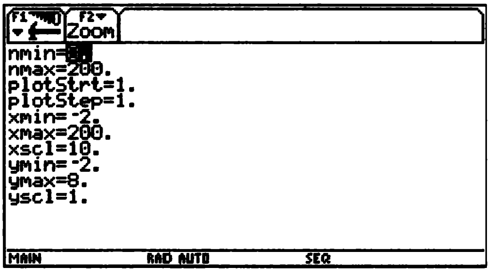
Schrittweise Lösung dieser Differenzengleichung ergibt die Folgeglieder (in V):

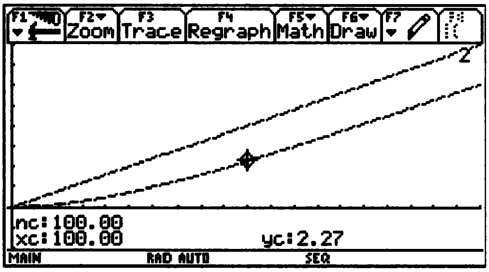
$uc_1 = 0$; $uc_2 = 0{,}0008$; $uc_3 = 0{,}0024$; $uc_4 = 0{,}0027$; $uc_5 = 0{,}0078$; usw.



u1 ist die Eingangsfolge, u2 die Folge der Kondensatorspannungen als Ausgangsfolge.

Nach Drücken von **F3** kann der Graph der Ausgangsfolge abgetastet werden: u200 = 2,27.

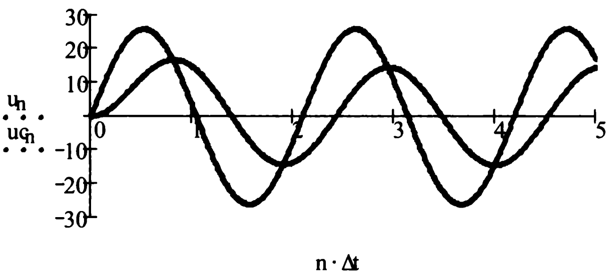




Zu **c)**

$\tau := 0.5 \cdot s$ $\qquad \Delta t := 0.01 \cdot s$ $\qquad n := 1 .. \frac{5 \cdot s}{\Delta t}$

$u_n := 26 \cdot V \cdot \sin(3 \cdot s^{-1} \cdot n \cdot \Delta t)$ $\qquad uc_0 := 0 \cdot V$ $\qquad uc_n := \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot uc_{n-1} + \frac{\Delta t}{\tau} \cdot u_{n-1}$



$i := 0 .. 4$

$u_i =$		$uc_i =$	
0	V	0	V
0.7799		0	
1.5591		0.0156	
2.3368		0.0465	
3.1125		0.0923	

Abb. 2.22

Kondensatorspannung uc nach 1 s: $\qquad k := \frac{1 \cdot s}{\Delta t}$ $\qquad uc_k = 14.78$ V

Es lässt sich zeigen, dass das Langzeitverhalten (theoretisch für $t \to \infty$) der Ausgangsfolge bei einer sinusförmigen Eingangsfolge wieder sinusförmig mit der gleichen Frequenz wie die Eingangsfolge verläuft.

Zu **d)**

Mit $\Delta t = 0{,}01$ und $\tau = R \cdot C = 0{,}5$ s sowie $u_{n-1} = 26 \cdot \sin[10 \cdot (n-1) \cdot \Delta t]$ folgt aus (*):
$uc_n = 0{,}98 \cdot uc_{n-1} + 0{,}52 \sin[(n-1) \cdot 0{,}1]$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ mit $uc_0 = 0$.
Schrittweise erhält man (in Volt):
$u_1 = 0$; $u_2 = 0{,}0156$; $u_3 = 0{,}0465$; $u_4 = 0{,}0923$; $u_5 = 0{,}1527$; usw.
Abb. 2.23 zeigt den Verlauf der Eingangsfolge $\langle u_n \rangle$ und Ausgangsfolge $\langle uc_n \rangle$.

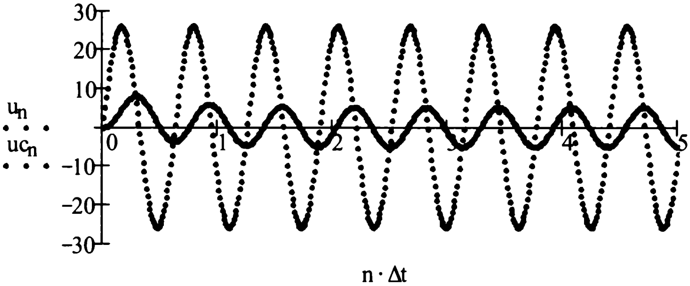


Abb. 2.23

Die Amplitude der Ausgangsfolge im Langzeitverhalten verringert sich umso mehr, je höher die Frequenz der Eingangsfolge ist. Das *RC*-Glied verhält sich wie ein "Filter", das bevorzugt sinusförmige Folgen mit tiefer Frequenz "passieren" lässt. Man spricht von einem *Tiefpass*.

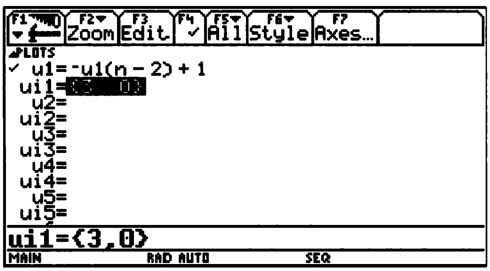
Beispiel 2.12 : Differenzengleichung 2. Ordnung

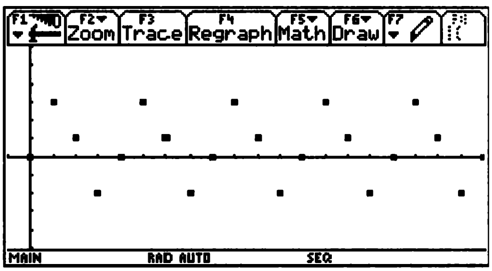
Ein diskretes System ist durch die Differenzengleichung $y_n = -y_{n-2} + x_n$ mit $y_0 = 0$ und $y_1 = 3$ gegeben. Bestimme seine Reaktion auf das "Signal" $x_n = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$!

Lösung

$y_2 = -y_0 + 1 = 1$
$y_3 = -y_1 + 1 = -3 + 1 = -2$
$y_4 = -y_2 + 1 = -1 + 1 = 0$
$y_5 = -y_3 + 1 = 2 + 1 = 3$
$y_6 = -y_4 + 1 = 0 + 1 = 1$
$y_7 = -y_5 + 1 = -3 + 1 = -2$
usw.

Die Werte wiederholen sich, die Lösungsfolge ist "periodisch".





Im Überblick: Simulation des Systemverhaltens

Übertragungsverhalten eines Systems: Zusammenhang zwischen Eingangsgröße $u(t)$ und Ausgangsgröße $y(t)$.

Diskretes System: Eingangsgröße und Ausgangsgröße sind zeitdiskret, also Folgen $\langle u_n \rangle$ und $\langle y_n \rangle$; das Übertragungsverhalten lässt sich durch eine **Differenzengleichung** mit Anfangswert(en) beschreiben.

Simulation: Numerisches "Durchspielen" einer Systementwicklung

Auch Systeme mit **zeitkontinuierlichen** Eingangs- und Ausgangsgrößen können **diskret simuliert** werden.

Aufgaben

2.20 Ein Bauherr nimmt zu Beginn eines Jahres ein Darlehen von € 100000 zu $i = 8\%$ auf. Die Rückzahlungen erfolgen in gleich bleibender Höhe von € 20000 immer am Ende eines Jahres, das erste Mal ein Jahr nach Aufnahme des Darlehens.

a) Berechne y_1, y_2 und y_3, das sind die Restschuldwerte am Ende des ersten, zweiten und dritten Jahres.

b) Beschreibe den Rückzahlungsvorgang durch eine Differenzengleichung. Kontrolliere sie durch schrittweise Berechnung von y_1, y_2 und y_3.

c) Wie lange werden Rückzahlungen in voller Höhe entrichtet?

d) Wie groß ist danach die Restschuld?

2.21 Ein diskretes System ist durch die Differenzengleichung $y_n = 0{,}5 \cdot y_{n-1} + x_{n-1}$, $y_0 = 0$ gegeben. Berechne seine Reaktion y_n ($n \geqslant 1$) auf die Eingangsfolge mit

a) $x_n = 1$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

b) $x_0 = 1$, $x_n = 0$ sonst.

2.22 Ein diskretes System ist durch $y_n = 0{,}9048 \cdot y_{n-1} + x_n - x_{n-1}$, $y_0 = 0$, gegeben. Zeige durch eine Simulation rechnergestützt, dass sich das System wie ein "Hochpass" (sinusförmige Eingangsfolgen mit niedrigeren Frequenzen werden stärker gedämpft als solche mit höheren Frequenzen) verhält, wenn

a) $x_n = \sin\left(\frac{0{,}1}{3} \cdot n\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

b) $x_n = \sin(0{,}1 \cdot n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

c) $x_n = \sin(3 \cdot 0{,}1 \cdot n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.23 Ein diskretes System ist durch die Differenzengleichung $y_n = -y_{n-2} + x_n$ mit $y_0 = 0$ und $y_1 = 5$ gegeben. Bestimme seine Reaktion auf das "Signal" $x_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$!

2.24 Ein diskretes System ist durch $y_n = y_{n-1} - \frac{1}{2} \cdot y_{n-2}$ mit $y_{-1} = 1$ und $y_{-2} = 2$ gegeben. Berechne die Glieder y_0 bis y_{10}.

2.25 Das folgende diskrete System gibt (im Allgemeinen näherungsweise) den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $x = x(t)$ und der t-Achse von 0 bis b aus, wenn man als Eingangsfolge die zwischen 0 und b abgetasteten Werte x an den Stellen $n \cdot \Delta t$, n = 0, 1, 2, 3, ..., nimmt. Berechne den Flächeninhalt, wenn $x(t) = t + 2$ und b = 1 für $\Delta t = 0{,}2$ und $\Delta t = 0{,}1$.

a) $y_n = y_{n-1} + \Delta t \cdot x_{n-1}$, $y_0 = 0$ (Abb. 2.24)

b) $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot (x_{n-1} + x_n)$, $y_0 = 0$

Bemerkung: In a) wird der Flächeninhalt nach der "Rechteckregel", in b) nach der "Trapezregel" berechnet.

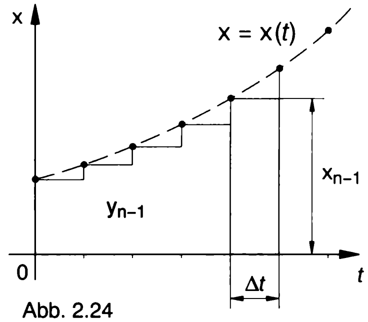


Abb. 2.24

2.26 Einer Salzlösung von einem Liter, die 4 dag reines Salz enthält, wird ein Liter reines Wasser beigemischt. Von der Mischung wird danach ein Liter abgegossen. In den Rest kommen 4 dag Salz, dem dann wieder ein Liter reines Wasser beigemischt wird. Von der Mischung wird wieder ein Liter abgegossen und dem Rest anschließend 4 dag Salz beigefügt. Dies wird oftmals wiederholt.

a) Berechne die Salzmassen y_1, y_2 und y_3 nach dem ersten, zweiten und dritten Abgießen.

b) Beschreibe den Vorgang durch eine Differenzengleichung.

c) Wird der Salzgehalt über alle Schranken wachsen oder einem Sättigungswert zustreben?

2.27 Ein Kondensator der Kapazität $C = 10\ \mu F$ wird über einen Ohm'schen Widerstand $R = 100\ k\Omega$ von 0 V auf $U_0 = 100$ V, beginnend mit $t = 0$ s, (Abb. 2.25) aufgeladen. Sind $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$, die Spannungswerte des Kondensators in Volt zu den Zeiten 0 s, Δt, $2 \cdot \Delta t$, $3 \cdot \Delta t$, ..., dann gilt näherungsweise für die Spannungszunahme am Kondensator im n-ten Zeitschritt: $u_n - u_{n-1} = k \cdot (U_0 - u_{n-1})$ mit $k = \frac{\Delta t}{RC}$, d.h. die Spannungszunahme in jedem Zeitschritt ist proportional zur Differenz der momentanen Spannung u_{n-1} am Anfang des Zeitschrittes auf die volle Spannung $U_0 = 100$ V. Löse die Differenzengleichung und berechne dadurch näherungsweise die Kondensatorspannung zur Zeit $\tau = RC$ (Zeitkonstante), wenn $\Delta t = 0{,}1$ s und $\Delta t = 0{,}001$ s.

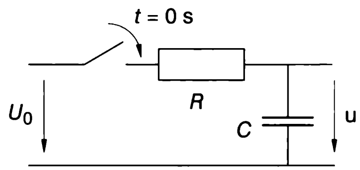


Abb. 2.25

2.28 Beschreibe den freien Fall *ohne* Luftwiderstand mit einer Anfangsgeschwindigkeit 0 m/s diskret mit Hilfe einer Differenzengleichung für die Fallgeschwindigkeit v. Löse die Gleichung allgemein und berechne für $\Delta t = 0{,}1$ s die Fallgeschwindigkeit nach 4 s und vergleiche mit der Fallgeschwindigkeit nach der Formel $v = g \cdot t$ ($g \approx 10\ m/s^2$).

Hinweis: $\frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t} = g$.

2.29 Ein Fallschirmspringer (Masse $m = 90$ kg mit Ausrüstung) springt mit dem Fallschirm ab. Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit nach 0,5 s?
Folgende Modellannahmen werden gemacht: Der Fallschirm ist ab $t = 0$ s (Absprungzeitpunkt) voll wirksam. Für den Luftwiderstand F_R gilt: $F_R = k \cdot v^2$ mit $k = 50\ Ns^2/m^2$, wobei v die momentane Fallgeschwindigkeit ist. Ferner wird $g \approx 10\ m/s^2$ gesetzt. Löse rechnergestützt für eine Zeitschrittdauer von $\Delta t = 0{,}01$ s und $\Delta t = 0{,}001$ s und vergleiche! *Hinweis*: Aus "Kraft ist Masse mal Beschleunigung" folgt:

$F_G - F_R = m \cdot \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t}$ oder weiter eingesetzt: $m \cdot g - k \cdot v_{n-1}^2 = m \cdot \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t}$.

3 Grenzwert einer Funktion – Stetigkeit

Die Begriffe „Grenzwert" und „Stetigkeit" einer Funktion sind grundlegend für den Aufbau der höheren Mathematik. Darüber hinaus werden physikalisch-technische Größen oft als Grenzwerte eingeführt (Beispiele sind die Geschwindigkeit oder die elektrische Stromstärke) und technische Sachverhalte durch stetige Funktionen beschrieben.

3.1 Grenzwert einer Funktion

Die folgenden Abbildungen zeigen Graphen, die sich bis auf jenen in Abb. 3.1 a, in gewisser Hinsicht "auffällig" verhalten.

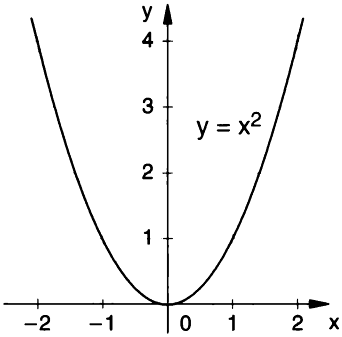


Abb. 3.1 a Stetig

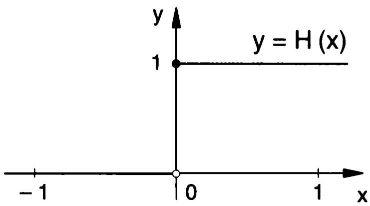


Abb. 3.1 b Sprungstelle

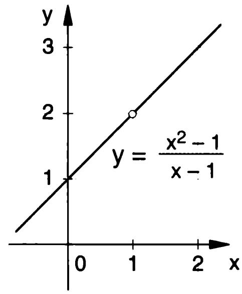


Abb. 3.1 c Lücke im Graphen

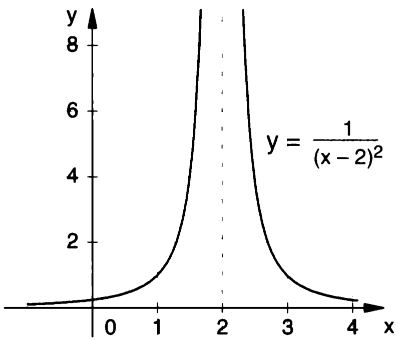


Abb. 3.1 d Polstelle

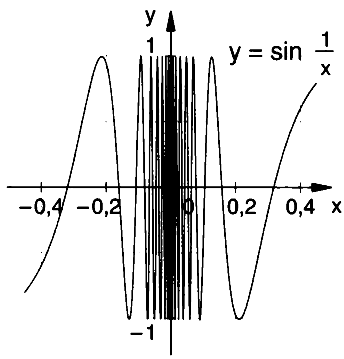


Abb. 3.1 e Oszillationsstelle

Zur Erinnerung: Punkte, die durch einen "leeren" Kreis gekennzeichnet sind, gehören nicht mehr zum Graphen; will man bei einem Punkt besonders darauf hinweisen, dass er noch zum Graphen gehört, so wird er durch einen "vollen" Kreis gekennzeichnet.

Abb. 3.1 a: Der Graph der Funktion $y = x^2$ kann ohne Absetzen gezeichnet werden. Die Funktion ist **stetig**.

Abb. 3.1 b: Hier handelt es sich um den Graphen der sogenannten *Heaviside*[7]*-Funktion* oder *(Einheits-)Sprungfunktion* H (x): $H(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0 \\ 1 \text{ für } x \geqslant 0 \end{cases}$.

An der Stelle $x_0 = 0$ liegt ein **endlicher Sprung** vor.

Die Heaviside-Funktion wird auch mit $\sigma(x)$, $\varepsilon(x)$ oder $u(x)$ bezeichnet.

7 Heaviside, Oliver (1850 – 1925), britischer Physiker und Elektroingenieur

Abb. 3.1 c: Für $x_0 = 1$ ist die Funktion nicht definiert. Man spricht von einer **Definitionslücke**. Dementsprechend hat auch der Funktionsgraph an x_0 eine **Lücke**.

Abb. 3.1 d: Bei Annäherung an die **Definitionslücke** $x_0 = 2$ wachsen die Funktionswerte über alle Schranken. Eine solche Definitionslücke heißt **Unendlichkeitsstelle** oder **Polstelle** der Funktion.

Die Funktionen in Abb. 3.1 c und 3.1 d sind Beispiele für **gebrochenrationale** Funktionen. Sie lassen sich in der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ darstellen, wobei p (x) und q (x) Polynome sind.

Abb. 3.1 e: Nähert man sich der **Definitionslücke** $x_0 = 0$, so oszilliert (schwingt) die Funktion beliebig oft zwischen -1 und 1. Man spricht von einer **Oszillationsstelle**.

Um eine Funktion in der Nähe einer "auffälligen" Stelle x_0 zu untersuchen, nähert man sich auf der x-Achse dieser Stelle x_0 unbegrenzt. Diese Annäherung kann erfolgen:

1) von links, in Zeichen: $\mathbf{x \to x_0-}$,
2) von rechts, in Zeichen: $\mathbf{x \to x_0+}$,
3) von beiden Seiten, in Zeichen: $\mathbf{x \to x_0}$.

Mathematisch bedeutet eine Annäherung "$x \to x_0$", dass x nacheinander die Werte *jeder beliebigen* gegen x_0 konvergierenden Folge $\langle x_n \rangle$ annehmen kann. Bei "$x \to x_0+$" wird zusätzlich verlangt, dass alle $x_n > x_0$, bei "$x \to x_0-$", dass alle $x_n < x_0$ sind. In allen Fällen wird die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ betrachtet.

Beispiel 3.1 : Grenzwert einer Funktion

Untersuche die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$, wenn

a) $f(x) = x^2$ für $x \to 2$ (Abb. 3.1 a)

b) $f(x) = H(x)$ für $x \to 0+$ und $x \to 0-$ (Abb. 3.1 b)

c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ für $x \to 1$ (Abb. 3.1 c)

d) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ für $x \to 2$ (Abb. 3.1 d)

e) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ für $x \to 0$ (Abb. 3.1 e)

Lösung

Zu **a)** Wir wählen etwa die Folge mit dem allgemeinen Glied $x_n = 2 - \frac{1}{n}$, mit der wir uns unbegrenzt der Stelle $x_0 = 2$ nähern. Einige Glieder der Folgen $\langle x_n \rangle$ und $\langle f(x_n) \rangle$ sind in der folgenden Wertetabelle zusammengestellt:

n	1	2	3	4	...	100	101	...	$\to \infty$
x_n	1	1,5	1,667	1,75	...	1,99	1,9901	...	$\to 2$
$y = x_n^2$	1	2,25	2,778	3,063	...	3,9601	3,9605	...	$\to 4$ (?)

Abb. 3.2 zeigt graphisch die ersten Glieder der Folge $\langle f(x_n) \rangle$, woraus ersichtlich wird, dass diese gegen 4 strebt. Dies lässt sich auch rechnerisch bestätigen:

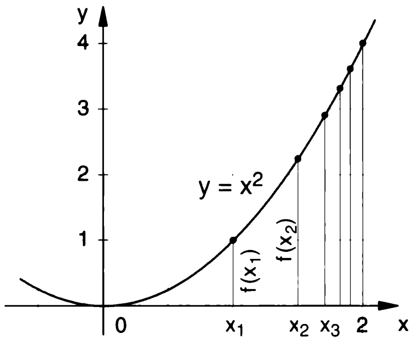


Abb. 3.2 Grenzwert für $x \to 2$

$f(x_n) = x_n^2 = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \to 2^2$ für $n \to \infty$.

Verwendet man irgendeine andere gegen 2 konvergierende Folge $\langle x_n \rangle$, so liest man aus Abb. 3.2 ab, dass die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ auch dann gegen denselben Grenzwert 4 konvergiert.

Wir brauchen daher nicht mehr auf eine spezielle Folge Bezug zu nehmen. Man schreibt kurz: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ und sagt: „Limes f (x) für x gegen 2 ist gleich 4." Das bedeutet: Der Grenzwert von f (x) an der Stelle 2 ist gleich 4.

Zu **b)** Für $x \to 0+$ wählen wir irgendeine von rechts gegen $x_0 = 0$ konvergierende Folge $\langle x_n \rangle$, also $x_n > 0$. Die zugehörige Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ ist in jedem Fall die konstante Folge $\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$; diese Folge ist konvergent mit dem Grenzwert 1.

Bei $x \to 0-$ ist für jede von links gegen 0 konvergierende Folge $\langle x_n \rangle$ die Folge der Funktionswerte gleich $\langle 0, 0, 0, \ldots \rangle$; diese Folge ist konvergent mit dem Grenzwert 0.

Man sagt nun, dass der *rechtsseitige* Grenzwert der Sprungfunktion $y = H(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ gleich 1 ist, während der *linksseitige* Grenzwert an dieser Stelle gleich 0 ist. Kurz schreibt man:

$\lim\limits_{x \to 0+} H(x) = 1$ für den rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$,

$\lim\limits_{x \to 0-} H(x) = 0$ für den linksseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$.

Da diese beiden einseitigen Grenzwerte unterschiedlich sind, kann nicht mehr allgemein vom Grenzwert der *Funktion* an der Stelle x_0 gesprochen werden. Dieser Grenzwert existiert nicht.

Zu **c)** Wir formen zuerst um: $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{(x-1)} = x + 1$.

Durchläuft nun x irgendeine gegen 1 konvergierende Folge $\langle x_n \rangle$, so gilt nun: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n + 1) = 2$. Daher kann man schreiben: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

Zu **d)** Wir wählen wie in a) etwa die Folge mit dem allgemeinen Glied $x_n = 2 - \frac{1}{n}$, die gegen $x_0 = 2$ konvergiert. Die zugehörige Folge $\langle f(x_n) \rangle$ hat dann das allgemeine Glied:

$f(x_n) = \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{n} - 2\right)^2} = n^2$; somit $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} n^2 = \infty$.

Aus Abb. 3.1 d ist ersichtlich, dass auch für *jede* andere gegen $x_0 = 2$ konvergierende Folge $\langle x_n \rangle$ die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ über alle Grenzen wächst. Dies veranlasst zur Schreibweise: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$.

Zu **e)** Hier kann man für die Annäherung $x \to 0$ Folgen $\langle x_n \rangle$ derart wählen, dass die zugehörigen Funktionsfolgen verschiedene Grenzwerte (etwa 0, 1 oder −1) haben oder überhaupt divergent sind.

Beispiele:

Für $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ist $\langle \sin x_n \rangle = \langle 0, 0, 0, \ldots \rangle$, für $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ist $\langle \sin x_n \rangle = \langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$.

Daher kann an der Stelle $x_0 = 0$ nicht mehr von einem Grenzwert der Funktion, auch nicht von einem rechts- oder linksseitigen Grenzwert gesprochen werden.

Grenzwert einer Funktion

a) Eine Funktion $y = f(x)$ ist in einem die Stelle x_0 enthaltenen offenen Intervall, nicht notwendigerweise an der Stelle x_0 selbst, definiert. Weiters kann dort $\langle x_n \rangle$ jede beliebige Folge sein, die gegen x_0 konvergiert ($x_n \neq x_0$).

Konvergieren *alle* Folgen $\langle f(x_n) \rangle$ der Funktionswerte gegen den gleichen Grenzwert g, so heißt g **Grenzwert der Funktion** $y = f(x)$ an der Stelle x_0. Man schreibt kurz:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ (gesprochen: Limes von f (x) ist gleich g für x gegen x_0).

b) Ist $\langle x_n \rangle$ eine beliebige *von rechts* nach x_0 konvergierende Folge und konvergiert dabei die Folge $\langle f(x_n) \rangle$ stets gegen den Grenzwert g_r, so heißt g_r **rechtsseitiger Grenzwert der Funktion** $y = f(x)$ an der Stelle x_0. Man schreibt dafür: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = g_r$.

Entsprechend definiert man den **linksseitigen Grenzwert der Funktion** g_l bei Annäherung von $\langle x_n \rangle$ *von links*. Man schreibt: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = g_l$.

c) Werden die Funktionswerte $f(x_n)$ für jede gegen x_0 konvergierende Folge $\langle x_n \rangle$ beliebig groß oder klein, so schreibt man kurz: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ bzw. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Man spricht nun von einem **uneigentlichen Grenzwert der Funktion**.

Entsprechendes gilt auch für den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0. In allen diesen Fällen heißt x_0 *Unendlichkeitsstelle* oder *Pol(stelle)* der Funktion.

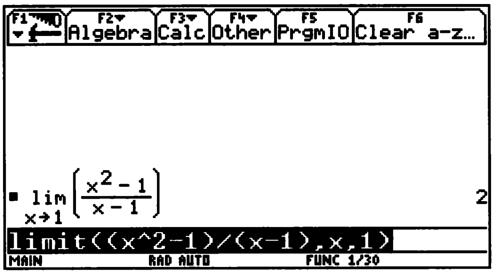
Anmerkungen:

(1) Die x-Werte nähern sich der Stelle x_0 unbegrenzt, ohne sie jedoch zu erreichen.

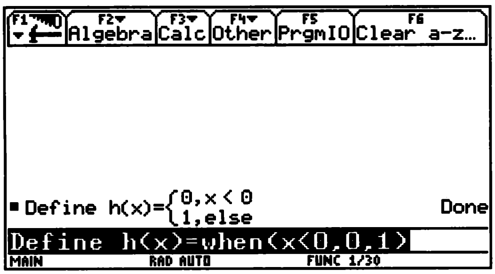
(2) Existieren der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert an der Stelle x_0 und stimmen sie überein, so existiert auch der Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0. Es gilt auch die Umkehrung.

(3) Für den rechtsseitigen Grenzwert von $y = f(x)$ an der Stelle x_0 schreibt man auch $f(x_0+)$, für den linksseitigen Grenzwert $f(x_0-)$.

Voyage 200

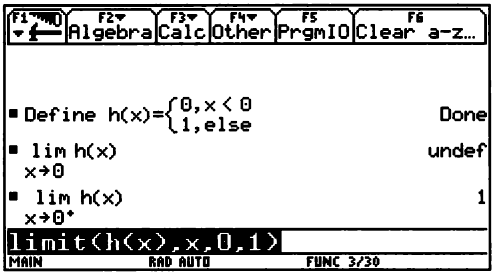


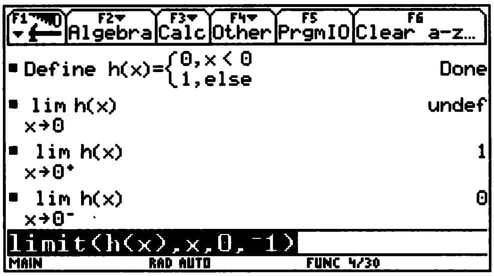
Zur Bestimmung eines Grenzwertes drückt man F3 3 (3:limit). Danach wird der Funktionsterm eingegeben, es folgen die Variable und die gewünschte Stelle.



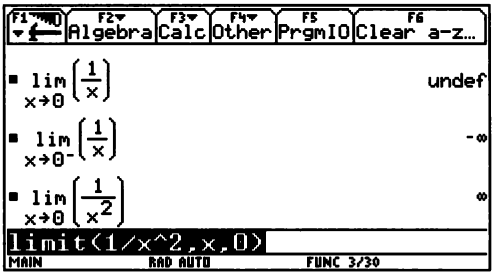
Nach Drücken von F4 1 (1:Define) definieren wir zuerst die Heaviside-Funktion. Dazu wird der when-Befehl verwendet: Ist x < 0, ist das Ergebnis 0, sonst 1.

Voyage 200





Bei einer Eingabe zur Ermittlung des Grenzwertes von y = H (x) an der Stelle $x_0 = 0$ wird *undef* ausgegeben. Wird jedoch in der limit-Anweisung nach dem Funktionsterm, der Variablen und der gewünschten Stelle noch 1 bzw. -1 eingegeben, so erhält man den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert.



Mit der limit-Anweisung können gegebenenfalls auch uneigentliche Grenzwerte ermittelt werden.

Anmerkung: limit() verwendet eine gewisse Anzahl von Verfahren zur Grenzwertbestimmung. Es kann daher vorkommen, dass ein vorhandener Grenzwert nicht bestimmt wird. Weiters sollte nicht die Einstellung APPROX gewählt werden, da Grenzwertberechnungen anfällig für Rundungsfehler sind!

Bei der Grenzwertbestimmung kommen eine Reihe von Methoden zur Anwendung. Es kann, wie in Beispiel 3.1 c) vorteilhaft sein, Funktionsterme zu kürzen oder zu erweitern. Hilfreich bei der Bestimmung von Grenzwerten können einige Sätze sein, die genau jenen für Folgen (Seite 39) entsprechen. Sie gelten auch für die einseitigen Grenzwerte und werden ohne Beweis angeführt.

Grenzwertsätze für Funktionen

Existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, dann gilt:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Begründe:

a) Für jede konstante Funktion $y = f(x) = c$ gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, x_0 beliebig.

b) Für die Funktion $y = x$ gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, x_0 beliebig.

Beispiel 3.2 : Grenzwertbestimmungen

Stelle fest, ob die Funktion an x_0 einen (eventuell auch einseitigen) Grenzwert besitzt.

a) $y = x + \frac{5x+1}{x+2}$, $x_0 = 1$ **b)** $y = \frac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$ (Definitionslücke)

c) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x-2}$, $x_0 = 2$ (Definitionslücke) **d)** $y = \frac{x^2 + x + 2}{x-2}$, $x_0 = 2$ (Definitionslücke)

e) $y = \frac{1}{1 + e^{-1/x}}$, $x_0 = 0$ (Definitionslücke) **f)** $y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$ (Definitionslücke)

Lösung

Zu **a)** $$\lim_{x\to 1}\left(x + \frac{5x+1}{x+2}\right) = \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} \frac{5x+1}{x+2} = 1 + \frac{\lim\limits_{x\to 1}(5x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)} = 1 + \frac{\lim\limits_{x\to 1} 5x + \lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 2} =$$
$$= 1 + \frac{\lim\limits_{x\to 1} 5 \cdot \lim\limits_{x\to 1} x + 1}{1+2} = 1 + \frac{5 \cdot 1 + 1}{3} = 3.$$

Hinweis: Da die Funktion $y = f(x) = x + \frac{5x+1}{x+2}$ an der Stelle $x_0 = 1$ *stetig* ist (siehe nächster Abschnitt), ist für $x_0 = 1$ der Grenzwert gleich dem Funktionswert, was die Grenzwertbestimmung wesentlich erleichtert: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 + \frac{5 \cdot 1 + 1}{1+2} = 3$.

Zu **b)** Wir versuchen die Grenzwertbestimmung zuerst mit Hilfe der Grenzwertsätze:

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} 1}{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)};$$

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = \lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 2 = 2 - 2 = 0$. Da der Grenzwert im Nenner null ist, ist die Anwendung des 3. Grenzwertsatzes unzulässig!

Wir argumentieren nun "direkt": Für $x \to 2+$ ist der Bruch positiv und wächst über alle Schranken: $\lim\limits_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = \infty$.

Für $x \to 2-$ ist der Bruch negativ und nimmt beliebig kleine Werte an: $\lim\limits_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

Abb. 3.3 zeigt den Graphen der Funktion.

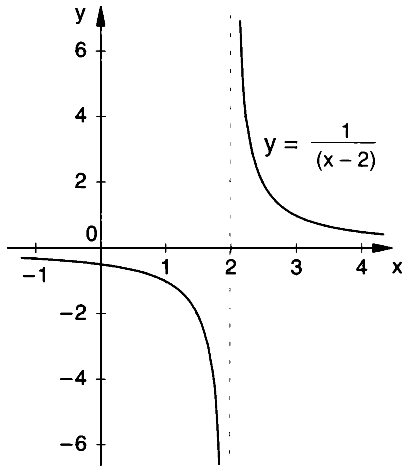


Abb. 3.3

Zu **c)** Division des Zählerpolynoms durch das Nennerpolynom (siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 84 f.) ergibt:

$$\begin{array}{l} (x^2 - x - 2) : (x - 2) = x + 1 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ \phantom{-x^2 +{}} x - 2 \\ \phantom{-x^2 +{}} \underline{-x + 2} \\ \phantom{-x^2 +{}} 0 \quad 0 \end{array}$$

Die Division geht auf. Wir können daher schreiben:

$y = \frac{x^2 - x - 2}{x-2} = x + 1$ für $x \neq 2$.

Wir haben nun einfacher zu untersuchen, ob $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)$ existiert.

$\lim\limits_{x\to 2}(x+1) = \lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 1 = 2 + 1 = 3$. Also: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x-2} = 3$.

An der Stelle $x_0 = 2$ hat der Graph eine Lücke. Diese kann durch die zusätzliche Definition $f(2) = 3$ *stetig geschlossen* werden! Abb. 3.4 zeigt den Funktionsgraphen.

Zähler und Nenner werden für $x_0 = 2$ zugleich null, wie man durch Einsetzen sofort bestätigt. Der Bruch wird in diesem Fall ein sogenannter *unbestimmter Ausdruck* der Form $\frac{0}{0}$. Beim Auftreten eines solchen Ausdrucks kann allerdings nicht allgemein auf eine Lücke geschlossen werden (Beispiel: $y = \frac{x-2}{(x-2)^2}$ für $x_0 = 2$)! Eine weitere Untersuchung ist notwendig.

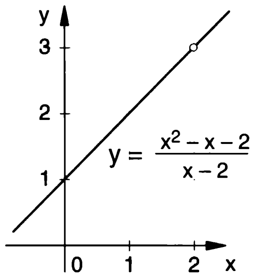


Abb. 3.4 Lücke im Graphen an der Stelle $x_0 = 2$

Zu d) Division des Zählerpolynoms durch das Nennerpolynom ergibt:

$$\begin{array}{l} (x^2 + x + 2) : (x - 2) = x + 3 \\ \underline{\ x^2 \mp 2x\ } \\ 3x + 2 \\ \underline{3x \mp 6} \\ 08 \end{array}$$

Die Division geht *nicht* auf. Wir können schreiben:

$y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 2} = x + 3 + \frac{8}{x - 2}$ für $x \neq 2$.

$x_0 = 2$ ist nun *Polstelle*!

Für $x \to 2+$ ist $\lim\limits_{x \to 2+} \left(x + 3 + \frac{8}{x - 2}\right) = \infty$.

Begründung: Der stets positive Term $\frac{8}{x-2}$ (positiv, weil $x - 2 > 0$) wächst über alle Grenzen. Entsprechend begründet man, dass

$\lim\limits_{x \to 2-} \left(x + 3 + \frac{8}{x - 2}\right) = -\infty$ ist.

Abb. 3.5 zeigt den Graphen der Funktion.

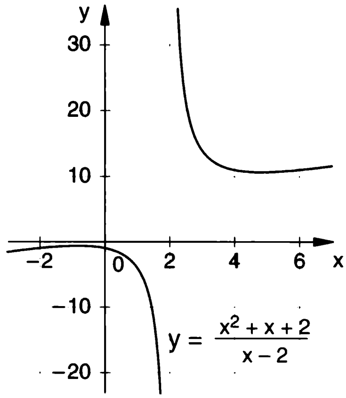


Abb. 3.5 Polstelle $x_0 = 2$

Zu e) Aus dem Graphen (Abb. 3.6) liest man ab, dass für $x_0 = 0$ der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert existieren, diese jedoch ungleich sind:

$\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{1 + e^{-1/x}} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{1 + e^{-1/x}} = 0$.

Da diese beiden Grenzwerte ungleich sind, existiert der Grenzwert der Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht.

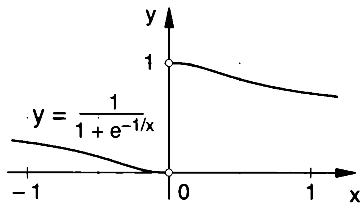


Abb. 3.6 Ungleiche einseitige Grenzwerte an der Stelle $x_0 = 0$

Zu f) Der Funktionsgraph oszilliert zwischen den beiden Geraden $y = x$ und $y = -x$. Zum Unterschied von der in Abb. 3.1 e dargestellten Funktion $y = \sin \frac{1}{x}$ gibt es nun einen Grenzwert an der Stelle $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

Begründung: $\sin \frac{1}{x}$ kann nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen.

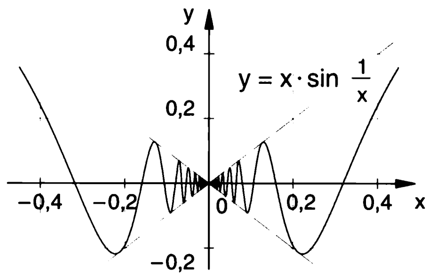


Abb. 3.7 Gleiche einseitige Grenzwerte

Für $x \to 0$ geht daher das Produkt $x \cdot \sin \frac{1}{x}$ gegen null. Auch hier kann, wie in c), die Definitionslücke durch $f(0) = 0$ stetig geschlossen werden.

Aufgaben

3.1 Berechne mit Hilfe der Grenzwertsätze:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} x^2$ **c)** $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2 - 4x}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{2} - 1\right)$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - 4x^2}{x + 1}$ **g)** $\lim\limits_{x \to -2} (1 - x)^3$ **h)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(-x + x^2 - \frac{2}{x + 1}\right)$

3.2 Die folgende gebrochenrationale Funktion besitzt eine Definitionslücke. Stelle fest, von welcher Art (Stelle mit Lücke im Funktionsgraphen oder Polstelle) die Definitionslücke ist. Gib dort auch, wenn vorhanden, den Grenzwert bzw. die einseitigen Grenzwerte an.

a) $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{x}{x}$ **c)** $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ **d)** $y = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$

e) $y = \frac{x - 1}{x}$ **f)** $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ **g)** $y = \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x - 3}$ **h)** $y = \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x - 1}$

i) $y = \frac{x^2 - 2x}{x}$ **j)** $y = \frac{(2 + x)^2 - 4}{x}$ **k)** $y = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$ **l)** $y = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

3.3 Die folgende Funktion besitzt eine Definitionslücke. Stelle an Hand einer Skizze des Funktionsgraphen fest, von welcher Art die Definitionslücke (Lücke im Funktionsgraphen, Sprungstelle, Polstelle) ist. Gib dort auch, wenn vorhanden, den Grenzwert bzw. die einseitigen Grenzwerte an.

a) $y = \frac{|x|}{x}$ **b)** $y = \frac{1 - x}{1 - |x|}$ **c)** $y = \frac{x \cdot |x - 1|}{x - 1}$ **d)** $y = e^{1/x}$

e) $y = e^{-1/x^2}$ **f)** $y = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$ **g)** $y = \frac{1}{1 + 2^{-1/x}}$ **h)** $y = \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}$

i) $y = \frac{\sin x}{x}$ **j)** $y = \frac{\cos x}{x}$ **k)** $y = \arctan \frac{1}{1 - x}$ **l)** $y = \cos \frac{1}{x}$

3.4 Bestimme den Grenzwert nach geeigneter Umformung des Funktionsterms:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^3 - x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x - 2}{2x^2 - 8}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

e) $\lim\limits_{x \to 3+} \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$ **g)** $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{(x + 1)^2}{x^2 - 1}$ **h)** $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

i) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$ **j)** $\lim\limits_{x \to 3+} \frac{4 - x}{x^2 - 7x + 12}$ **k)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x}}$ **l)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + 2 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

m) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ **n)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$ **o)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{\sin x}$ **p)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin x}$

3.5 Gib folgenden Grenzwert an:

a) $\lim\limits_{x \to 3-} \sqrt{3 - x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x$ **d)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} \tan x$

e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1+} \left(1 + \frac{1}{x - 1}\right)$ **g)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$

3.6 Die Vorzeichenfunktion (Signum-Funktion) lautet: $y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

(sprich: y = signum von x, siehe “Ingenieur-Mathematik 1”, Seite 191). Zeichne die folgende Funktion und gib die beiden einseitigen Grenzwerte an der Stelle $x_0 = 0$ an:

a) $y = \operatorname{sgn}(x)$ **b)** $y = \operatorname{sgn} x^2$ **c)** $\operatorname{sgn}(x - 1)^2$

3.2 Stetigkeit von Funktionen

"Stetig" heißt im gewöhnlichen Sprachgebrauch "nicht sprunghaft". Auch mathematische Funktionen werden stetig genannt, wenn es zu keinen "plötzlichen" Veränderungen der Funktionswerte kommt. Genauer wird definiert:

> Eine in einem offenen Intervall um x_0 definierte Funktion $y = f(x)$ heißt **an der Stelle x_0 stetig**, wenn
> 1. der Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0 existiert *und*
> 2. dieser Grenzwert mit dem Funktionswert übereinstimmt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
>
> Trifft auch nur eine der beiden Bedingungen nicht zu, so heißt die Funktion an x_0 **unstetig**.
>
> Ist die Funktion an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig, so wird sie als **stetige Funktion** bezeichnet.

Anmerkungen:

(1) Auch an einer Unstetigkeitsstelle besitzt die Funktion $y = f(x)$ definitionsgemäß einen Funktionswert $f(x_0)$. Öfters werden jedoch auch Definitionslücken als Unstetigkeitsstellen bezeichnet.

(2) Existiert an einer Definitionslücke x_0 der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$, so kann die Funktion durch die zusätzliche Definition $f(x_0) = c$ **stetig fortgesetzt** werden. Man sagt auch, dass die Lücke x_0 *stetig geschlossen* wird (siehe Beispiele 3.2 c und f sowie 3.3 c).

(3) Zwei anschauliche Deutungen der Stetigkeit lauten: Liegt x nahe bei x_0, so liegt auch $f(x)$ nahe bei $f(x_0)$, d.h. es gibt um x_0 keine sprunghaften Veränderungen der Funktionswerte.

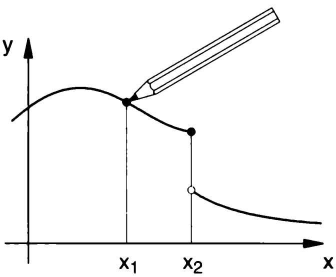


Abb. 3.8 Stetig in x_1, unstetig in x_2

Oder (nicht in jedem Fall ganz korrekt): Den Graphen einer in einem Intervall definierten stetigen Funktion kann man "ohne Absetzen" zeichnen. Abb. 3.8 zeigt den Graphen einer Funktion, die in x_1 stetig und in x_2 unstetig ist.

Beispiel 3.3 : Stetigkeit einer Funktion

Untersuche folgende Funktionen auf Stetigkeit:

a) $y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ (Abb. 3.1 a)

b) $y = H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geqslant 0 \end{cases}$ Heaviside-Funktion (Abb. 3.1 b)

c) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$ (Abb. 3.1 c)

d) $y = |x - 1|, \quad x \in \mathbb{R}$

Lösung

Zu **a)** Für jede Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$ und damit gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ ist. Die Funktion ist somit stetig.

Zu **b)** An der Stelle $x_0 = 0$ existieren zwar die einseitigen Grenzwerte, nicht jedoch allgemein der Grenzwert der Funktion. Daher ist die Funktion an dieser Stelle unstetig. An allen anderen Stellen ist sie stetig.

Zu **c)** Definiert man $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$, so lässt sich die Funktion an der Definitionslücke $x_0 = 1$ *stetig fortsetzen*.

Zu **d)** Zum leichteren Zeichnen des Graphen (Abb. 3.9) kann man die Funktion wie folgt schreiben:

$$y = \begin{cases} x - 1 & \text{für } x - 1 \geqslant 0 \text{ oder } x \geqslant 1 \\ -x + 1 & \text{für } x - 1 < 0 \text{ oder } x < 1 \end{cases}.$$

An der Stelle $x_0 = 1$ hat der Graph eine Spitze. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass dort der Grenzwert existiert und gleich dem Funktionswert ist. Die Funktion ist also dort stetig (wie an allen anderen Stellen).

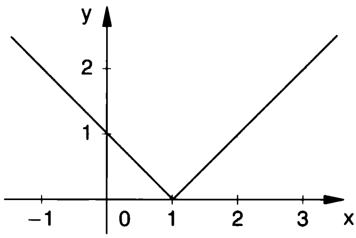


Abb. 3.9 Graph von $y = |x - 1|$

Die elementaren Funktionen sind zumeist stetig. Dazu zählen die linearen und quadratischen Funktionen, allgemein die Polynomfunktionen, die rationalen Funktionen (stetig an allen Stellen, für die nicht ein Nenner null ist), die Exponential- und Kreisfunktionen usw. Auch Summe, Produkt, Kehrwert und Verkettung (Hintereinanderausführung) von stetigen Funktionen führen wieder auf stetige Funktionen.

Stetige Funktionen besitzen eine Reihe von bemerkenswerten Eigenschaften. So sagt der sogenannte *Zwischenwertsatz* aus, dass eine in [a,b] stetige Funktion jeden Wert zwischen f (a) und f (b) annimmt. Dieser wird bei vielen praktischen Problemen, wie dem Lösen von Gleichungen, häufig unbewusst vorausgesetzt.

Beispiel: Lösung der Gleichung $f(x) = 2 - x \cdot \ln x = 0$.

Da $f(1) = 2 - 1 \cdot \ln 1 = 2 > 0$ und $f(e) = 2 - e \cdot \ln e = 2 - e \approx -0{,}718 < 0$ ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz sicher ein x zwischen 1 und e, für das $f(x) = 0$ ist. Durch gezieltes Probieren kann man die Lösung weiter eingrenzen und dadurch in jeder gewünschten Genauigkeit bestimmen.

Beispiel 3.4 : Stetigkeit von Funktionen

a) Lies aus dem Graphen der Funktion $y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leqslant 2 \\ 0{,}5 \cdot x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ etwaige Unstetigkeitsstellen ab.

b) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{für } x \leqslant 1 \\ -2x + c & \text{für } x > 1 \end{cases}$, wobei c eine Konstante ist.

Bestimme c derart, dass die Funktion an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.

Lösung

Zu **a)** Der Graph setzt sich abschnittsweise aus Geradenstücken zusammen, wie in Abb. 3.10 gezeigt. Eine Unstetigkeit kann nur an der Übergangsstelle auftreten, da die Geradenstücke Graphen von stetigen Funktionen sind.

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 1.$

An $x_0 = 2$ liegt eine Sprungstelle vor, weshalb die Funktion an dieser Stelle unstetig ist.

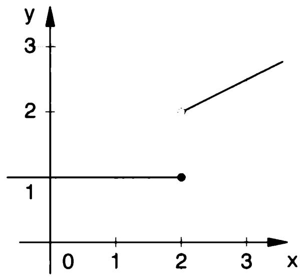


Abb. 3.10 Unstetig an $x_0 = 2$

Zu **b)** Stetigkeit bedeutet, dass der Funktionsgraph ohne Absetzen gezeichnet werden kann. Wir brauchen daher c nur so zu bestimmen, dass dies erfüllt ist:

$f(1) = 2 - 1^2 = 1;$

$\lim\limits_{x \to 1+} (-2x + c) = -2 \cdot 1 + c = -2 + c.$

Aus $1 = -2 + c$ folgt $c = 3$.

Abb. 3.11 zeigt den Graphen für die Funktion mit $c = 3$ sowie jenen für die Funktion mit etwa $c = 5$. Für $x \leq 1$ fallen die beiden Graphen zusammen.

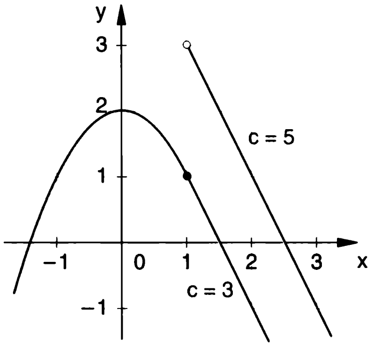


Abb. 3.11

Aufgaben

3.7 Eine Funktion ist im Intervall [−3, 3] durch den Graphen in **a)** Abb. 3.12 **b)** Abb. 3.13 gegeben. An welcher Stelle oder welchen Stellen ist die Funktion nicht stetig?

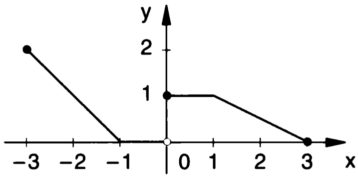


Abb. 3.12

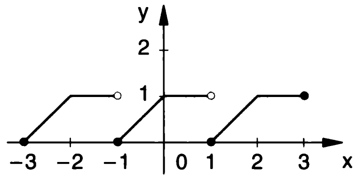


Abb. 3.13

3.8 Lies die Unstetigkeitsstellen sowie auch die beiden einseitigen Grenzwerte an der Stelle 0 ab. **a)** Reckteckimpulsfolge (Abb. 3.14) **b)** Sägezahnkurve (Abb. 3.15)

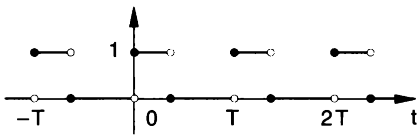


Abb. 3.14

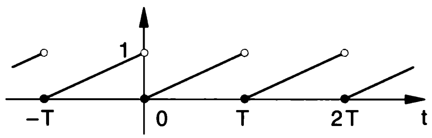


Abb. 3.15

3.9 Für die Querkraft Q (x) des Trägers in Abb. 3.16 gilt:

$$Q(x) = \begin{cases} F \cdot \frac{L - a}{L} & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ -F \cdot \frac{a}{L} & \text{für } a < x \leq L \end{cases}.$$

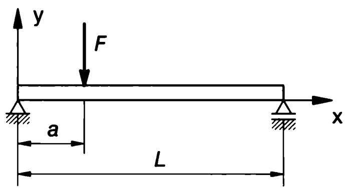


Abb. 3.16

a) Untersuche den Querkraftverlauf auf Unstetigkeitsstellen. Die Unstetigkeitsstellen sind für die Bestimmung des Momentenverlaufs von Bedeutung.

b) Stelle den Graphen $y = Q(x)$ für $L = 2{,}0$ m, $a = 0{,}5$ m und $F = 1\,000$ N graphisch dar.

3.10 Berechne den Grenzwert (verwende, dass bei Stetigkeit Grenzwert und Funktionswert gleich sind):

a) $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} x^2$ **c)** $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2 - 4x}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{2} - 1\right)$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{x}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - 4x^2}{x + 1}$ **g)** $\lim\limits_{x \to -2} (1 - x)^3$ **h)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(-x + x^2 - \frac{2}{x + 1}\right)$

3.11 Skizziere den Funktionsgraphen und lies etwaige Unstetigkeitsstellen der Funktion ab. Existieren Grenzwerte an den Unstetigkeitsstellen?

a) $y = \begin{cases} x + 1 \text{ für } x \leqslant 1 \\ x \text{ für } x > 1 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ für } x < 0 \\ 3e^{-x} \text{ für } x \geqslant 0 \end{cases}$ **c)** $y = \begin{cases} x^3 + 2 \text{ für } x < 1 \\ 2x^2 \text{ für } x \geqslant 1 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} \sin x \text{ für } x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \cos x \text{ für } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ **e)** $y = \begin{cases} \sin x \text{ für } x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 1 + \cos x \text{ für } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ **f)** $y = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} \text{ für } x \neq 1 \\ 0 \text{ für } x = 1 \end{cases}$

g) $y = \frac{1}{1 + |x|}$ **h)** $y = x \cdot |x|$ **i)** $y = |4 - x^2|$

j) $y = (\operatorname{sgn} x)^2$ **k)** $y = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$ **l)** $y = x \cdot \operatorname{sgn}(x - 1)$

3.12 Bei welcher Wahl der Konstanten c sind die folgenden Funktionen stetig?

a) $y = \begin{cases} x + c \text{ für } x \leqslant 1 \\ -x \text{ für } x > 1 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} 2x + c \text{ für } x \leqslant 0 \\ e^{-x} \text{ für } x > 0 \end{cases}$ **c)** $y = \begin{cases} x^3 + c \text{ für } x \leqslant 2 \\ x^2 + 1 \text{ für } x > 2 \end{cases}$

3.13 Untersuche die Ganzzahliger-Anteil-Funktion oder Integerfunktion $y = \operatorname{int} x$ (siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 191) auf Stetigkeit.

3.14 Das Produkt $f(x) \cdot H(x)$ unterdrückt den Wert von $f(x)$ für $x < 0$ ($y = H(x)$ ist die Heaviside-Funktion, siehe Seite 74). Untersuche folgende Funktion auf Stetigkeit.

a) $y = x \cdot H(x)$ **b)** $y = (1 + x) \cdot H(x)$ **c)** $y = \sin x \cdot H(x)$ **d)** $y = \cos x \cdot H(x)$

3.15 Eine allgemeinere Definition der Heaviside-Funktion lautet: $H(x - a) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < a \\ 1 \text{ für } x \geqslant a \end{cases}$.

Skizziere folgende Funktion und untersuche auf Stetigkeit:

a) $y = H(x - 1)$

b) $y = H(x - 1) - H(x - 2)$; "Pulsfunktion", nur ein Ausschnitt der x-Achse erhält den Wert 1

c) $y = [H(x) - H(x - \pi)] \cdot \sin x$; "Fensterfunktion", eine Funktion wird nur in einem bestimmten Intervall nicht unterdrückt.

3.3 Verhalten von Funktionen im Unendlichen

In den Anwendungen fragt man öfters nach dem "Langzeitverhalten" einer physikalisch-technischen Größe. Bei Schwingungsvorgängen ist dies das Verhalten nach dem Einschwingvorgang, das auch als stationäres Verhalten bezeichnet wird. Es kommt weiters vor, dass sich der Wert einer Größe f (x) für große x nicht mehr sehr vom "Grenzwert der Funktion für $x \to \infty$" unterscheidet. Dieser ist aber meist schnell berechenbar. In diesem Zusammenhang interessiert es zusätzlich, wie rasch sich die Größe f (x) diesem Grenzwert nähert.

Ein allfälliger Grenzwert von $y = f(x)$ für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ wird wie für $x \to x_0$ definiert:

> Konvergiert für *jede* Folge $\langle x_n \rangle$ mit $x_n \to +\infty$ bzw. $x_n \to -\infty$ die Folge $\langle f(x_n) \rangle$ stets gegen denselben Grenzwert g, so heißt g **Grenzwert der Funktion** für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$.
>
> Man schreibt kurz: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g$.
>
> Ist g gleich $+\infty$ oder $-\infty$, so spricht man wieder von einem **uneigentlichen Grenzwert**.

Die Grenzwertsätze für Funktionen (Seite 78) gelten auch in diesem Fall.

Beispiel 3.5 : Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion im Unendlichen

Untersuche das Verhalten folgender Funktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

a) $y = \frac{3x}{2x}$ **b)** $y = \frac{2x^2}{1 + x^2}$ **c)** $y = \frac{5x^2 + 1}{x - 2}$ **d)** $y = \frac{2x^2 - 1}{x^3 - x + 1}$

Lösung

Zu **a)** Für $x \to \infty$ wachsen auch der Zähler 3 x und der Nenner 2 x über alle Schranken; man erhält so: $\lim\limits_{x \to \infty} = \frac{3x}{2x} = „\frac{\infty}{\infty}“$.

Dies ist ein sogenannter *unbestimmter Ausdruck*, diesmal von der Form „$\frac{\infty}{\infty}$“. Durch eine Umformung des Funktionsterms, nämlich Kürzen durch x, kommt man zum Ziel.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Keinesfalls darf „$\frac{\infty}{\infty}$“ zu 1 gekürzt werden. ∞ ist keine Zahl!

Zu **b)** Um die Form „$\frac{\infty}{\infty}$“ zu vermeiden, **dividieren wir Zähler und Nenner durch die höchste auftretende Potenz von x**. Diese Umformung entspricht genau jener bei Folgen (siehe Beispiel 1.22 c Seite 40).

$$f(x) = \frac{2x^2}{1 + x^2} = \frac{2}{\frac{1}{x^2} + 1}; \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{2}{0 + 1} = 2; \text{ desgleichen ist } \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{2}{0 + 1} = 2.$$

Man kann auch anders vorgehen und dadurch erfahren, wie die Funktion ins Unendliche geht. Wir führen dazu die Polynomdivision $2x^2 : (1 + x^2) = 2x^2 : (x^2 + 1)$ aus:

$$\begin{array}{l} 2x^2 : (x^2 + 1) = 2 - \frac{2}{x^2 + 1} \\ \underline{2x^2 + 2} \\ \quad\; -2 \end{array}$$

Daraus folgt zunächst wieder, dass $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$ ist. Zusätzlich erkennt man aber auch, dass für große $|x|$ gilt: $y = \frac{2x^2}{1 + x^2} \approx 2.$

Eine Polynomdivision kann dann empfehlenswert sein, wenn wie hier eine "unecht" gebrochenrationale Funktion vorliegt; dies heißt, dass der Grad des Zählerpolynoms gleich dem Grad des Nennerpolynoms oder größer ist.

Dabei ist der Grad eines Polynoms die größte auftretende Hochzahl der Variablen.

Abb. 3.17 zeigt den Funktionsgraphen und seine Näherung durch die Gerade $y = 2$. Obwohl der Abstand zwischen dem Graphen und der Geraden $y = 2$ für $x \to \pm\infty$ verschwindend klein wird, schneidet der Graph die Gerade nicht. Eine solche *Gerade* heißt **Asymptote** des Graphen. Man sagt auch, dass sich der Graph *asymptotisch* der Geraden $y = 2$ nähert.

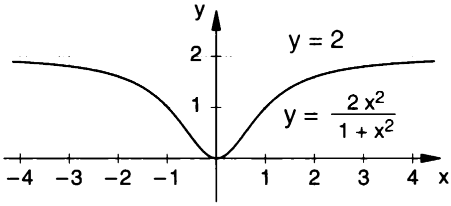


Abb. 3.17 Asymptotisches Verhalten

Zu **c)** Wir führen wieder eine Polynomdivision aus:

Für $x \to \pm\infty$ strebt der Bruch $\frac{21}{x-2}$ gegen null. Die Funktion nähert sich wieder asymptotisch einer Geraden. Daher liegt wieder eine Asymptote des Funktionsgraphen vor: $y = 5x + 10$ (Abb. 3.18).

$$\begin{array}{l}
(5x^2 \qquad\quad + 1) : (x-2) = 5x + 10 + \frac{21}{x-2} \\
\underline{-5x^2 \mp 10x} \\
\qquad\quad 10x + 1 \\
\qquad\quad \underline{-10x \mp 20} \\
\qquad\qquad\quad 21
\end{array}$$

Mit der Kenntnis dieser Asymptote kennt man nicht nur die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x-10) = -\infty$ bzw. $\lim\limits_{x\to\infty}(5x-10) = +\infty$ der Funktion, sondern sieht auch, dass die Funktion für große $|x|$ durch eine Gerade, nämlich ihre Asymptote angenähert werden kann!

$x_0 = 2$ ist eine Polstelle. Durch diese Stelle verläuft die Gerade $x = 2$ als eine senkrechte Asymptote.

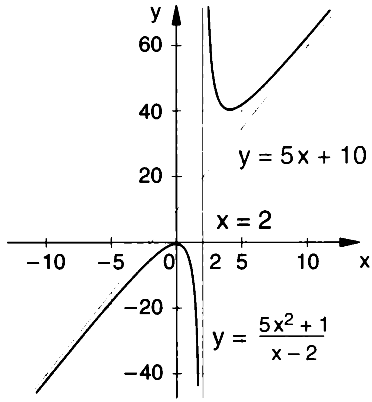


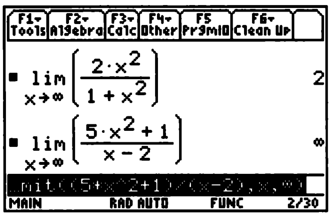
Abb. 3.18 Asymptoten

Zu **d)** Wir dividieren Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz von x.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-1}{x^3-x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{0-0}{1-0+0} = 0.$$

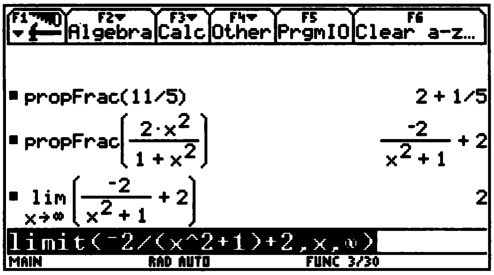
Die Funktion nähert sich für $x \to \pm\infty$ unbegrenzt dem Wert null. Die Gerade $y = 0$, d.h. die x-Achse, ist *Asymptote* des Funktionsgraphen.

TI 89



Auch Grenzwerte für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ können ermittelt werden.

Voyage 200



Mit 7 (7:propFrac) wird ein unechter Bruch als Summe einer ganzen Zahl mit einem echten Bruch dargestellt (proper fraction, echter Bruch).

Entsprechend wird mit dieser Anweisung auch bei einer unecht gebrochenenrationalen Funktion eine Polynomdivision ausgeführt.

Bei unecht gebrochenrationalen Termen kann es vorteilhaft oder überhaupt erst zielführend sein, vor der Grenzwertbestimmung die propFrac-Anweisung vorzuschalten.

Beispiel 3.6 : Verhalten weiterer Funktionen im Unendlichen

Bestimme, wenn vorhanden

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ **b)** $\lim\limits_{t \to \infty} \left(1 - e^{-t}\right)$ **c)** $\lim\limits_{u \to \pm\infty} e^{-u^2/2}$ **d)** $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-t} \cdot \sin 5t$

Lösung

Zu **a)** Da sich die Funktionswerte f (x) = sin x für $x \to \infty$ ständig zwischen –1 und +1 bewegen, gibt es keinen Grenzwert.

Zu **b)** Da sich die Exponentialfunktion $y = e^{-t}$ für $t \to \infty$ asymptotisch der x-Achse nähert, also $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-t} = 0$ ist, gilt $\lim\limits_{t \to \infty} \left(1 - e^{-t}\right) = 1$.

Zu **c)** Für $u \to +\infty$ oder $u \to -\infty$ gilt $\frac{u^2}{2} \to \infty$.

Daher: $\lim\limits_{u \to \pm\infty} e^{-u^2/2} = 0$.

Zu **d)** Da stets $|\sin 5t| \leqslant 1$ und $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-t} = 0$, ist auch $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-t} \cdot \sin 5t = 0$.

Beispiel 3.7 : Elastischer Stoß

Eine Kugel der Masse *m* und der Geschwindigkeit *v* stößt zentral und elastisch auf eine zweite Kugel der Masse *M* (Abb. 3.19). Aus dem Impuls- und Energieerhaltungssatz lässt sich die Geschwindigkeit $v' = \frac{(m - M) \cdot v}{m + M}$ der ersten Kugel nach dem Stoß herleiten. Wie groß ist *v'*, wenn der Stoß gegen ein festes Hindernis erfolgt? Führe dazu den Grenzübergang $M \to \infty$ aus!

Lösung

$v' = f(M)$ ist eine gebrochenrationale Funktion in der Variablen *M*. Wir dividieren Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz von *M*, also durch *M*:

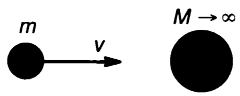


Abb. 3.19

$$\lim_{M \to \infty} \frac{(m - M) \cdot v}{m + M} = \lim_{M \to \infty} \frac{\frac{m}{M} - 1}{\frac{m}{M} + 1} \cdot v = \frac{0 - 1}{0 + 1} \cdot v = -v.$$

Die Geschwindigkeit *v'* hat den gleichen Betrag wie *v*, hat aber (negatives Vorzeichen!) entgegengesetzte Richtung.

Beispiel 3.8 : Erzwungene Schwingung

Wird ein Oszillator, d.h. ein schwingungsfähiges mechanisches oder elektromagnetisches System, durch eine sinusförmige Kraft bzw. Spannung der Kreisfrequenz ω erregt, so schwingt auch das System nach Abklingen des Einschwingvorganges unter allgemeinen Voraussetzungen sinusförmig mit der gleichen Frequenz: $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

In "Ingenieur-Mathematik 4" wird für die Amplitude $\hat{y}$ und die Phasenverschiebung φ die folgende Abhängigkeit von der Erregerfrequenz ω für $\omega > 0$ hergeleitet, wenn auf einen mechanischen Oszillator die periodische Kraft $F(t) = \hat{F} \cdot \sin(\omega t)$ wirkt (in Abb. 3.20 näherungsweise durch einen Schubkurbeltrieb verwirklicht):

$$\hat{y} = \hat{y}(\omega) = \frac{\hat{F}}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\dfrac{2\delta\cdot\omega}{\omega_0^2-\omega^2} & \text{für } \omega < \omega_0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{für } \omega = \omega_0 \\ -\arctan\dfrac{2\delta\cdot\omega}{\omega_0^2-\omega^2} - \pi & \text{für } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Man spricht vom **Frequenzgang** der Amplitude bzw. der Phasenverschiebung. Dabei ist ω_0 die Eigenfrequenz des Oszillators im ungedämpften Fall und $\delta \geqslant 0$ (in s^{-1}) ein Maß für die Dämpfung des Oszillators. Die Schwingung hinkt gegenüber der erregenden Sinusschwingung nach, es tritt also eine negative Phasenverschiebung φ auf.

Kläre folgende Fragen:

a) Wie verhalten sich Amplitude $\hat{y}$ und Phasenverschiebung φ des Oszillators bei sehr *kleinen* sowie sehr *großen* Erregerfrequenzen ω?

b) Skizziere die Funktion $\varphi = \varphi(\omega)$ für $\omega_0 = 1\ s^{-1}$ sowie $\delta = 0{,}2\ s^{-1}$ und untersuche sie auf Stetigkeit.

Lösung

Zu **a)** Dazu werden die Grenzwerte für $\omega \to 0+$ bzw. $\omega \to \infty$ gebildet.

$$\lim_{\omega\to 0+} \frac{\hat{F}}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}} = \frac{\hat{F}}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-0^2\right)^2+4\delta^2 0^2}} = \frac{\hat{F}}{m\,\omega_0^2};$$

$$\lim_{\omega\to 0}\left(-\arctan\frac{2\delta\cdot\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) = 0.$$

Bei **sehr kleinen** Frequenzen schwingen Erreger und Oszillator nahezu phasengleich ($\varphi \approx 0$); der Oszillator wirkt wie starr verbunden mit dem Erreger und schwingt mit der Amplitude $\frac{\hat{F}}{m\,\omega_0^2}$.

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{\hat{F}}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}} = 0.$$

Dividiert man im Term $\frac{2\delta\cdot\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$ Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz von ω, also durch ω^2, so erhält

man: $$\lim_{\omega\to\infty}\left[-\arctan\frac{\frac{2\delta}{\omega}}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-1} - \pi\right] = -\arctan\frac{0}{-1} - \pi = -\pi = -180°.$$

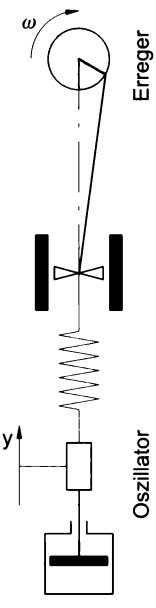


Abb. 3.20

Bei **sehr hohen** Frequenzen nimmt die Amplitude immer mehr gegen 0 ab; der Oszillator kann dem Erreger nicht mehr folgen und hinkt ihm um fast eine halbe Periode nach.

Dazwischen erreicht die Amplitude des Oszillators einen Höchstwert ("Resonanz").

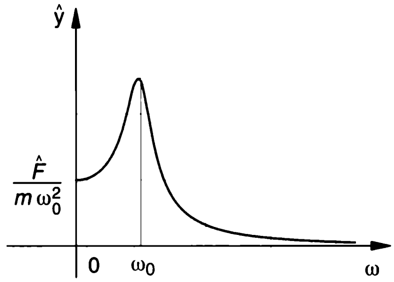


Abb. 3.21 Frequenzgang der Amplitude

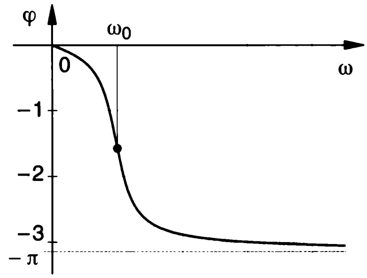


Abb. 3.22 Frequenzgang der Phasenverschiebung

Die Oszillatoramplitude wird bei der sogenannten *Resonanzkreisfrequenz* maximal. Diese ist bei einer Dämpfung stets etwas kleiner als ω_0 (Abb. 3.21).

Zu **b)** Aus der Abb. 3.22 entnimmt man, dass $\lim\limits_{\omega \to \omega_0 -} \varphi(\omega) = \lim\limits_{\omega \to \omega_0 +} \varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$; die Funktion ist also stetig an der Stelle $\omega = \omega_0$.

Anmerkung: Die Frequenzgänge der Amplitude und der Phasenverschiebung werden im sogenannten *Bode-Diagramm* zusammengefasst. Dabei werden $20 \cdot \lg \hat{y}(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ über der logarithmisch geteilten ω-Achse aufgetragen.

Im Überblick: Grenzwert einer Funktion – Stetigkeit

Grenzwert einer Funktion: Gilt für *jede* gegen x_0 konvergierende Folge $\langle x_n \rangle$ stets $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$, so heißt g der *Grenzwert* von $y = f(x)$ an der Stelle x_0.

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$.

Gilt für jede *von rechts* nach x_0 konvergierende Folge stets $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g_r$, so heißt g_r **rechtsseitiger Grenzwert** der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0. Entsprechend ist der **linksseitige Grenzwert** der Funktion g_l bei Annäherung von $\langle x_n \rangle$ *von links* definiert.

Schreibweisen: $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = g_r$ bzw. $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = g_l$.

Werden die Funktionswerte $f(x_n)$ für jede gegen x_0 konvergierende Folge $\langle x_n \rangle$ beliebig groß oder klein, so schreibt man kurz: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ bzw. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$. Man spricht nun von einem **uneigentlichen Grenzwert** der Funktion.

Entsprechendes gilt auch für den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0. In all diesen Fällen heißt x_0 **Unendlichkeitsstelle** oder **Pol(stelle)** der Funktion.

Grenzwertsätze: Der Grenzwert einer Summe (Differenz) von Funktionen kann gliedweise gebildet werden. Der Grenzwert eines Produktes oder Quotienten von Funktionen ist gleich dem Produkt bzw. Quotienten der Grenzwerte dieser Funktionen.

Eine in x_0 definierte Funktion $y = f(x)$ heißt **an der Stelle x_0 stetig**, wenn dort der Grenzwert und der Funktionswert übereinstimmen: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Existiert an einer Definitionslücke x_0 der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$, so besitzt dort der Funktionsgraph eine **Lücke**. In diesem Fall kann die Funktion durch die zusätzliche Definition $f(x_0) = c$ **stetig fortgesetzt** werden.

Verhalten im Unendlichen: Konvergiert für *jede* Folge $\langle x_n \rangle$ mit $x_n \to +\infty$ bzw. $x_n \to -\infty$ $\langle f(x_n) \rangle$ stets gegen denselben Grenzwert g, so heißt g **Grenzwert der Funktion** für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$.

Man schreibt kurz: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g$.

Ist g gleich $+\infty$ oder $-\infty$, so spricht man wieder von einem **uneigentlichen Grenzwert**.

Aufgaben

3.16 Bestimme die Grenzwerte folgender Funktionen für $x \to +\infty$ sowie $x \to -\infty$.

a) $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{x-2}$ **c)** $y = \frac{1}{x^2}$ **d)** $y = \frac{3}{3-x^2}$

e) $y = \frac{2}{x+2}$ **f)** $y = \frac{x+1}{x}$ **g)** $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$ **h)** $y = \frac{x+1}{x+2}$

i) $y = \frac{x^2}{x^3+1}$ **j)** $y = \frac{6x^2-3}{2x^2+x-1}$ **k)** $y = \frac{x^2-1}{2x+1}$ **l)** $y = \frac{3x^3-x^2+1}{x^3+x-4}$

3.17 Bestimme die Asymptoten:

a) $y = \frac{x^2}{x-1}$ **b)** $y = \frac{2x^2-3x-1}{x-2}$ **c)** $y = \frac{3x^3}{x^2+1}$ **d)** $y = \frac{2x^3-x+1}{1-x^2}$

e) $y = \frac{x^2-2}{2(x-2)}$ **f)** $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ **g)** $y = \frac{2x^3-x}{x^2}$ **h)** $y = \frac{4x^3-x^2}{x^2+1}$

3.18 Bestimme den Grenzwert (nach elementaren Umformungen):

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \lg \frac{1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to \infty} \ln \sqrt{x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x^2}{\ln x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\lg 10x}{\lg x}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3+2^x}{1+2^x}$ **g)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+\sin x}{x}$ **h)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \tanh x = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **j)** $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{50}{1 + e^{-0{,}1 \cdot (t-40)}}$ (logistisches Wachstum)

3.19 Bestimme den Grenzwert von $y = \frac{x^2 - 1}{2x - 4}$ für

a) $x \to 2+$ **b)** $x \to 2-$ **c)** $x \to +\infty$ **d)** $x \to -\infty$

3.20 Bestimme den Grenzwert von $y = \frac{x^3 + 1}{x}$ für

a) $x \to 0+$ **b)** $x \to 0-$ **c)** $x \to +\infty$ **d)** $x \to -\infty$

3.21 Die Kapazität eines aus zwei konzentrischen Kugelschalen (Abb. 3.23) mit den Radien r und $r + x$ $(x > 0)$ bestehenden Kugelkondensators beträgt $C = 4\,\pi\,\varepsilon_0 \cdot \frac{r \cdot (r + x)}{x}$, wobei ε_0 die elektrische Feldkonstante ist. Daraus wird im Grenzfall $x \to \infty$ eine einzige Kugelschale. Berechne ihre Kapazität!

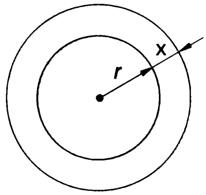


Abb. 3.23

3.22 Wird eine Masse m (Abb. 3.24) von der Erdoberfläche (Erdradius $r = 6370$ km) in eine Höhe h gehoben, so beträgt die Hubarbeit $W = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + h}\right)$.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ ist die Gravitationskonstante und $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg die Erdmasse.

a) Berechne die Arbeit W_∞, um eine Masse von $m = 1$ kg ins "Unendliche" zu heben $(h \to \infty)$.

b) Berechne aus der Gleichung $W_\infty = \frac{m \cdot v^2}{2}$ die dazu nötige Abwurfgeschwindigkeit v von der Erdoberfläche ("Fluchtgeschwindigkeit").

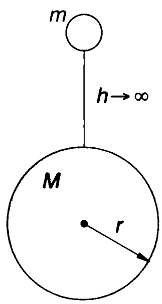


Abb. 3.24

3.23 Für den Einschaltstrom i eines Gleichstromkreises (siehe "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 80) gelte für $t \geqslant 0$ s: $i = 3{,}00\ \mathrm{A} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ mit der Zeitkonstante $\tau = 7{,}5$ ms. Welcher "Endwert" der Stromstärke i wird sich für $t \to \infty$ s einstellen? Vergleiche diesen Wert mit den Stromwerten zu den Zeiten $t = 3\tau$ und $t = 5\tau$.

3.24 Für die Erwärmung einer zum Zeitpunkt $t = 0$ s in Betrieb gesetzten Maschine gilt für $t \geqslant 0$ s: $\vartheta = 5\,\vartheta_0 \cdot \left(1 - 0{,}8 e^{-t/\tau}\right)$, wobei τ die Zeitkonstante, ϑ_0 die Anfangstemperatur und ϑ die Temperatur zur Zeit t ist. Auf welche Temperatur (Betriebstemperatur) wird sich die Maschine schließlich erwärmen?

3.25 Von einem Satelliten (Abb. 3.25), der sich in einer Höhe x über der Erdkugel (Radius r) befindet, ist theoretisch eine Fläche von $A = \frac{2\pi\, r^2 \cdot x}{r + x}$ sichtbar ("Ingenieur-Mathematik 1", Seite 312).

Welche Fläche A wird vom Satelliten im Grenzfall sichtbar, wenn sich der Satellit immer weiter von der Erde wegbewegt?

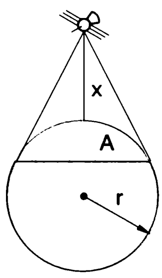


Abb. 3.25

4 Differentialrechnung

Die Differentialrechnung ermöglicht die Beschreibung der *Veränderung* zeitlicher oder räumlicher Größen. Sie befasst sich beispielsweise mit Steigungen, Geschwindigkeiten oder Wachstumsraten und ist hilfreich beim Aufsuchen von Maxima oder Minima oder beim Lösen von Gleichungen. Ihre Grundlagen wurden unabhängig voneinander vom englischen Physiker und Mathematiker Isaak NEWTON (1643 – 1727) und vom deutschen Philosophen und Mathematiker Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 – 1716) gelegt.

4.1 Das Tangentenproblem

Wir wissen, was man unter einer Tangente im Punkt P eines *Kreises* versteht. Man erhält sie aus der Sekante durch P und Q, wenn Q sich unbegrenzt dem Punkt P nähert (Abb. 4.1). Man sagt dann auch, dass die Tangente den Kreis "berührt".

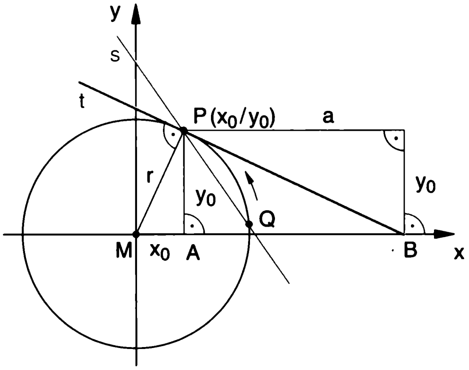


Abb. 4.1 Kreistangente

Wir ermitteln die Gleichung der Kreistangente t im Punkt $P(x_0/y_0)$:
$y = k_T \cdot x + d$.

t steht normal auf den Radius r. Aufgrund der Ähnlichkeit der Steigungsdreiecke erhält man: $\frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{a}$ und daraus weiters $a = \frac{y_0^2}{x_0}$.

Damit folgt für die Tangentensteigung k_T:

$k_T = -\frac{y_0}{a} = -\frac{y_0}{y_0^2/x_0} = -\frac{x_0}{y_0}$.

Einsetzen von k_T und der Koordinaten des Berührpunktes P in die Tangentengleichung ergibt den y-Achsenabschnitt $d = \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0}$.

Setzt man noch $r^2 = x_0^2 + y_0^2$ (pythagoräischer Lehrsatz im Dreieck MAP), so erhält man als Gleichung der gesuchten Kreistangente t: $y = -\frac{x_0}{y_0} \cdot x + \frac{r^2}{y_0}$.

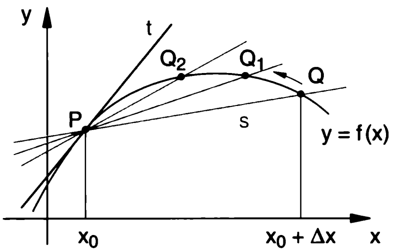


Abb. 4.2 Tangente an einen Funktionsgraphen

Unser Ziel ist nun, für eine gegebene Funktion $y = f(x)$ die Tangente in einem Punkt P ihres Graphen anzugeben. Dies geschieht grundsätzlich gleich wie beim Kreis.

Wir betrachten zunächst die Gerade s durch P und Q (Abb. 4.2). Wie beim Kreis nennt man auch hier diese Gerade Sekante ("Schneidende"). Lässt man den Punkt Q entlang des Funktionsgraphen über die Punkte Q_1, Q_2, usw. unbegrenzt zum Punkt P wandern, so geht die Sekante in die Tangente t über.

Dass tatsächlich an einer Stelle x_0 eine Tangente an den Graphen einer Funktion existiert, ist keinesfalls selbstverständlich, wie sich noch zeigen wird!

Beispiel 4.1 : Tangente an den Graphen einer Funktion

Ermittle die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $y = x^2$ im Punkt $P(1/1)$!

Lösung

Wir wählen einen Punkt Q in der Nähe von P; seine x-Differenz zu P sei Δx. Dann gilt:
x-Koordinate von Q: $1 + \Delta x$,
y-Koordinate von Q: $(1 + \Delta x)^2$.
Steigung k_S der Sekante durch die P und Q:

$$k_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} = \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta x \cdot (2 + \Delta x)}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

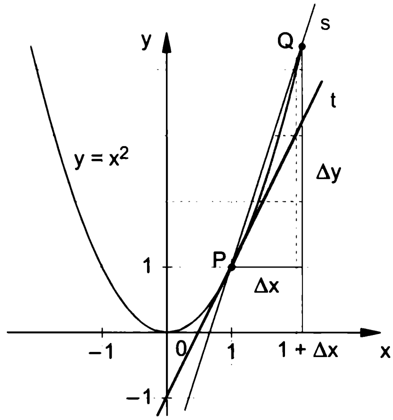


Abb. 4.3 Tangente an einen Graphen

Für $\Delta x \to 0$ nähert sich der Punkt Q unbegrenzt dem Punkt P, die Grenzlage der Sekanten ist die *Tangente* t im Punkt P(1/1). Die Steigungen k_S gehen in die Steigung k_T der Tangente über:
$k_T = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2.$

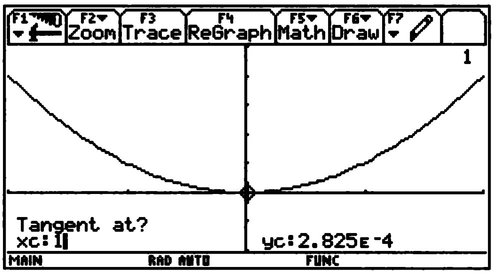
Man schreibt kurz: $y'(1) = f'(1) = 2$
(gesprochen: y Strich bzw. f Strich an der Stelle 1).

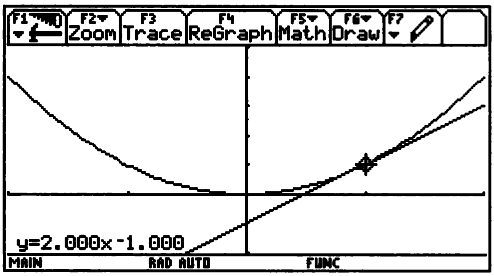
Dieser Grenzwert wird als **Ableitung der Funktion** $y = f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ bezeichnet; und man sagt, dass diese Funktion an der Stelle $x_0 = 1$ **differenzierbar** ist.

Die Ableitung gibt als Steigung der Tangente die Steigung des Funktionsgraphen an einer Stelle x_0 an.

Damit kann die Gleichung der Tangente in der Form $y = k_T \cdot x + d$ geschrieben werden. Setzt man für x und y die Koordinaten von P ein, so erhält man $d = -1$. Die Gleichung der Tangente t lautet daher: $y = 2x - 1$.

Voyage 200





`Das Ergebnis aus Beispiel 4.1 kann auch mit dem Taschenrechner erhalten werden. Dazu wird zuerst die Funktion mit dem y-Editor eingegeben und der Zeichenbereich (window) festgelegt. Nach dem Zeichnen des Funktionsgraphen im Graphikfenster drückt man F5 A (A:Tangent) und gibt bei Tangent at? die Stelle 1 ein. Nach ENTER wird die Tangente gezeichnet und die Gleichung der Tangente ausgegeben.`

Wir verallgemeinern das eben an der Funktion $y = x^2$ dargestellte **Tangentenproblem**: Gegeben ist allgemein die Funktion $y = f(x)$. *Gesucht ist die Steigung der Tangente an der Stelle* x_0, also der Tangente im Punkt $P(x_0/y_0)$ des Funktionsgraphen, wobei $y_0 = f(x_0)$ bedeutet.

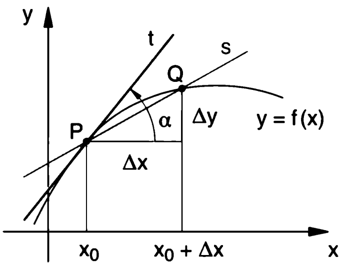


Abb. 4.4 Tangentenproblem

Q ist ein von $P(x_0/y_0)$ verschiedener Punkt (Abb. 4.4) in der Nähe von P. Die Differenz seiner x-Koordinate auf x_0 ist wieder Δx. Δy ist wieder die Differenz der y-Werte von Q und P: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
Die Steigung k_S der Sekante durch P und Q ist durch den Differenzenquotienten

$k_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ gegeben.

Für $\Delta x \to 0$ nähert sich der Punkt Q auf dem Funktionsgraphen unbegrenzt dem Punkt P; die zugehörigen Sekanten unterscheiden sich dann immer weniger von einer Geraden, die man **Tangente** t im Punkt P nennt.

Ihre Steigung k_T ist der Grenzwert der Sekantensteigung k_S, für $\Delta x \to 0$:

$$k_T = \tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Erst die *Existenz* dieses Grenzwertes an der Stelle x_0 *definiert* die Tangente als jene Gerade durch P, deren Steigung gleich diesem Grenzwert ist. Anschauliche Erklärungen wie: "Die Tangente ist eine Gerade, welche eine Kurve berührt", erweisen sich als unbefriedigend.

Die Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existiert.

Dieser Grenzwert heißt **Ableitung** oder **Differentialquotient** von $y = f(x)$ an der Stelle x_0. Er wird mit $y'(x_0)$, $f'(x_0)$ oder $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ (gesprochen: dy nach dx für $x = x_0$) bezeichnet.

Das Bilden der Ableitung wird **Ableiten** oder **Differenzieren** genannt.

Wir halten fest:

(1) Die Ableitung (der Differentialquotient) $y'(x_0)$ ist der *Grenzwert des Differenzenquotienten* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

(2) Differenzierbarkeit einer Funktion an der Stelle x_0 bedeutet geometrisch, dass es dort eine Tangente gibt. Die einfache Deutung der Ableitung einer Funktion lautet:
Ableitung = Steigung der Tangente.
Die Ableitung an der Stelle x_0 gibt damit die Steigung des Funktionsgraphen an.

Die Tangente ist der Graph einer *linearen* Funktion. Ist eine Funktion also an einer Stelle x_0 **differenzierbar**, so heißt dies, dass sie dort **linear approximierbar** ist. In der Nähe von x_0 verlaufen der Funktionsgraph und die Tangente "praktisch" gleich. Die Tangente ist darüber hinaus auch die beste lineare Approximation!

(3) Ist eine Funktion $y = f(x)$ an jeder Stelle eines Intervalls differenzierbar, so gehört zu jeder Stelle x dieses Intervalls ein Steigungswert der Funktion. Man spricht von der Ableitungsfunktion oder kurz Ableitung $y' = f'(x)$ und sagt, dass man die Funktion $y = f(x)$ "nach x" abgeleitet hat.

Nun kann die Gleichung der Tangente t einfach als jene Gerade durch den Punkt $P(x_0/y_0)$ angegeben werden, die die Steigung $y'(x_0)$ besitzt.

Beispiel 4.2 : Gibt es immer eine Tangente?

Untersuche, ob der Graph
a) der Funktion $y = |x^2 - 1|$ an der Stelle $x_0 = 1$ oder $x_0 = -1$,
b) der Heaviside-Funktion (siehe Seite 74) an der Stelle $x_0 = 0$
eine Tangente besitzt!

Lösung

Zu **a)**

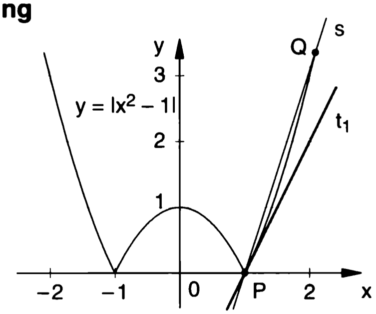


Abb. 4.5 a) t_1 als Sekantengrenzlage in P

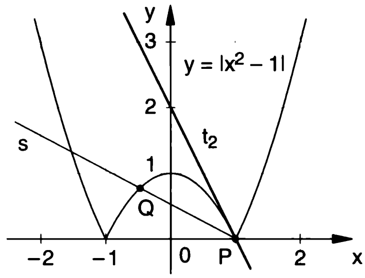


Abb. 4.5 b) t_2 als Sekantengrenzlage in P

Der Funktionsgraph besitzt im Punkt P (1/0) eine *Spitze*; wir fragen, ob er dort eine Tangente besitzt. Je nach Lage von Q gibt es für die Sekanten durch P und Q unterschiedliche Grenzlagen t_1 und t_2, wenn sich Q von rechts oder von links dem Punkt P nähert! Es kann nicht mehr von einer eindeutig bestimmten Tangente die Rede sein. Die Funktion ist daher an der Stelle $x_0 = 1$ nicht differenzierbar. Trotzdem ist sie dort *stetig*. Dieselbe Situation liegt an der Stelle $x_0 = -1$ vor. An allen anderen Stellen ist die Funktion differenzierbar.

Man spricht von einer rechts- oder linksseitigen Differenzierbarkeit an einer Stelle, wenn – wie hier – die rechtsseitige Tangente t_1 bzw. die linksseitige Tangente t_2 an der betrachteten Stelle existieren.

Zu **b)**

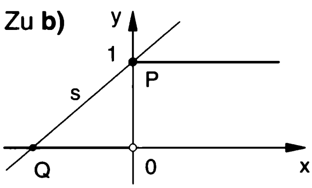


Abb. 4.6 Nicht differenzierbar an der Unstetigkeitsstelle $x_0 = 0$

Die Heaviside-Funktion $y = H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geqslant 0 \end{cases}$ ist an der an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig (endlicher Sprung).

Nähert sich Q (Abb. 4.6) von links dem Punkt P, so wachsen die Steigungen der Sekanten durch P und Q über alle Grenzen; es gibt keinen Grenzwert der Sekantensteigungen. Daher besitzt die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ keine Tangente.

Allgemein gilt der folgende Zusammenhang zwischen **Differenzierbarkeit** und **Stetigkeit**:

> Ist eine Funktion an einer Stelle x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Ist eine Funktion jedoch an x_0 unstetig, so ist sie dort sicher nicht differenzierbar! Ist sie an x_0 stetig, so braucht sie dort nicht differenzierbar zu sein (siehe Beispiel 4.2 a).

Anschaulich (nicht ganz korrekt) kann man sagen:

Während Graphen stetiger Funktionen ohne Absetzen gezeichnet werden können, besitzen die Graphen **differenzierbarer** Funktionen zusätzlich die Eigenschaft, dass sie **keine Spitzen** haben. Sie sind also in diesem Sinne "glatter" als stetige Funktionen.

Beispiel 4.3 : Ableitung und Tangente

a) Berechne die Ableitung der Funktion $y = -x^2 + 2x + 1$ an einer Stelle x_0!
b) Ermittle die Gleichung der Tangente an der Stelle $x_0 = 2$.
c) Gibt es einen Punkt mit waagrechter Tangente? Zeichne den Graphen der Funktion!

Lösung

Zu **a)** $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-(x_0 + \Delta x)^2 + 2 \cdot (x_0 + \Delta x) + 1 - \left[-x_0^2 + 2x_0 + 1\right]}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-x_0^2 - 2x_0\Delta x - (\Delta x)^2 + 2x_0 + 2\Delta x + 1 + x_0^2 - 2x_0 - 1}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (-2x_0 - \Delta x + 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x + 2) = 2 - 2x_0$$

Legt man sich nicht mehr auf eine bestimmte Stelle $x = x_0$ fest, sondern lässt die Stelle x offen, so schreibt man auch: $y' = 2 - 2x$.

Zu **b)** Wir ermitteln zunächst den Funktionswert $y_0 = y(2) = -2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 1$.
Steigung der Tangente: $y'(2) = 2 - 2 \cdot 2 = -2$.
Gleichung der Tangente t: $y = k \cdot x + d = -2x + d$.
$P(2/1)$ auf t: $1 = (-2) \cdot 2 + d \;\Rightarrow\; d = 5$. Damit t: $y = -2x + 5$.

Zu **c)** Der Graph einer quadratischen Funktion $y = -x^2 + 2x + 3$ ist eine sich nach unten öffnende Parabel; daher muss es (genau) einen Punkt mit einer waagrechten Tangente geben, den Scheitel S der Parabel.

Die Steigung einer waagrechten Gerade ist null. Um die Scheitelstelle zu bestimmen, braucht man also nur jene Stelle x zu bestimmen, an der die Ableitung null ist:
$y'(x) = 0$: $2 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$.

An der Stelle 1 besitzt der Funktionsgraph eine waagrechte Tangente. Dies ist auch die x-Koordinate des Scheitels: $x_S = 1$. Seine y-Koordinate lautet: $y_S = -1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 2$. Somit: $S(1/2)$.
Die Gleichung der Tangente durch S lautet:
$y = k \cdot x + d = 0 \cdot x + y_S$, also $y = 2$. Abb. 4.7 zeigt den Funktionsgraphen.

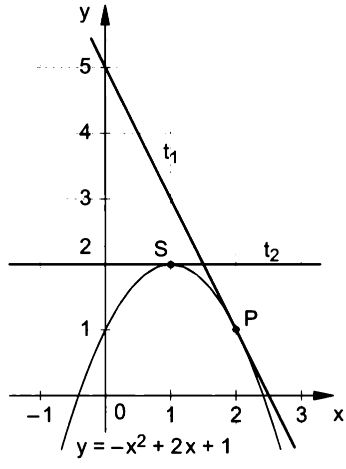
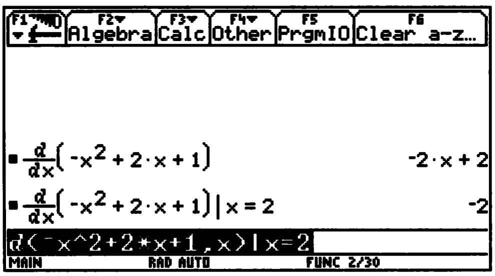


Abb. 4.7 Graphische Darstellung

Voyage 200



Mit F3 1 (1:*d* (differentiate) ruft man die Anweisung zum Differenzieren einer Funktion auf. Danach werden der Funktionsterm und die Variable, nach der abgeleitet wird, eingegeben und schließlich wird die Klammer geschlossen.

Ebenso kann der Wert der Ableitung an einer bestimmten Stelle berechnet werden.

Im Überblick: Das Tangentenproblem

Das **Tangentenproblem** ist die Frage nach der "Tangente" an den Graphen einer Funktion $y = f(x)$ im Punkt P. Als **Tangente** bezeichnet man, sofern vorhanden, die Grenzlage der Sekanten durch P. Gibt es diese Tangente, so sagt man, dass die Funktion dort **differenzierbar**, oder auch, dass sie dort **linear approximierbar** ist.

Differenzierbarkeit einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 bedeutet, dass der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existiert. Diesen Grenzwert eines Differenzenquotienten nennt man **Ableitung** oder **Differentialquotient** von $y = f(x)$ an der Stelle x_0.
Er wird mit $y'(x_0)$, $f'(x_0)$ oder $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ (gesprochen: dy nach dx für $x = x_0$) bezeichnet.
Das Bilden der Ableitung wird **Ableiten** oder **Differenzieren** genannt.

Geometrische Deutung: **Ableitung = Steigung der Tangente**.
Die Ableitung an der Stelle x_0 gibt damit die Steigung des Funktionsgraphen an.

Ist eine Funktion $y = f(x)$ an jeder Stelle eines Intervalls differenzierbar, so heißt $y' = f'(x)$ ihre **Ableitung(sfunktion)**.

Ist eine Funktion an einer Stelle x_0 **differenzierbar**, so ist sie dort auch **stetig**.

Aufgaben

4.1 Ermittle die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten sowie die Gleichung der Tangente an der Stelle x_0:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2;\ x_0 = 2$ **b)** $f(x) = x^2 + 2;\ x_0 = 2$ **c)** $f(x) = 0{,}5x^2 + 1;\ x_0 = 1$
d) $f(x) = x^3;\ x_0 = 1$ **e)** $f(x) = 2x^3 - 1,\ x_0 = -1$ **f)** $f(x) = 2x^2 - 4x + 1,\ x_0 = 0$

4.2 Untersuche, ob der Funktionsgraph eine waagrechte Tangente besitzt! Wenn ja, ermittle die Koordinaten dieses Punktes und gib die Gleichung der Tangente an!
a) $y = (x + 2)^2$ **b)** $y = -x^2 + 2x - 4$ **c)** $y = 2x^3 + x^2 - 1$

4.3 Untersuche, ob der Funktionsgraph eine Tangente mit der Steigung k besitzt. Wenn ja, ermittle die Koordinaten dieses Punktes und gib die Gleichung der Tangente an!
a) $f(x) = (x - 2)^2,\ k = 2$ **b)** $f(x) = x^2 - x,\ k = 3$

4.4 Gibt es Stellen, an welchen die Funktion nicht differenzierbar ist? Zeichne den Graphen und gib die Stellen an, an denen keine Tangente gezeichnet werden kann.

a) $y = |x - 1|$ **b)** $y = |x^2 - 2|$ **c)** $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x \leq 1 \\ -x + 3 & \text{für } x > 1 \end{cases}$ **e)** $y = \begin{cases} |x - 1| & \text{für } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ **f)** $y = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

4.2 Ableitung elementarer Funktionen

Die Berechnung der Ableitung einer Funktion als Grenzwert des Differenzenquotienten ist im Allgemeinen nicht nötig. Denn kennt man diese Grenzwerte für einige elementare Funktionen, so können daraus mit Hilfe von Ableitungsregeln (siehe Abschnitt 4.3) die Ableitungen fast aller gebräuchlichen Funktionen gebildet werden. Daher wird nun zuerst auf die Ableitung der wichtigsten elementaren Funktionen eingegangen.

Vereinbarung: Wird im Folgenden beim Ableiten nicht auf eine besondere Stelle x_0 Bezug genommen, so wird diese allgemein mit x bezeichnet.

Ableitung der konstanten Funktion y = f (x) = const. = c

Für jede Stelle x gilt (Abb. 4.8):

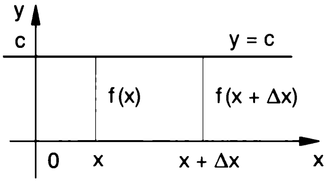


Abb. 4.8 Ableitung einer Konstanten

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

> **Ableitung einer konstanten Funktion**
>
> $y = f(x) = c \Rightarrow y' = f'(x) = 0$

Der Graph einer konstanten Funktion y = f (x) = c ist eine Waagrechte. Die Steigung einer Waagrechten ist null. Dadurch wird auch anschaulich nahegelegt, dass die Ableitung an jeder Stelle null ist.

Ableitung der Potenzfunktion y = f (x) = x^n.

Bespielhaft soll die Ableitung der speziellen Potenzfunktion $y = x^3$ bestimmt werden.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right] \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right] = 3x^2.$$

Der Exponent 3 in der Potenzfunktion wird zum konstanten Faktor in der Ableitung, der Exponent in der Ableitung ist um 1 kleiner als der Exponent in der Funktion. Dies gilt, wie man zeigen kann, allgemein für *jede* Potenzfunktion mit beliebigem reellem Exponenten n.

> **Ableitung einer Potenzfunktion**
>
> $y = x^n,\ n \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$

Beispiel 4.4 : Ableitung von Potenzfunktionen

a) $y = x^5$; $y' = ?$

b) $y = x$; $y' = ?$

c) Bestimme die Steigung k der Tangente an den Graphen von $y = \sqrt{x}$ an der Stelle $x = 2$ sowie ihren Steigungswinkel α!

d) An welcher Stelle bzw. welchen Stellen besitzt die Funktion $y = \frac{1}{x}$ die Ableitung $-\frac{1}{2}$?

Lösung

Zu **a)** $y' = 5x^4$.

Zu **b)** $y' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$.

Der Graph von $y = x$ ist eine Gerade mit der Steigung $k = 1$, was durch die Ableitung bestätigt wird.

Zu **c)** $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $y' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

$k = y'(2) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = 0{,}354.$

Aus $\tan \alpha = k$ folgt $\alpha = \arctan 0{,}354 = 19{,}5°$.

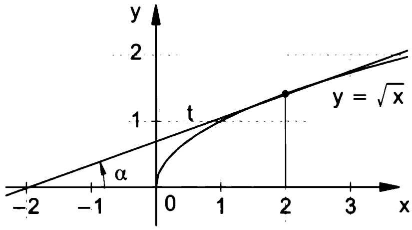


Abb. 4.9

Zu **d)**

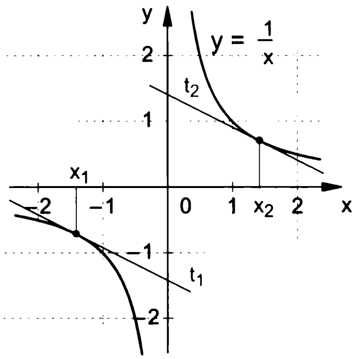


Abb. 4.10

$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$; $y' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$;

$-\frac{1}{x^2} = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2$;

daraus $x_1 = -\sqrt{2}$ sowie $x_2 = \sqrt{2}$.

Schnittwinkel zweier Graphen

Der Schnittwinkel φ der Graphen von $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ (Abb. 4.11) ist der Winkel zwischen den *Tangenten* im Schnittpunkt S der Graphen: $\varphi = \alpha - \beta$

Vorgangsweise:

(1) Aus der Gleichung $f_1(x) = f_2(x)$ wird die x-Koordinate x_0 des Schnittpunkts S bestimmt.

(2) $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ ableiten.
$\tan \alpha = f_1'(x_0)$, $\tan \beta = f_2'(x_0)$

(3) $\tan \varphi = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$; daraus φ

(siehe "Ingenieur-Mathematik 2", 1. Summensatz, Seite 142, oder Beispiel 5.15, Seite 143).

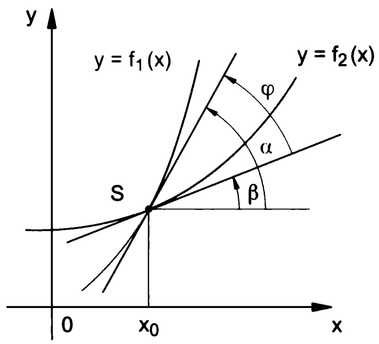


Abb. 4.11 Schnittwinkel zweier Graphen

Beispiel 4.5 : Schnittwinkel zweier Graphen

Berechne den Schnittwinkel zwischen den Graphen von $y = f_1(x) = \sqrt{x}$ und $y = f_2(x) = \frac{1}{x}$.

Lösung

(1) Ermittlung der x-Koordinate x_0 des Schnittpunktes:
$f_1(x) = f_2(x)$

$\sqrt{x} = \frac{1}{x}$ | quadrieren

$x = \frac{1}{x^2}$ $| \cdot x^2$

$x^3 = 1$ oder $x = x_0 = 1$.

(2) $f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$;

$\tan\alpha = f_1'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$; $\tan\beta = f_2'(x_0) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

(3) $\tan\varphi = \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\frac{1}{2} - (-1)}{1 + \frac{1}{2}\cdot(-1)} = 3 \Rightarrow \varphi = 71{,}6°$.

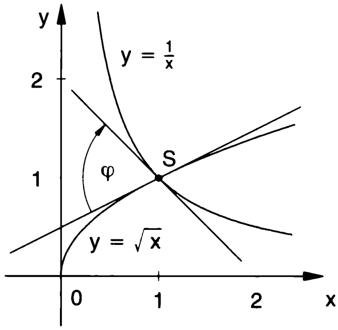


Abb. 4.12

Anmerkungen:

- Als Schnittwinkel kann auch der supplementäre Winkel zu φ genommen werden: $180° - 71{,}6° = 108{,}4°$.
- Bei einer Vertauschung von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist $\tan\varphi$ negativ. In diesem Fall addiert man 180° zu dem vom Taschenrechner angezeigten negativen Winkel.
- Bei einer graphischen Darstellung von Winkeln ist zu beachten, dass diese bei ungleichen Einheiten auf den beiden Koordinatenachsen verzerrt erscheinen.

Beispiel 4.6 : Normale auf einen Graphen

Ermittle die Gleichung der Normalen auf den Graphen von $y = f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Lösung

Es ist jene Gerade zu ermitteln, die normal auf der an der Stelle $x_0 = 1$ errichteten Tangente steht. Bezeichnet k_N die Steigung der Normalen, so lautet ihre Gleichung: $y = k_N \cdot x + d$.

Bestimmung von k_N:

Zwei Gerade stehen normal aufeinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen -1 ist: $k_N \cdot k = -1$ oder $k_N = -\frac{1}{k}$ (vgl. "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 230, Abb. 8.19), wobei $k = f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 ist.

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$; $k_N = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{2}$

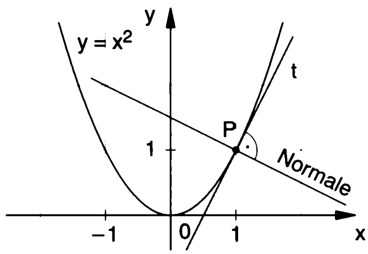


Abb. 4.13

Bestimmung von d:

Die Gerade geht durch den Berührpunkt P_0 der Tangente an der Stelle $x_0 = 1$. Die y-Koordinate von P_0 ist $f(1) = 1^2 = 1$. Einsetzen in die Normalengleichung ergibt:

$1 = -\frac{1}{2}\cdot 1 + d \Rightarrow d = \frac{3}{2}$.

Somit lautet die Gleichung der gesuchten Normalen: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Ableitung weiterer elementarer Funktionen

Die Ableitungen der folgenden elementaren Funktionen werden ohne Beweis angegeben.

Exponentialfunktionen	$y = e^x$ $y = a^x$	$y' = e^x$ $y' = a^x \cdot \ln a$
Logarithmusfunktionen	$y = \ln x$ $y = \log_a x$ $y = \lg x$	$y' = \frac{1}{x}$ $y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $y' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$
Kreisfunktionen ⚠ Winkel x im Bogenmaß!	$y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \tan x$	$y' = \cos x$ $y' = -\sin x$ $y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
Arkusfunktionen	$y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \lvert x \rvert < 1$ $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \lvert x \rvert < 1$ $y' = \frac{1}{1 + x^2}$
Hyperbelfunktionen	$y = \sinh x$ $y = \cosh x$ $y = \tanh x$	$y' = \cosh x$ $y' = \sinh x$ $y' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

Anmerkungen:

(1) Bemerkenswert ist die Ableitung der Exponentialfunktion $y = e^x$: *Sie ist die einzige Funktion, die sich selbst zur Ableitung und an der Stelle 0 den Wert 1 hat.*

Dadurch ist die besondere Stellung der Zahl e in Theorie und Anwendung begründet.

(2) Beachte den Unterschied in der Ableitung zwischen einer Potenzfunktion und einer Exponentialfunktion!

$y = x^2$, $y' = 2x$; aber: $y = 2^x$, $y' = 2^x \cdot \ln 2$.

Beispiel 4.7 : Sinusfunktion

Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Sinusfunktion $y = \sin x$ die x-Achse?

Lösung

Da die Sinusfunktion $y = \sin x$ periodisch mit der Periode 2π ist, brauchen nur die Nullstellen 0 und π untersucht zu werden.

$y' = \cos x$

$y'(0) = \cos(0) = 1$;

Steigung 1 bedeutet $\alpha = 45°$.

$y'(\pi) = \cos(\pi) = -1$;

Steigung -1 bedeutet $\alpha = 135°$ (oder $-45°$).

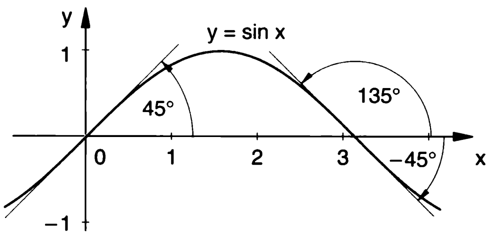


Abb. 4.14

Die Sinuslinie schneidet also die x-Achse abwechselnd unter 45° und 135° (oder −45°).

Im Überblick: Ableitung elementarer Funktionen

Konstante Funktion: $y = c$, $y' = 0$
Potenzfunktion: $y = x^n$, $y' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$
Exponentialfunktion: $y = e^x$, $y' = e^x$
Logarithmische Funktion: $y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$
Kreisfunktionen: $y = \sin x, y' = \cos x$; $y = \cos x, y' = -\sin x$; $y = \tan x, y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
(Winkel x im Bogenmaß!)
Weitere Funktionen: Seite 102.

Schnittwinkel zweier Graphen: Winkel zwischen ihren Tangenten im Schnittpunkt

Normale auf einen Graphen: Gerade, die normal auf der Tangente des Graphen an der betreffenden Stelle steht.

Aufgaben

4.5 Bilde die Ableitung der Funktion und berechne ihren Wert an der Stelle $x_0 = 1{,}5$

a) $y = x^3$ **b)** $y = x^8$ **c)** $y = \sqrt[3]{x}$ **d)** $y = \frac{1}{x^2}$
e) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **f)** $y = \left(\frac{1}{x}\right)^3$ **g)** $y = \left(\frac{1}{x^{-3}}\right)^2$ **h)** $y = x \cdot \sqrt{x}$
i) $y = x^2 \cdot \sqrt{x}$ **j)** $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$ **k)** $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$ **l)** $y = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}$
m) $y = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$ **n)** $y = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x}$ **o)** $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **p)** $y = \left(x^{-1} \cdot \sqrt[3]{x}\right)^2$

4.6 Ermittle an der Stelle x_0 Steigung und Steigungswinkel der Tangente an den Graphen der Funktion.

a) $y = x^2$; $x_0 = 1$ **b)** $y = \sqrt[3]{x}$; $x_0 = 2$ **c)** $y = e^x$; $x_0 = 0$
d) $y = 2^x$; $x_0 = 0$ **e)** $y = \ln x$; $x_0 = 1$ **f)** $y = \tan x$; $x_0 = 0$
g) $y = \cos x$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$ **h)** $y = \arcsin x$, $x_0 = 0$ **i)** $y = \sinh x$; $x_0 = 1$

4.7 An welcher Stelle besitzt der Steigungswinkel der Tangente an den Funktionsgraphen den Wert α?

a) $y = x^2$; $\alpha = 30°$ **b)** $y = \sqrt[3]{x}$; $\alpha = 25°$ **c)** $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\alpha = -30°$
d) $y = e^x$; $\alpha = 45°$ **e)** $y = \tan x$; $\alpha = 60°$ **f)** $y = \cosh x$; $\alpha = 45°$

4.8 Ermittle den Schnittwinkel zwischen den Graphen von:

a) $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$ für $x > 0$ **b)** $y = \frac{1}{x}$ und $y = \sqrt{x}$ **c)** $y = x$ und $y = \frac{1}{x^2}$
d) $y = \sin x$ und $y = \cos x$ für $0 < x < \pi$ **e)** $y = \cos x$ und $y = \tan x$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

4.9 Ermittle an der Stelle x_0 die Normale auf den Graphen von:

a) $y = x^3$, $x_0 = 1$ **b)** $y = e^x$, $x_0 = 0$ **c)** $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$
d) $y = \ln x$, $x_0 = 1$ **e)** $y = \sinh x$, $x_0 = 1$ **f)** $y = \arctan x$, $x_0 = 0$

4.10 An welcher Stelle besitzt der Graph von $y = \frac{1}{x}$ eine Tangente, die parallel zur Geraden $y = -\frac{x}{2} + 3$ verläuft?

4.3 Ableitungsregeln

In diesem Abschnitt geht es um fünf Regeln für die Praxis des Differenzierens: die *Faktor-* und die *Summenregel*, die *Produkt-* und *Quotientenregel* sowie die *Kettenregel*. Letztere schließt als wichtige Anwendungen die sogenannte *implizite* und die *logarithmische Differentiation* ein. Alle auftretenden Funktionen werden als differenzierbar vorausgesetzt.

> **Faktorregel**
> $y = a \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = a \cdot f'(x)$, wobei a eine Konstante ist.
> Ein konstanter Faktor a bleibt beim Differenzieren erhalten.

Beweis

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a \cdot f(x+\Delta x) - a \cdot f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \cdot f'(x)$$

Beispiel 4.8 : Faktorregel

Bilde die Ableitung:

a) $y = 2x$ **b)** $y = e^{1+x}$ **c)** $y = \frac{1}{2h^2}$ **d)** $y = x \cdot \ln 2$ **e)** $y = \sqrt{\frac{3x}{2}}$

Lösung

Zu **a)** $y' = 2 \cdot 1 = 2$;
das Ergebnis bestätigt die Tatsache, dass $y = 2x$ die Gleichung einer Geraden mit der Steigung $k = 2$ ist.

Zu **b)** $y = e^{1+x} = e \cdot e^x$; e ist ein konstanter Faktor, daher: $y' = e \cdot e^x = e^{1+x}$

Zu **c)** $y = \frac{1}{2h^2} = \frac{1}{2} \cdot h^{-2}; \quad y' = \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot h^{-2-1} = -\frac{1}{h^3}$

Zu **d)** $y' = \ln 2$

Zu **e)** $y = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot x} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}; \quad y' = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2x}}$

> **Summenregel**
> $y = u(x) \pm v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x) \pm v'(x)$.
> Kurz: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
> Eine Summe oder Differenz von Funktionen kann gliedweise differenziert werden.

Beispiel 4.9 : Summenregel

Bilde die Ableitung:

a) $y = x^3 + 4$ **b)** $y = -x^2 + 2x + 1$ (Beispiel 4.3 a) **c)** $y = 2 \cdot \sin t + 3 \cdot \cos t$
d) $y = \frac{x-3}{3}$ **e)** $y = \ln(2p)$ **f)** $y = x \cdot (2x - 5)$

Lösung

Zu **a)** $y' = 3x^2 + 0 = 3x^2$, da die Ableitung der konstanten Funktion $y = 4$ gleich null ist. Der Summand 4 verschiebt den Graphen von $y = x^3$ um 4 Einheiten in y-Richtung und hat daher keinen Einfluss auf die Ableitung.

Zu **b)** $y = (-1)\cdot x^2 + 2x + 1$; (-1) und 2 sind konstante Faktoren, die erhalten bleiben.
$y' = (-1)\cdot 2x + 2 + 0 = 2\cdot(1 - x)$

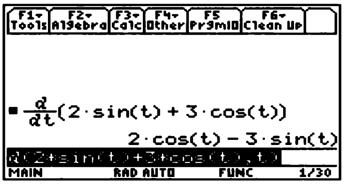
Zu **c)** $y' = 2\cdot\cos t + 3\cdot(-\sin t) = 2\cdot\cos t - 3\cdot\sin t$

Zu **d)** $y = \frac{x-3}{3} = \frac{x}{3} - 1 = \frac{1}{3}\cdot x - 1$; $y' = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

Zu **e)** $y = \ln 2 + \ln p$ (erstes logarithmisches Rechengesetz); $y' = 0 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$

Zu **f)** $y = 2x^2 - 5x$; $y' = 2\cdot 2x^1 - 5\cdot 1 = 4x - 5$

TI 89



In den Anwendungen wird öfters eine Funktion $y = f(x)$ um eine Stelle x_0 näherungsweise durch ihre Tangente an dieser Stelle ersetzt: Man nennt dies **Linearisierung** der Funktion. Ein Beispiel ist die Linearisierung einer Kennlinie um einen Betriebspunkt P_0.

Beispiel 4.10 : Linearisierung einer Funktion

Linearisiere die Funktion $y = f(x) = 0{,}2\cdot x^2 + 0{,}5\cdot x + 1$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Lösung

Gleichung der Tangente t: $y = k\cdot x + d$; $k = ?$ $d = ?$

(1) Bestimmung von k:
$f'(x) = 0{,}2\cdot 2x + 0{,}5 = 0{,}4\cdot x + 0{,}5$
$k = f'(x_0) = f'(2) = 1{,}3$.

(2) Bestimmung von d:
y-Koordinate des Berührpunktes P_0:
$f(2) = 0{,}2\cdot 2^2 + 0{,}5\cdot 2 + 1 = 2{,}8$; $P_0(2/2{,}8)$
Einsetzen der Koordinaten von P_0 in die Tangentengleichung:
$2{,}8 = 1{,}3\cdot 2 + d \Rightarrow d = 0{,}2$.
Damit lautet die Gleichung der Tangente t:
$y = 1{,}3\cdot x + 0{,}2$.

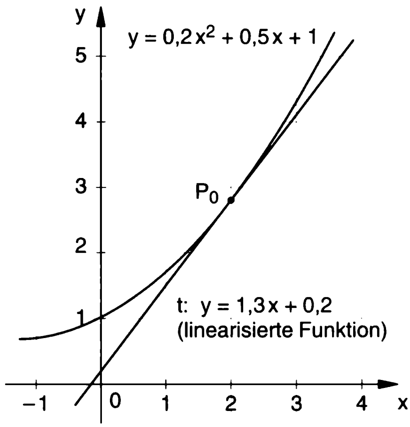


Abb. 4.15 Linearisierung einer Funktion

Es gilt: $0{,}2\cdot x^2 + 0{,}5\cdot x + 1 \approx 1{,}3\cdot x + 0{,}2$ um den "Betriebspunkt" P_0. Die Näherung ist umso besser, je näher die betrachtete Stelle bei $x_0 = 2$ liegt.

Beispiel 4.11 : Schnittwinkel zwischen zwei Tangenten

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{5}\cdot x\cdot(x - 3)\cdot(x - 5)$.

Ermittle an den Stellen $x_1 = 5$ und $x_2 = 1$

a) die Gleichungen der Tangenten, **b)** den Schnittwinkel zwischen den Tangenten.

Lösung

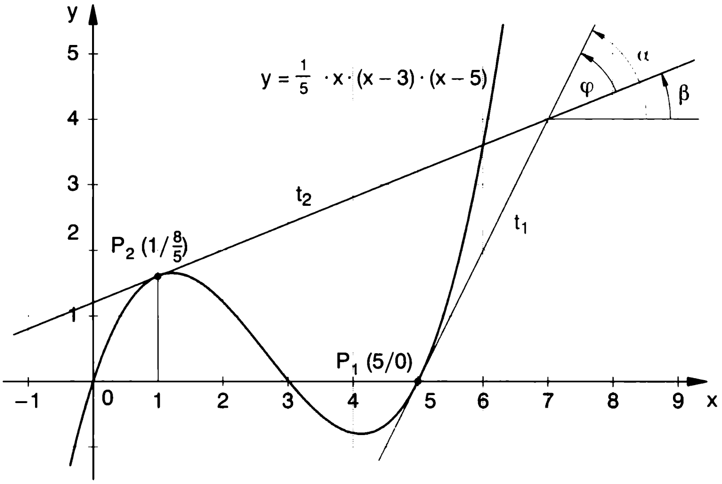


Abb. 4.16

Zu **a)** $y = \frac{1}{5} \cdot x \cdot (x-3) \cdot (x-5) = \frac{1}{5} \cdot x^3 - \frac{8}{5} \cdot x^2 + 3x$

$y' = \frac{1}{5} \cdot 3x^2 - \frac{8}{5} \cdot 2x + 3 = \frac{3}{5} \cdot x^2 - \frac{16}{5} \cdot x + 3;$

Gleichung der Tangente t_1 an der Stelle $x_1 = 5$: $y = k_1 \cdot x + d_1$

Steigung $k_1 = f'(5) = \frac{3}{5} \cdot 5^2 - \frac{16}{5} \cdot 5 + 3 = 2;$

y-Koordinate des Berührpunktes P_1: $f(5) = 0$; $P_1\,(5/0)$.

Einsetzen der Koordinaten von P_1 in die Tangentengleichung:

$0 = 2 \cdot 5 + d_1 \quad \Rightarrow \quad d_1 = -10.$

Damit erhält man t_1: $y = 2x - 10$.

Gleichung der Tangente t_2 an der Stelle $x_2 = 1$: $y = k_2 \cdot x + d_2$

Steigung $k_2 = f'(1) = \frac{3}{5} \cdot 1^2 - \frac{16}{5} \cdot 1 + 3 = \frac{2}{5}$; für d_2 erhält man $\frac{6}{5}$ (rechne nach!).

Damit lautet die Gleichung der Tangente t_2: $y = \frac{2}{5} \cdot x + \frac{6}{5}$.

Zu **b)** Für die Berechnung des Schnittwinkels kann mit den Bezeichnungen aus Abb. 4.16 geschrieben werden:

$\tan \varphi = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}.$

Mit $\tan \alpha = k_1$ und $\tan \beta = k_2$ ergibt sich $\tan \varphi = \frac{8}{9}$ und daraus als Schnittwinkel $\varphi = 41{,}6°$.

Produktregel

Wir betrachten nun Funktionen der Form $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, die also das *Produkt* zweier Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ sind.

Die Vermutung, dass die Ableitung eines Produktes gleich dem Produkt der Ableitungen der Faktoren ist, kann mit einem einfachen Beispiel widerlegt werden.

Beispiel: $y = x^5 = x^2 \cdot x^3 = u(x) \cdot v(x)$; $u'(x) = 2x$, $v'(x) = 3x^2$. $u'(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3$ als Ableitung von $y = u(x) \cdot v(x)$ ist offenbar falsch, da $y' = 5x^4$ sein muss!

Die folgende Vorschrift zur Ableitung eines Produktes $u(x) \cdot v(x)$ wird ohne Beweis angegeben.

Produktregel
$y = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.
Kurz: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Achtung!
$(u \cdot v)' \neq u' \cdot v'$

Beispiel 4.12 : Produktregel

Bilde die Ableitung von

a) $y = x^2 \cdot x^3$ **b)** $y = (x^2 - 2x + 1) \cdot (3x + 1)$ **c)** $y = 3 \cdot x^4$
d) $y = \sin 2x$ **e)** $y = \sin^2 x$ **f)** $y = x \cdot \ln \frac{1}{x}$.

Lösung

Zu **a)** $u = x^2$, $u' = 2x$; $v = x^3$, $v' = 3x^2$;
$y' = u' \cdot v + u \cdot v' = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4$.

Zu **b)** $u = x^2 - 2x + 1$, $u' = 2x - 2$; $v = 3x + 1$, $v' = 3$;
$y' = u' \cdot v + u \cdot v' = (2x - 2) \cdot (3x + 1) + (x^2 - 2x + 1) \cdot 3 = 9x^2 - 10x + 1$.
Natürlich hätte man hier auch zuerst ausmultiplizieren können.

Zu **c)** $u = 3$, $u' = 0$ (konstante Funktion); $v = x^4$, $v' = 4x^3$; $y' = 0 \cdot x^4 + 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$.
Das gleiche Ergebnis hätte man einfacher mit der Faktorregel erhalten: Die Faktorregel ist ein Spezialfall der Produktregel, bei der $u = a$ eine konstante Funktion ist.

Zu **d)** $y = \sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$; $u = 2\sin x$, $u' = 2\cos x$; $v = \cos x$, $v' = -\sin x$;
$y' = 2\cos x \cdot \cos x + 2\sin x \cdot (-\sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x$
(Sonderfall des 1. Summensatzes).

Zu **e)** $y = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$; $u = v = \sin x$, $u' = v' = \cos x$;
$y' = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$
(Sonderfall des 1. Summensatzes).

Zu **f)** Wegen $\ln \frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = 0 - \ln x = -\ln x$ ist $y = -x \cdot \ln x$;
$y' = (-1) \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = -(1 + \ln x)$.
Beim Ableiten von Funktionen, die einen Logarithmus enthalten, kann die Anwendung der logarithmischen Rechengesetze hilfreich sein!

Beispiel 4.13 : Mehrfache Anwendung der Produktregel

Bilde die Ableitung von **a)** $y = x \cdot e^x \cdot \sin x$ **b)** $y = x^2 \cdot e^{2x}$.

Lösung

Zu **a)** Wir schreiben das Produkt etwa in der Form $y = (x \cdot e^x) \cdot \sin x$ und setzen dementsprechend: $u = x \cdot e^x$ und $v = \sin x$;

$u(x)$ ist selbst das Produkt zweier Funktionen, weshalb hier die Produktregel ergibt:

$u' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x) \cdot e^x$;

$v' = \cos x$; damit erhält man schließlich:

$y' = u' \cdot v + u \cdot v' = (1 + x) \cdot e^x \cdot \sin x + x \cdot e^x \cdot \cos x = e^x(\sin x + x \cdot \sin x + x \cdot \cos x)$.

Zu **b)** $y = u(x) \cdot v(x)$ mit $u = x^2$ und $v = e^{2x} = e^{x+x} = e^x \cdot e^x$; $u' = 2x$, $v' = e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x = 2 \cdot e^{2x}$;

$y' = u' \cdot v + u \cdot v' = 2x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot 2 \cdot e^{2x} = 2x \cdot (1 + x) \cdot e^{2x}$.

Quotientenregel

Auch für die Ableitung einer Funktion in der Form $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ gibt es eine Regel. Zu ihrer Herleitung schreiben wir diese Gleichung in $y(x) \cdot v(x) = u(x)$ um und wenden dann die Produktregel an: $y' \cdot v + y \cdot v' = u'$. Daraus: $y' = \frac{u' - y \cdot v'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v} \cdot v'}{v} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Quotienten- oder Bruchregel

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (\text{für } v(x) \neq 0)$$

Achtung!

$$\left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'}$$

Beispiel 4.14 : Quotientenregel

Bilde die Ableitung von

a) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{s^2 + 1}$ **c)** $y = e^{-x}$ **d)** $y(t) = \frac{a - t}{a + t}$, a Konstante.

Lösung

Zu **a)** $y = \frac{u}{v}$ mit $u = x^2 - 1$ und $v = x$; $u' = 2x$, $v' = 1$

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Einfacher hätte man hier ohne Verwendung der Quotientenregel rechnen können:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x} = x - x^{-1};\ y' = 1 - (-1)x^{-1-1} = 1 + x^{-2} = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Zu **b)** $u = 1$; $u' = 0$; $v = s^2 + 1$, $v' = 2s$; $y' = \frac{0 \cdot (s^2 + 1) - 1 \cdot 2s}{(s^2 + 1)^2} = -\frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$.

Zu **c)** $y = \frac{1}{e^x}$, $u = 1$, $u' = 0$; $v = e^x$, $v' = e^x$; $y' = \frac{0 \cdot e^x - 1 \cdot e^x}{(e^x)^2} = -\frac{e^x}{e^x \cdot e^x} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}$.

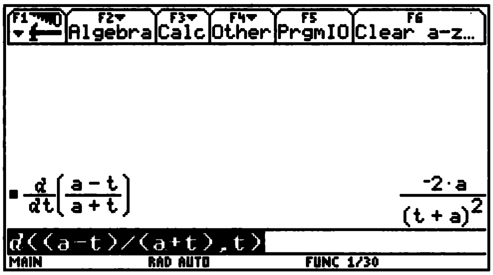
Einfacher rechnet man hier mit der nächsten zu besprechenden Regel, der Kettenregel.

Zu **d)** Die Schreibweise y(t) drückt aus, dass in der vorliegende Funktion t die unabhängige Variable ist und nicht a. In diesem Fall könnte man davon absehen, a als Konstante zu bezeichnen.

$u = a - t, \;\; u' = 0 - 1 = -1; \;\; v = a + t, \;\; v' = 0 + 1 = 1;$

$$y'(t) = \frac{(-1)\cdot(a+t) - (a-t)\cdot 1}{(a+t)^2} = \frac{-a-t-a+t}{(a+t)^2} = -\frac{2a}{(a+t)^2}$$

Voyage 200



Kettenregel

Die Funktion y = sin x ergibt abgeleitet y' = cos x. Aber schon die Ableitung der etwas veränderten Funktion y = sin (2x) lautet nicht mehr y' = cos (2x), sondern nach Beispiel 4.14 d) $y' = 2\cdot\cos(2x)$. In der Sinusfunktion (Abb. 4.17) y = sin z als "äußerer" Funktion steckt noch die lineare Funktion z = 2x als "innere" Funktion. Man nennt daher y = sin (2x) eine *zusammengesetzte*, *verschachtelte* oder auch *verkettete* Funktion.

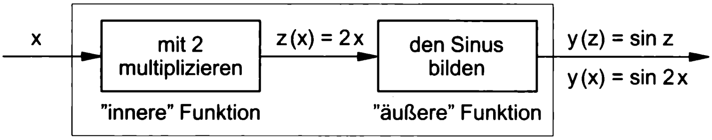


Abb. 4.17 Verkettung einer Funktion aus einfachen Funktionen

In der Regel lassen sich alle in der Praxis auftretenden Funktionen auf eine Verkettung zweier oder auch mehrerer einfacher Funktionen zurückführen. Das Erkennen einer solchen Verkettung ist für das Differenzieren bedeutsam, wenn man die sogenannte *Kettenregel* anwendet: Diese Regel ermöglicht es nämlich, die Ableitung einer verketteten Funktion auf die Ableitung der "Glieder" dieser Verkettung zurückzuführen.

Beispiel 4.15 : Verkettung von Funktionen

Ermittle die Art der Verkettung von **a)** $y = \sin(x^2)$ **b)** $y = \sin^2 x$ **c)** $y = \sin^2(2x)$.

Lösung

Man kann sich in Gedanken vorstellen, dass man die Berechnung eines Funktionswertes y = f(x) nach Eingabe von x mit Hilfe eines Taschenrechners ablaufen lässt. Dabei erkennt man gut die nacheinander in der Verkettung enthaltenen einfachen Funktionen. Wie beim Klammerauflösen geht man von "innen" nach "außen" vor.

Zu **a)** 1. Schritt: $z(x) = x^2$, quadratische Funktion als innere Funktion (z "Zwischenwert")
2. Schritt: $y(z) = \sin z$, Sinusfunktion als äußere Funktion

Zu **b)** 1. Schritt: $z(x) = \sin x$, Sinusfunktion als innere Funktion
2. Schritt: $y(z) = z^2$, quadratische Funktion als äußere Funktion

Zu **c)** 1. Schritt: $z(x) = 2x$, lineare Funktion
2. Schritt: $w(z) = \sin z$, Sinusfunktion
3. Schritt: $y(w) = w^2$, quadratische Funktion

Die im Folgenden ohne Herleitung angegebene Kettenregel ist eine der wichtigsten Regeln der Differentialrechnung. Sie lässt sich einprägsam schreiben, wenn man die Ableitungen als Differentialquotienten schreibt:

Kettenregel

$$y = y(z(x)) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{dy}{dz}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{dz}{dx}}_{\text{innere Ableitung}}$$

Die Ableitung einer verketteten (zusammengesetzten) Funktion ist gleich dem **Produkt** aus **äußerer** und **innerer** Ableitung.

Dabei bezeichnet "äußere Ableitung" die Ableitung der äußeren Funktion $y = y(z)$ und "innere Ableitung" jene der inneren Funktion $z = z(x)$. Bei einer Verkettung von mehr als zwei Funktionen ergibt sich die Ableitung als Produkt der Ableitungen aller "Glieder".

Beispiel 4.16 : Kettenregel

Bilde die Ableitung von

a) $y = \sin(2x)$ **b)** $y = \sin(x^2)$ **c)** $y = \sin^2 x$ **d)** $y = \sin^2(2x)$.

Lösung

Zu **a)** $z(x) = 2x,\ \frac{dz}{dx} = 2;\ y(z) = \sin z,\ \frac{dy}{dz} = \cos z;$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \underbrace{(\cos z)}_{\text{Ableitung von } y = \sin z} \cdot \underbrace{2}_{\text{Ableitung von } z = 2x} = 2 \cdot \cos 2x$$

Zu **b)** $z(x) = x^2;\ y(z) = \sin z,$

$$y'(x) = \underbrace{(\cos z)}_{\text{Ableitung von } y = \sin z} \cdot \underbrace{2x}_{\text{Ableitung von } z = x^2} = 2x \cdot \cos(x^2)$$

Zu **c)** $z(x) = \sin x;\ y(z) = z^2;$

$$y'(x) = \underbrace{2z}_{\text{Ableitung von } y = z^2} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{Ableitung von } z = \sin x} = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin(2x)$$

Zu **d)** $z(x) = 2x;\ w = \sin z,\ y = w^2;$

$$y'(x) = \underbrace{2w}_{\text{Ableitung von } y = w^2} \cdot \underbrace{\cos z}_{\text{Ableitung von } w = \sin z} \quad \underbrace{2}_{\text{Ableitung von } z = 2x}$$

Schrittweises Zurückeinsetzen ergibt (unter Anwendung der Regel $2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$): $4 \cdot \sin z \cdot \cos(2x) = 4 \cdot \cos(2x) \cdot \sin(2x) = 2 \cdot \sin(4x)$.

Beispiel 4.17 : Exponentielles Wachstum mit Sättigungsgrenze

Das exponentielle Wachstum mit einer Sättigungsgrenze S (Einschalten eines Gleichstroms, Laden eines Kondensators, Erwärmung einer Maschine, "Sprungantwort" einer Regelstrecke 1. Ordnung) erfolgt nach der Gleichung $y = f(t) = S \cdot (1 - e^{-t/\tau})$, $t \geqslant 0$ s, wobei τ eine Konstante ("Zeitkonstante") ist. Zeige, dass die Tangente an der Stelle $t_0 = 0$ die Gerade $y = S$ an der Stelle τ schneidet.

Lösung

Gleichung der Tangente t: $y = k \cdot t + d$

$f'(t) = S \cdot \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$; $k = f'(0) = S \cdot \frac{1}{\tau}$.

y-Koordinate des Berührpunktes P_0:

$f(0) = S \cdot (1 - e^{0/\tau}) = S \cdot (1 - 1) = 0$; Einsetzen der Koordinaten von P_0 in die Tangentengleichung:

$0 = S \cdot \frac{1}{\tau} \cdot 0 + d \quad \Rightarrow \quad d = 0.$

Damit lautet die Gleichung der Tangente t: $y = \frac{S}{\tau} \cdot t$.

$f(\tau) = \frac{S}{\tau} \cdot \tau = S$, was zu zeigen war. Abb. 4.18 zeigt den Funktionsgraphen und die Tangente im Ursprung für $S = 3$ und $\tau = 2$.

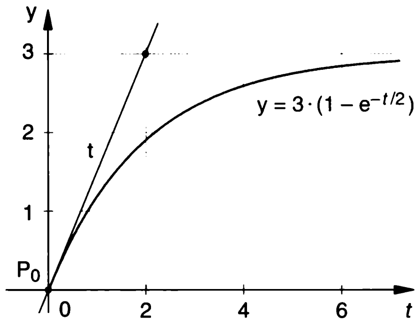


Abb. 4.18 Tangente an Sättigungskurve

Implizite Differentiation

Beispiel 4.18 : Kreistangente

Ermittle die Gleichung der Tangente an den Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ im Kreispunkt $P_0(x_0/y_0 > 0)$, wenn $r = 5$ und $x_0 = 3$ ist.

Lösung

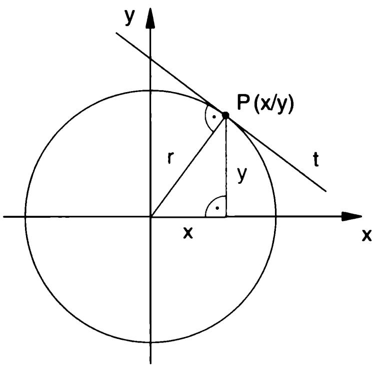


Abb. 4.19

Abb. 4.19 zeigt, dass ein Punkt P genau dann auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung ("Ursprungskreis") und dem Radius r liegt, wenn für seine Koordinaten x und y gilt: $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$. Dies ist die zugehörige "Gleichung" für einen solchen Kreis.

In unserem Fall ergibt sich aus $r = 5$ und $x_0 = 3$ die gewünschte positive y-Koordinate des Kreispunktes P_0: $y_0 = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Auf Seite 93 wurde – was nur in Ausnahmefällen möglich ist – ohne Verwendung der Differentialrechnung die Gleichung der Tangente hergeleitet:

$t\colon y = -\frac{x_0}{y_0} \cdot x + \frac{r^2}{y_0} = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{25}{4}.$

Es soll nun die Tangentengleichung über die Ableitung ermittelt werden.

1. Lösungsvariante: Aus der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ erhält man $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$, wobei $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ die Funktionsgleichung der für uns in Frage kommenden "oberen" Kreislinie, während $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ jene der "unteren" Kreislinie ist.

Gleichung der Tangente: $y = k \cdot x + d$ mit $k = y'(3)$.

Wir bilden die Ableitung von $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ mit Hilfe der Kettenregel:

$z(x) = r^2 - x^2$, $\frac{dz}{dx} = -2x$; $y(z) = \sqrt{z} = z^{1/2}$, $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2} \cdot z^{1/2-1} = \frac{1}{2} \cdot z^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$;

$$y' = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{z}}}_{\substack{\text{äußere}\\ \text{Ableitung}}} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\substack{\text{innere}\\ \text{Ableitung}}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Daher: $k = y'(3) = -\frac{3}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$.

Einsetzen der Koordinaten $x_0 = 3$ und $y_0 = 4$ des Berührpunktes P_0 in die Tangentengleichung $y = -\frac{3}{4}x + d$ ergibt $d = \frac{25}{4}$.

2. Lösungsvariante: Wir leiten sofort die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ab. Dabei ist zu beachten, dass y (bei Beschränkung auf die obere Kreislinie) eine Funktion von x ist, nämlich $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Die Ableitung von $[y(x)]^2 = z^2$ mit $z = y(x)$ ist daher nach der Kettenregel zu bilden:

Äußere Ableitung: $(z^2)' = 2z = 2 \cdot y(x)$;

innere Ableitung: $z'(x) = y'(x)$.

Somit: $2x + 2y \cdot y' = 0$.

Auf der rechten Seite der Gleichung steht eine Konstante, die beim Differenzieren null wird.

Daraus: $y' = -\frac{x}{y}$ und $y'(x_0) = -\frac{x_0}{y_0} = -\frac{3}{4}$.

Die weitere Rechnung verläuft wie bei der 1. Lösungsvariante.

Die bisher behandelten Funktionen waren meist in der Form $y = f(x)$ gegeben.

Beispiele: $y = \frac{1}{2} \cdot x$, $y = x^2 - 3x + 1$, $y = \sin^2 x$.

Dabei ist die Funktionsgleichung nach der abhängigen Variablen y aufgelöst, die abhängige Variable y steht allein auf einer Seite. In diesem Fall spricht man von einer **expliziten** Darstellung einer Funktion.

Ist dies nicht der Fall, d.h. kommen auf mindestens einer der beiden Gleichungsseiten beide Variablen x und y vor, so spricht man von einer **impliziten** Darstellung der Funktion.

Beispiele: $2y - x = 4$, $y + 3x - x^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 = r^2$ (mit $y \geqslant 0$), $\ln(x + y) - \sin y - 1 = 0$.

Vorsicht! Häufig liegt keine implizite Darstellung einer Funktion, sondern die einer Relation vor (siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 169). So ist etwa die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ keine *Funktions*gleichung mehr, da gilt: $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ oder $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. Erst mit der Beschränkung auf eine der beiden Gleichungen erhält man eine Funktion. Funktionen sind definitionsgemäß eindeutige Zuordnungen! Im Folgenden wird gegebenenfalls in diesem Sinn eine Beschränkung auf eine Funktion vorausgesetzt.

Im Beispiel 4.18 wurde eine implizit dargestellte Funktion nach der abhängigen Variablen y aufgelöst und danach abgeleitet. Oft lassen sich jedoch implizit dargestellte Funktionen nur schwer oder überhaupt nicht explizit darstellen. In einem solchen Fall kann wie im erwähnten Beispiel die sogenannte *implizite Differentiation* angewendet werden:

Implizite Differentiation

Bezeichnet x die unabhängige und y die abhängige Variable, so differenziert man gliedweise jeden Term der Funktionsgleichung nach x. Jeder Term, der y enthält, ist mit der *Kettenregel* abzuleiten, da y eine Funktion von x ist. Anschließend löst man die erhaltene Gleichung nach y'.

Beispiel 4.19 : Implizite Ableitung

Bestimme die Ableitung y' an der Stelle x_0:

a) $y = \sqrt{x}$ aus der impliziten Darstellung $y^2 = x$, $x_0 = 1$

b) $y = \arcsin x$ aus der impliziten Darstellung $x = \sin y$, $x_0 = 0{,}8$

c) $x^2 = y^3$, $x_0 = 2$

d) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, $x_0 = 3$, $y_0 > 0$

e) $y = x^{2x}$ $(x > 0)$ *nach Logarithmieren* der Funktionsgleichung, $x_0 = 1$

Lösung

Zu **a)** $y^2 = x;\ 2y \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2y};\ y'(1) = \frac{1}{2 \cdot y(1)} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2};$

zum Vergleich die "explizite" Differentiation:

$y = \sqrt{x} = x^{1/2},\ y' = \frac{1}{2} \cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Zu **b)** $x = \sin y;$

$1 = (\cos y) \cdot y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};\ y'(0{,}8) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}} = 1{,}67.$

Zu **c)** $y = \sqrt[3]{x^2};\ y(2) = \sqrt[3]{4};$

$2x = 3y^2 \cdot y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2x}{3y^2};\ y'(2) = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot \left(\sqrt[3]{4}\right)^2} = 0{,}529.$

Zu **d)** $y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$; wegen $y_0 > 0$ ist $y_0 = +\sqrt{\frac{3^2}{4} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5};$

$\frac{2x}{4} - 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x}{4y};\ y'(3) = \frac{3}{4 \cdot y(3)} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{5}} = 0{,}671.$

Zu **e)** Abb. 4.20 zeigt den Graphen der Funktion.

Wir logarithmieren die Funktionsgleichung vor dem Differenzieren:

$\ln y = \ln x^{2x} = 2x \cdot \ln x$

$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot (1 + \ln x);$

$y' = y \cdot 2 \cdot (1 + \ln x) = 2 \cdot x^{2x} \cdot (1 + \ln x).$

Das hier angewendete Verfahren, *Differenzieren nach Logarithmieren*, wird als **logarithmische Differentiation** bezeichnet.

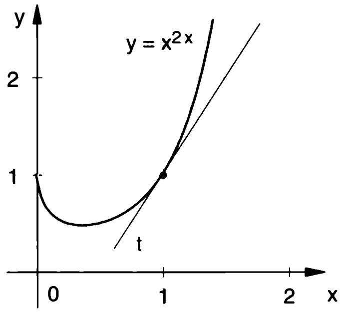


Abb. 4.20

Im Überblick: Ableitungsregeln

Faktorregel: $y = a \cdot f(x) \Rightarrow y' = a \cdot f'(x)$, wobei a eine Konstante ist.
Ein konstanter *Faktor* a bleibt beim Differenzieren erhalten.

Summenregel: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
Eine Summe oder Differenz von Funktionen kann gliedweise differenziert werden.

Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Man leitet im Produkt stets nur einen Faktor ab und addiert dann.

Quotienten- oder Bruchregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ (für $v(x) \neq 0$)

Kettenregel: $y = y(z(x)) \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$.
Die Ableitung einer verketteten (zusammengesetzten) Funktion ist gleich dem **Produkt** aus **äußerer** und **innerer** Ableitung.

Implizite Differentiation: Bezeichnet x die unabhängige und y die abhängige Variable, so differenziert man gliedweise jeden Term der Funktionsgleichung nach x. Jeder Term, der y enthält, ist mit der *Kettenregel* abzuleiten, da y eine Funktion von x ist. Anschließend löst man die erhaltene Gleichung nach y'.

Logarithmische Differentiation: Implizite Differentiation nach Logarithmieren der Funktionsgleichung.

Aufgaben

Faktor-, Summenregel

Differenziere die Funktionen in den Aufgaben 4.11 bis 4.17.

4.11 **a)** $y = x^3$ **b)** $y = 2x^2$ **c)** $y = \frac{x}{2}$ **d)** $y = 2x^{-1}$ **e)** $y = \frac{1}{3x}$
f) $y = \frac{1}{x^2}$ **g)** $y = \frac{1}{4x^3}$ **h)** $y = (3x)^2$ **i)** $y = \sqrt[3]{x}$ **j)** $y = x \cdot \sqrt{x}$
k) $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$ **l)** $y = \sqrt{2x}$ **m)** $y = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ **n)** $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$ **o)** $y = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}$

4.12 **a)** $y = \ln \frac{x}{5}$ **b)** $y = \ln \frac{1}{5x}$ **c)** $y = \ln \sqrt{x}$ **d)** $y = \ln \sqrt{2x}$ **e)** $y = \lg \frac{x^2}{10}$
Hinweis: Vereinfache zuerst mit Hilfe der logarithmischen Rechengesetze.

4.13 **a)** $y = 2x^2 + 2x + 1$ **b)** $y = x + x^{-1}$ **c)** $y = x^4 + 4x^2 + 2x + 5$
d) $y = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x}$ **e)** $y = \frac{1}{2x^3} - \frac{4}{x^2} + 2^{-2}x + 5$ **f)** $y = \frac{x+1}{2}$
g) $y = \frac{x+1}{x}$ **h)** $y = \frac{x^2+1}{2x}$ **i)** $y = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{2x}}$

4.14 **a)** $y = -\cos x + 3 \cdot \tan x$ **b)** $y = \frac{\sin x}{2 \cdot \cos x}$ **c)** $y = \frac{x}{2} + e^x$
d) $y = \frac{3x^2 - 2^x}{2}$ **e)** $y = \ln x + \ln 2$ **f)** $y = x + 3 \cdot \lg x$

4.15 **a)** $y = (2x - 5) \cdot x$ **b)** $y = (2x + 1)^2$ **c)** $y = x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x + 1)$
d) $y = \sqrt{x} + 2x^2 + \frac{1}{x}$ **e)** $y = \left(1 + \sqrt{x}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{x}\right)$ **f)** $y = \sqrt{x} \cdot (1 + x + \sqrt{x})$

4.16 **a)** $y(x) = (a \cdot x + 2) \cdot (3 - a \cdot x^2)$ **b)** $f(t) = \sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{a} + a \cdot t^2$
c) $f(x) = \frac{x^{-2}}{b} + \frac{b^2}{x^{-2}} + \frac{x^{1/2}}{2}$ **d)** $f(h) = h \cdot \sqrt{a} + \frac{\sqrt[3]{h}}{a} + \frac{a^2 \cdot h}{2} + 2$

4.17 **a)** $f(x) = s \cdot x^2 + t$ **b)** $f(s) = s \cdot x^2 + t$ **c)** $f(t) = s \cdot x^2 + t$ **d)** $f(x) = s \cdot t \cdot x + 5$
e) $f(s) = s \cdot t \cdot x + 5$ **f)** $f(t) = s \cdot t \cdot x + 5$ **g)** $f(x) = s^2 \cdot x + s \cdot x^2$ **h)** $f(s) = s^2 \cdot x + s \cdot x^2$

4.18 Berechne an der Stelle x_0 die Steigung der Tangente an den Graphen von:
a) $y = 2x^2 - 5,\ x_0 = 1$ **b)** $y = \frac{1}{x},\ x_0 = -3$ **c)** $y = \sqrt{x} + 2x - 3,\ x_0 = 3$
d) $f(x) = \frac{e^x}{2},\ x_0 = 0$ **e)** $y = -\sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$ **f)** $y = x + \sin x,\ x_0 = -2$

4.19 Ermittle die Gleichung der Tangente im Punkt P_0 des Graphen der Funktion:
a) $y = 0{,}5x^3,\ P(-3/y_0)$ **b)** $y = x^2 - 1,\ P(0/y_0)$ **c)** $y = (x - 1)^2,\ P(-2/y_0)$
d) $y = 3\sin x,\ P(-\frac{\pi}{4}/y_0)$ **e)** $f(x) = x + \cos x,\ P(-1/y_0)$ **f)** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x,\ P(-2/y_0)$

4.20 In welchem Punkt Q des Graphen hat die Tangente die Steigung k?
a) $y = 2x^2 + 1,\ k = 0$ **b)** $y = (x + 2)^2,\ k = 0{,}5$ **c)** $y = \frac{1}{2} \cdot \lg x,\ k = 1$
d) $y = -2 \cdot e^x,\ k = -2$ **e)** $y = \frac{1}{2^{-x}},\ k = 1$ **f)** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x},\ k = 2$

4.21 In welchem Punkt bzw. welchen Punkten des Graphen hat in $[0, 2\pi]$ die Tangente die Steigung k?
a) $f(x) = \sin x,\ k = 0{,}5$ **b)** $f(x) = -\sin x,\ k = 0{,}9$
c) $y = x + \sin x,\ k = 0$ **d)** $y = 2x + \cos x,\ k = 1$

4.22 In welchem Punkt P des Funktionsgraphen ist der Steigungswinkel der Tangente gleich α?
a) $y = -3x^2,\ \alpha = 45°$ **b)** $y = 2x^2 - 3,\ \alpha = 135°$ **c)** $y = -(x + 3)^2,\ \alpha = 120°$
d) $f(x) = y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}\ \alpha = 60°$ **e)** $y = \ln \frac{x}{2},\ \alpha = 45°$ **f)** $y = -x + e^x,\ \alpha = 60°$

4.23 Stelle die Gleichung(en) der Tangente(n) auf, deren Steigungswinkel $\alpha = 135°$ beträgt:
a) $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ **b)** $y = 2x^3 - 4x^2 + 5$
c) $y = -0{,}25x^3 + x^2 - x - 0{,}25$ **d)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4.24 Bestimme die Gleichungen aller waagrechten Tangenten des Graphen von:
a) $y = 2x^2 + 4x - 1$ **b)** $y = (x - 2)^2 + 4$ **c)** $y = -(x - 1)^3$ **d)** $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$

4.25 Berechne den Schnittwinkel zwischen den Tangenten in den Punkten P und Q des Funktionsgraphen:
a) $y = -(x - 2)^2 + 2,\ P(0/y_1),\ Q(1/y_2)$ **b)** $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 1,\ P(0/y_1),\ Q(3/y_2)$
c) $y = \ln x,\ P(0{,}5/y_1),\ Q(3/y_2)$ **d)** $y = \frac{1}{2}e^x - 2,\ P(-1/y_1),\ Q(2/y_2)$

4.26 Welche Parabel der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ geht durch die Punkte P(3/0) und Q(5/6) und hat in P die Steigung 2?

4.27 Der Graph einer Polynomfunktion 2. Grades schneidet bei $x = 1$ die x-Achse und bei $y = 3$ die y-Achse. Die Steigung des Graphen an der Stelle $x = 3$ beträgt $-0{,}5$. Wie lautet die Gleichung der Polynomfunktion?

4.28 Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ geht durch die Punkte P(0/0), Q(1/2), R(2/2) und schneidet die x-Achse in P unter einem Winkel von 45°. Wie lautet die Gleichung der Funktion?

Produkt-, Quotientenregel

Differenziere die Funktionen in den Aufgaben 4.29 bis 4.38.

4.29 **a)** $y = (2 + x) \cdot (1 + x^2)$ **b)** $y = (1 + x^3) \cdot (x + x^2 - 2)$ **c)** $y = (x^{-2} + x) \cdot (x - x^2)$
d) $y = \left(\frac{x}{2} + 1\right)\left(1 + x^2\right)\left(3 - \frac{x}{3}\right)$ **e)** $y = (x - 1)^2 \cdot \sqrt{x}$ **f)** $y = (x - 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$

4.30 **a)** $y = x \cdot e^x$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ **c)** $y = \cos x \cdot \sin x$
d) $f(x) = \tan^2 x$ **e)** $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ **f)** $f(x) = x^3 \cdot \tan x$
g) $y = x \cdot \ln x^2$ **h)** $y = (1 + x^2) \cdot \ln \frac{x}{2}$ **i)** $y = x \cdot \ln \sqrt{x}$
j) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \sin x$ **k)** $y = 2^x \cdot e^x$ **l)** $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \sin x$

4.31 **a)** $y = x \cdot e^x \cdot \sin x$ **b)** $y = \sin x \cdot \cos^2 x$ **c)** $y = \sin^3 x$ **d)** $y = e^{3x}$

4.32 **a)** $y(x) = (a + b \cdot x) \cdot (c - d \cdot x)$ **b)** $f(t) = (a + \sin t) \cdot (t + b)$ **c)** $f(t) = (t + b) \cdot (a + \sin t)$
d) $f(h) = \left(\frac{1 + 2h}{2}\right)^3$ **e)** $f(s) = \left(1 + \sqrt{s}\right)^2$ **f)** $f(u) = \left(1 + \sqrt{u}\right) \cdot \left(1 - \frac{u}{2}\right)$

4.33 **a)** $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ **d)** $y = \frac{x}{e^x}$
e) $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$ **f)** $y = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$ **g)** $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **h)** $y = \frac{1 - \ln (2x)}{x}$

4.34 **a)** $y = \frac{1}{\sin x}$ **b)** $y = \frac{1}{\tan x} + \tan x$ **c)** $y = \frac{\sin x}{2x}$
d) $y = \frac{x}{1 - \cos x}$ **e)** $y = \frac{\sin x + \cos x}{x}$ **f)** $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$
g) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ **h)** $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$ **i)** $y = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x}$

4.35 **a)** $f(t) = \frac{a \cdot t}{t - 1}$ **b)** $f(t) = \frac{a \cdot t^2}{t^2 - 1}$ **c)** $f(t) = \frac{(a + 1) \cdot t^2}{t - 1}$ **d)** $f(t) = \frac{t^2 - a^2}{t - a}$

4.36 **a)** $y = \frac{(h + 2) \cdot \sqrt{h}}{e^h}$ **b)** $y = \frac{x \cdot \ln x}{x + 1}$ **c)** $y = \frac{(1 + x)}{x} \cdot e^x$ **d)** $y = \frac{(1 + r)^2}{1 - r} \cdot \frac{1}{r}$
e) $y = \frac{x \cdot \tan x}{\sin x}$ **f)** $y = \frac{t}{\cos t} \cdot \sin t$ **g)** $y = \frac{2 \cdot \tan x}{1 + \tan^2 x}$ **h)** $y = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

4.37 **a)** $y = \frac{\arctan x}{x}$ **b)** $y = \frac{\arcsin x}{e^x}$ **c)** $y = \frac{\sinh x}{2x}$ **d)** $y = \cosh^2 x - \sinh^2 x$

4.38 **a)** $f(t) = \frac{a - \sqrt{t}}{a + \sqrt{t}}$ **b)** $f(t) = \frac{2a}{a + \sqrt{t}}$ **c)** $f(s) = \frac{s \cdot (2a + s)}{1 + e^s}$
d) $f(t) = \frac{\sin t \cdot \cos t}{a \cdot \tan t} + a$ **e)** $f(h) = \frac{\left(1 + \frac{h}{a}\right) \cdot (1 - h^2)}{a \cdot h + 1}$ **f)** $f(u) = \frac{(1 + a \cdot u)^{-1}}{(1 + a) \cdot u} \cdot \ln a$

4.39 Linearisiere die Funktion an der Stelle x_0 und vergleiche die linearisierte Funktion an der Stelle $x_0 + 0{,}2$ mit der Funktion:

a) $y = x^2 \cdot \ln x,\ x_0 = 2$ **b)** $y = \frac{\ln(2x)}{\sqrt{x}},\ x_0 = 3$ **c)** $y = \frac{1}{x} \cdot \arctan x,\ x_0 = 1$

d) $y = \frac{\sin x}{2x},\ x_0 = 2$ **e)** $y = \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 1},\ x_0 = 1$ **f)** $y = \frac{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{3}\right)}{x^2 + \frac{1}{x}},\ x_0 = 2$

4.40 Gegeben ist die Funktion $y = x \cdot e^x$.

a) Ermittle die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 1$.

b) Besitzt der Graph der Funktion eine waagrechte Tangente? Wenn ja, stelle ihre Gleichung auf!

4.41 Gegeben ist die Funktion $y = x^2 \cdot \sin x$.

a) Ermittle die Gleichungen der Tangenten an den Stellen $x = -2$ sowie $x = 0{,}5$.

b) Welchen Winkel schließen die Tangenten miteinander ein?

4.42 Gegeben ist die Funktion $y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$.

a) Ermittle die Punkte des Funktionsgraphen, die waagrechte Tangenten besitzen.

b) Wie groß ist die Steigung der Tangente an der Nullstelle?

Kettenregel

Differenziere die Funktionen in den Aufgaben 4.43 bis 4.54.

4.43 **a)** $y = (3x - 5)^5$ **b)** $y = (x^2 + 1)^7$ **c)** $y = (2 - x)^3$ **d)** $y = \frac{(2x + 3)^4}{2}$

e) $y = \left(\frac{1}{2}x - 3\right)^3$ **f)** $y = \sqrt{2x + 3}$ **g)** $y = \sqrt[3]{(x^4 + 2)}$ **h)** $y = \sqrt{\frac{-2x + 5}{3}}$

4.44 **a)** $y = e^{2x}$ **b)** $y = 2 \cdot e^{-2x}$ **c)** $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ **d)** $y = (e^x)^2$

e) $y = 2^{x^3 + 2}$ **f)** $y = 4^{\frac{2x - 1}{3}}$ **g)** $y = e^{\cos x}$ **h)** $y = e^{\frac{x - 1}{x}}$

4.45 **a)** $y = \ln(2x + 1)$ **b)** $y = \ln \frac{x + 1}{2}$ **c)** $y = \ln(x^2 - 1)$ **d)** $y = \lg(x^2 + 1)$

e) $y = \ln \sqrt{x}$ **f)** $y = e^{\ln x}$ **g)** $y = \lg \frac{10}{x}$ **h)** $y = \ln(\ln x)$

4.46 **a)** $y = \sin 2x$ **b)** $y = \cos(3x - 1)$ **c)** $y = \tan 3x$ **d)** $y = \tan \frac{1}{x}$

e) $y = \cos \sqrt{x}$ **f)** $y = \arccos(2x)$ **g)** $y = \arctan \frac{1}{x}$ **h)** $y = \sinh(-3x)$

4.47 **a)** $y(t) = \frac{1}{2} \cdot (e^t - e^{-t})$ **b)** $y(u) = \frac{e^u}{e^u + e^{-u}}$ **c)** $y(t) = \ln \frac{1 + t}{1 - t}$

d) $y(t) = \sqrt{\frac{t - 1}{t + 1}}$ **e)** $y(x) = \arctan \frac{1 - x}{1 + x}$ **f)** $y(t) = 5 \cdot (1 - t) \cdot e^{-t}$

g) $y(t) = 2^{-t} \cdot 2^{t + 1}$ **h)** $y(t) = e^{-t} \cdot \left(\frac{1 + e^{-2t}}{1 - e^{-2t}}\right)$

4.48 **a)** $y = \frac{\ln x^2}{e^x}$ **b)** $y = \left(\frac{1 + e^x}{x}\right)^{-2}$ **c)** $f(z) = \left(1 - \frac{1}{1 + z}\right)^4$

d) $f(s) = \sqrt[3]{\frac{1 - s}{s^2}}$ **e)** $y = \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{e^{2x}}$ **f)** $y = \frac{x \cdot e^{-2x+1}}{2e^x \cdot (x + 1)}$

4.49 **a)** $y = x^2 \cdot e^{-x}$ **b)** $y = (3 - t) \cdot e^{-2t}$ **c)** $y = x \cdot (x - 3) \cdot e^{-2x}$ **d)** $y = (\ln(2x + 1))^2$

4.50 **a)** $y = x^2 \cdot \cos 2x$ **b)** $y = \sin(2x) \cdot \cos(2x)$ **c)** $y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$

d) $y = \frac{\sin x}{e^{2x}}$ **e)** $y = 3 \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin(2t)$ **f)** $y = x^3 \cdot \sin^2 x$

4.51 **a)** $f(t) = \frac{t^2 \cdot 3^{r \cdot s}}{1 + r \cdot s \cdot t}$ **b)** $f(r) = \frac{t^2 \cdot 3^{r \cdot s}}{1 + r \cdot s \cdot t}$ **c)** $f(s) = \frac{t^2 \cdot 3^{r \cdot s}}{1 + r \cdot s \cdot t}$

4.52 **a)** $y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ **b)** $y = \operatorname{artanh} x = \ln \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

4.53 **a)** $y(t) = r \cdot \sin(\omega t)$ **b)** $f(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ **c)** $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

d) $u(t) = \hat{U} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ **e)** $R(t) = e^{-\frac{t}{T}}$ **f)** $I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$

g) $u_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ **h)** $m(t) = S \cdot \left(1 - e^{-c \cdot t}\right)$ **i)** $\vartheta(t) = \vartheta_K + (\vartheta_0 - \vartheta_K) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

j) $\varphi(t) = \frac{1}{k} \cdot \ln(k\omega t + 1)$ **k)** $v(t) = v_S \cdot \tanh \frac{g \cdot t}{v_S}$ **l)** $v(s) = v_S \cdot \sqrt{1 - e^{-2k \cdot \frac{s}{m}}}$

4.54 **a)** $y(t) = A \cdot e^{-B \cdot t}$ **b)** $y(t) = A \cdot e^{-B \cdot t} + C$ **c)** $y(t) = A \cdot \left(1 - e^{-B \cdot t}\right)$

d) $y(t) = A \cdot e^{-C \cdot t} + B \cdot e^{-D \cdot t}$ **e)** $y(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-C \cdot t}$ **f)** $y(x) = A \cdot e^{-B \cdot (x - C)^2}$

4.55 Gegeben ist ein exponentielles Wachstum (Abb. 4.21) mit einer Sättigungsgrenze $y = f(t) = S \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ mit S als Sättigungsgrenze und τ als Zeitkonstante (siehe Beispiel 4.19, Seite 113). Zeige für $S = 3$ und $\tau = 2$, dass die an den Stellen τ und 2τ errichteten Tangenten die Gerade $y = S$ an der Stellen $t = 2\tau$ bzw. 3τ schneiden.

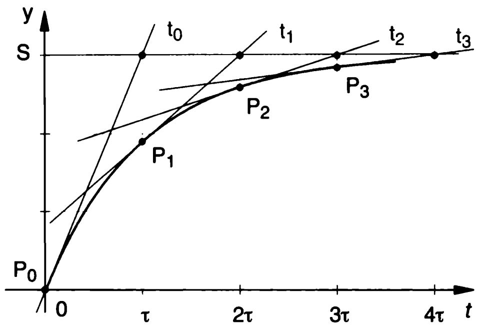


Abb. 4.21

4.56 Durch $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$ wird bei Vorliegen einer sogenannten WEIBULL-Verteilung der erwartete Anteil von gleichartigen Bauelementen angegeben, welcher die Nutzungsdauer t überlebt. Berechne in diesem Fall die Ausfallrate $\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt}$.

4.57 Linearisiere die Funktion an der Stelle x_0 und vergleiche die linearisierte Funktion mit der Funktion für $x_0 + 0{,}5$:

a) $y = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x_0 = 1$ **b)** $y = \frac{(2x + 1) \cdot 3^{-x}}{e^{2x}}$, $x_0 = 0$

4.58 Ermittle im Intervall $[0, 2\pi]$ die Gleichungen der waagrechten Tangenten von $y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cdot \cos 2t$.

Implizite Differentiation

4.59 Differenziere implizit (also ohne vorher die Funktion explizit darzustellen) und bestimme die Ableitung an der Stelle x_0:

a) $4x + 2y - 5 = 0;\ x_0 = 3$
b) $2y - x^2 = 0;\ x_0 = 1$
c) $x^2 + 2x - y^3 = 1;\ x_0 = 1$
d) $\sqrt{y} - x = 1;\ x_0 = -1$
e) $x \cdot y^3 = x + 2;\ x_0 = 0{,}5$
f) $\sqrt[3]{2y - 1} - x = 1;\ x_0 = 0$
g) $\frac{x}{y} = x - 1;\ x_0 = 2$
h) $\frac{x}{y^3} - x = 1;\ x_0 = 1$

4.60 Differenziere implizit:

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$ **b)** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ **c)** $x^2 + 10x + 25 + y^2 = 49$ **d)** $2y^2 = 3x$

4.61 Gib die Gleichung der Kurventangente im Punkt $P(x_0/y_0 > 0)$ an:

a) $x^2 + y^2 = 36$ (Kreis), $x_0 = -2$
b) $y^2 = x^3$ (NEIL'sche Parabel), $x_0 = 1$
c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (Ellipse), $x_0 = 2$
d) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (Astroide), $x_0 = 0{,}5$

4.62 Stelle die Funktion $y = f(x)$ durch Auflösen der Funktionsgleichung nach x implizit dar und bestimme daraus die Ableitung y':

a) $y = \sqrt[3]{x}$ **b)** $y = \arccos x$ **c)** $y = \arctan x$ **d)** $y = \operatorname{arcosh} x$ **e)** $y = \operatorname{artanh} x$

4.63 Eine halbkugelförmige Schale (Abb. 4.22) mit dem Radius $r = 10{,}0$ dm wird durch einen konstanten Wasserzufluss gefüllt. Nimmt man einen Zufluss von 1 *l* pro Sekunde an, so gilt für die Füllhöhe *h* der Schale nach einem Zufluss der Zeitdauer *t* (in Sekunden):
$1 \cdot t = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3r - h)$ oder $t = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (30 - h)$, *h* in dm.
Berechne durch implizite Differentiation $h'(t)$. Welche Steigung hat die Tangente an den Graphen von $h(t)$ zur Zeit $t = 0$?

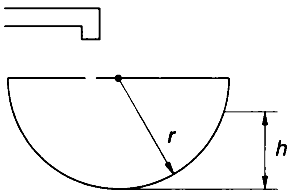


Abb. 4.22

Logarithmisches Differenzieren

4.64 Bestimme die Ableitung an der Stelle $x_0 = 2$:

a) $y = x^x$ **b)** $y = 2x^{2x+1}$ **c)** $y = x^{x \cdot \cos x}$ **d)** $y = \left(3 - \frac{2}{x}\right)^{4x}$
e) $y = \frac{1}{x^{3x+1}}$ **f)** $y = \sqrt[2x]{x + 1}$ **g)** $y = x^{-x}$ **h)** $y = (\sin x)^{2x}$

4.65 Ermittle die Gleichung der Tangente an der Stelle x_0:

a) $y = x^{2x+1},\ x_0 = 1{,}5$ **b)** $y = x^{x \cdot \sin x},\ x_0 = 3$ **c)** $y = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x},\ x_0 = 1$

4.66 Zeige durch logarithmisches Differenzieren der Funktionsgleichung der Potenzfunktion $y = x^n$, dass gilt: $y' = n \cdot x^{n-1}$.

4.4 Höhere Ableitungen

Ist die Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$ differenzierbar, so kann man von dieser Funktion wieder die Ableitung bilden. Man erhält die **2. Ableitung** von $f(x)$: $f''(x) = [f'(x)]'$, (gelesen: f zwei Strich von x). Die Ableitung $f'(x)$ wird in diesem Zusammenhang als **1. Ableitung** von $f(x)$ bezeichnet.

Ist die 2. Ableitung $f''(x)$ differenzierbar, so nennt man die Ableitung der 2. Ableitung die **3. Ableitung** von $f(x)$: $f'''(x) = [f''(x)]'$, gelesen: f drei Strich von x, usw. Ab der 4. Ableitung werden die Ableitungen mit arabischen Ziffern bezeichnet:

$f^{(4)}(x) = [f'''(x)]'$, gelesen 4. Ableitung von x,

...

$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$, gelesen n-te Ableitung von x.

Man spricht auch von den **Ableitungen 1., 2., ..., n-ter Ordnung**. Die zweite und alle weiteren Ableitungen werden **höhere Ableitungen** genannt. Auch die Schreibweise in Form höherer Differentialquotienten ist üblich:

$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ oder kürzer $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ (gelesen: d zwei y nach d x Quadrat).

Entsprechend wird die n-te Ableitung mit $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ bezeichnet.

Beispiel 4.20 : Höhere Ableitungen einer Polynomfunktion

Bestimme alle höheren Ableitungen von: **a)** $y = x^5$ **b)** $y = 3x^3 + 2x^2 - x + 5$

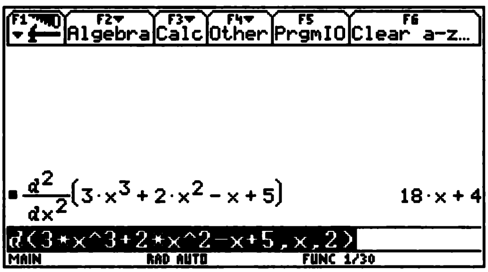
Lösung

Zu **a)**
$y = x^5$
$y' = 5x^4$
$y'' = 20x^3$
$y''' = 60x^2$
$y^{(4)} = 120x$
$y^{(5)} = 120$
$y^{(6)} = 0$
...

Zu **b)**
$y = 3x^3 + 2x^2 - x + 5$
$y' = 9x^2 + 4x - 1$
$y'' = 18x + 4$
$y''' = 18$
$y^{(4)} = 0$

Beim Differenzieren nimmt der Exponent einer Potenzfunktion immer um eins ab. Daher ist die n-te Ableitung einer Polynomfunktion vom Grad n eine konstante Funktion. Die (n+1)-te Ableitung und alle weiteren höheren Ableitung sind identisch gleich null.

Voyage 200



Die n-te Ableitung wird ermittelt durch: Man drückt 2ND 8,

danach werden der Funktionsterm, die Variable, nach der differenziert wird, sowie die Ordnung der Ableitung eingegeben.

Wird keine Ordnung angegeben, erfolgt die Bildung der 1. Ableitung.

Beispiel 4.21 : Höhere Ableitungen einer Kreisfunktion

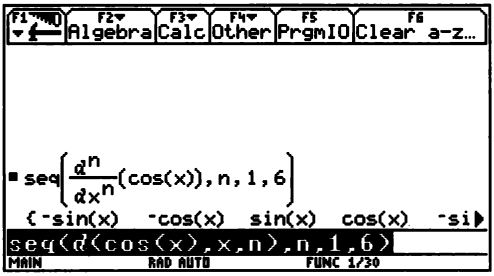
Berechne die ersten 6 Ableitungen von y = cos x

Lösung

$y \quad = \cos x$
$y' \quad = -\sin x$
$y'' \quad = -\cos x$
$y''' \quad = \sin x$
$y^{(4)} = \cos x$
$y^{(5)} = -\sin x$
$y^{(6)} = -\cos x$
...

Da die vierte Ableitung gleich der ursprünglichen Funktion ist, wiederholen sich von nun an die Ableitungen periodisch.
Die Funktion y = cos x ist unbegrenzt differenzierbar.

Voyage 200



Mit Hilfe der Sequence-Funktion seq() (im Menü MATH/List oder Eintippen) können mehrere aufeinanderfolgende Ableitungen auf einmal ermittelt werden.

Beispiel 4.22 : Höhere Ableitungen

Berechne die zweite Ableitung:

a) $y = \frac{x}{\sin x}$ $(\sin x \neq 0)$ **b)** $y = \sqrt{x} \cdot \ln(2x)$ **c)** $y = \sin^3 2x$

Lösung

Zu **a)** Die Quotientenregel liefert: $y' = \frac{1 \cdot \sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$

Noch einmal die Quotientenregel angewendet ergibt:

$$y'' = \frac{\{\cos x - [1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)]\} \sin^2 x - (\sin x - x \cdot \cos x) \cdot 2 \sin x \cdot \cos x}{\sin^4 x} =$$

$$= \frac{x \cdot \sin^3 x - 2 \sin^2 x \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x}{\sin^4 x} =$$

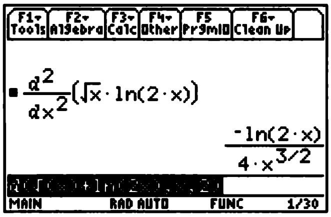
$$= \frac{\sin x \cdot (x \cdot \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x + 2x \cdot \cos^2 x)}{\sin^4 x}$$

Man kann nun durch sin x kürzen. Nun kann man auf unterschiedliche Art weiter vorgehen. Setzt man $2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$ und $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, so erhält man schließlich:

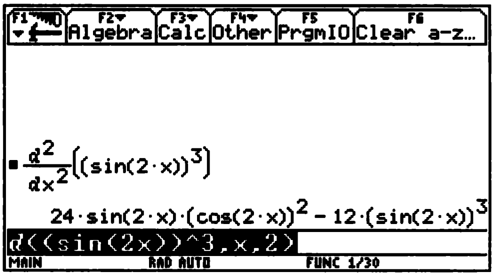
$$y'' = \frac{x(2 - \sin^2 x) - \sin 2x}{\sin^3 x}.$$

Zu **b)** und **c)**: Rechne selbst und stelle die Übereinstimmung mit dem vom Taschenrechner angezeigten Ergebnis fest!

TI 89



Voyage 200



Beispiel 4.23 : Ermittlung einer Polynomfunktion

Von der Gleichung einer Parabel $y = f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ kennt man: $f(2) = 3$, $f'(2) = 2$. Ihre zweite Ableitung ist identisch gleich -1. Bestimme den Scheitel der Parabel.

Lösung

$f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

$f'(x) = 2a\cdot x + b$

$f''(x) = 2a$

Einsetzen der Werte aus der Angabe ergibt ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten a, b und c:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 2^2\cdot a + 2\cdot b + c = 3 \\ \text{II:} & 4a + b = 2 \\ \text{III:} & 2a = -1 \end{array}$$

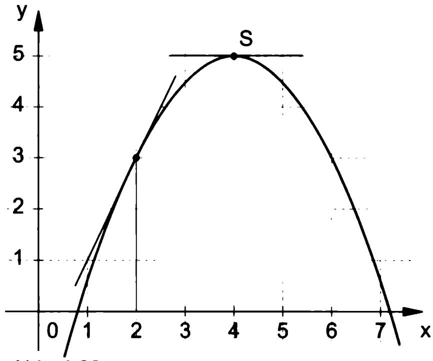


Abb. 4.23

Daraus: $a = -\frac{1}{2}$, $b = 4$ und $c = -3$. Die gesuchte quadratische Funktion (Polynomfunktion vom Grad 2) lautet somit: $y = -\frac{1}{2}\cdot x^2 + 4x - 3$. Der Scheitel S ist jener Punkt, in dem die Tangente die Steigung null hat: $y' = -\frac{1}{2}\cdot 2x + 4 = -x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$.

Wegen $y(4) = -\frac{1}{2}\cdot 4^2 + 4\cdot 4 - 3 = 5$ gilt $S(4/5)$.

Im Überblick: Höhere Ableitungen

Durch Differenzieren gewinnt man aus einer (differenzierbaren) Funktion $y = f(x)$ die 1. Ableitung $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$; ist auch $f'(x)$ differenzierbar, so erhält man durch nochmaliges Differenzieren die 2. Ableitung oder Ableitung 2. Ordnung $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$, usw.

Die Ableitungen ab der 2. Ordnung werden als **höhere Ableitungen** bezeichnet.

Aufgaben

4.67 Berechne alle Ableitungen der Polynomfunktion bis zu jener, die identisch null ist:

a) $y = x^2 + 5x + 3$ **b)** $y = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ **c)** $y = -4x^6 + 3x^3 - \frac{2}{3}x - 4$

4.68 Bestimme die zweite Ableitung an der Stelle $x_0 = 2$.

a) $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \sqrt{2x + 1}$ **c)** $y = \frac{2}{1 - 3x}$ **d)** $y = \ln \frac{x}{3}$

e) $y = r \cdot \sin(\omega x)$ **f)** $y = e^{-2x}$ **g)** $y = e^{-x} - e^{-2x}$ **h)** $y = \frac{1 + 2x}{1 + x}$

i) $y = \frac{1 + x}{2 - x^2}$ **j)** $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x - 1)^2}$ **k)** $y = \frac{a \cdot x^2}{a \cdot x + 1}$ **l)** $y = \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x}}$

m) $y = \frac{x \cdot \sqrt{x}}{x^2 - 1}$ **n)** $y = e^{-x^2/4}$ **o)** $y = x \cdot e^{2x}$ **p)** $y = \frac{\sin x}{e^{2x}}$

q) $y = \frac{x \cdot \sin x}{\sqrt{x}}$ **r)** $y = \frac{1}{2x} \cdot \cos 2x$ **s)** $y = e^{-0{,}5 \cdot x} \cdot \sin(3x)$ **t)** $y = \sin^3 x$

4.69 Bestimme die ersten drei Ableitungen:

a) $f(t) = \frac{t + 3}{t - 3}$ **b)** $y = \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x + 1}$ **c)** $y = e^{-x^2}$ **d)** $y = \cos^2 x$

e) $f(t) = t \cdot (1 - e^{-t})$ **f)** $y = \tan x$ **g)** $f(u) = u \cdot \ln u$ **h)** $y = \frac{x \cdot \ln 3x}{\sqrt{x}}$

4.70 Berechne $y'(\pi)$ und $y''\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

a) $y = \sin(2x + \pi)$ **b)** $y = \sin^2 x$ **c)** $y = (\sin x + \cos x)^2$ **d)** $y = x \cdot \cos(2x)$

4.71 Berechne $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$:

a) $y = \frac{\ln(t \cdot x)}{t}$ **b)** $y = \frac{(x + t)^2}{x - t}$ **c)** $y = \frac{t^x}{x^t}$ **d)** $y = \frac{e^{t \cdot x^2}}{t^2 \cdot x}$

4.72 Von einer Polynomfunktion 2. Grades weiß man, dass die Tangente an der Stelle $x = 2$ die Steigung 5 besitzt. Weiters liegt der Punkt $Q(2/4)$ auf ihrem Graph. Die zweite Ableitung ist identisch gleich 4.

a) Wie lautet die Gleichung der quadratischen Funktion?

b) An welcher Stelle besitzt der Funktionsgraph eine waagrechte Tangente?

4.73 Die Tangente an den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades $f(x)$ hat an der Stelle $x = -1$ die Steigung -3. Ferner ist $f'(-2) = 5$ und $f''(-2) = 2$. Ermittle die Funktionsgleichung, wenn $f(0) = 1$.

Hinweis: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.

4.74 Die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Polynomfunktion an der Stelle $x = 2$ lautet: $y = -5x + 7$. Die zweite Ableitung der Funktion ist identisch gleich -1.

a) Wie lautet die Gleichung der Polynomfunktion?

b) Unter welchem Winkel schneidet der Funktionsgraph die x-Achse?

4.75 Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades schneidet die y-Achse bei $y = 1$; die zweite Ableitung der Funktion besitzt dort den Wert null. An der Stelle $x = -1$ ist die Gleichung der Tangente $y = x + 5$. Gib die Gleichung der Polynomfunktion an!

4.76 Zeige, dass die Funktionen **a)** $y = e^{-3x} \cdot \sin 4x$ und **b)** $y = e^{-3x} \cdot \cos 4x$ die Gleichung $y'' + 6y' + 25y = 0$ erfüllen.

4.77 Gegeben sind ein Ausschnitt aus einer Wertetabelle für eine Polynomfunktion und für ihrer ersten beiden Ableitung (y" ist *identisch* gleich dem angegeben Wert).

(1) Gib den Grad der Polynomfunktion an und begründe dies.

(2) Gewinne aus der Tabelle die Koeffizienten des Polynoms.

(3) Was könnte man noch direkt aus der Tabelle ablesen?

a)

x	y	y'	y"
−1	7	−4	2
0	4	−2	2
1	3	0	2
2	4	2	2
3	7	4	2

b)

x	y	y'	y"
−8	−15	8	−2
−6	−3	4	−2
−4	1	0	−2
−2	−3	−4	−2
0	−15	−8	−2

c)

x	y	y'	y"
−1	1	−4	8
−0,75	0,25	−2	8
−0,5	0	0	8
−0,25	0,25	2	8
0	1	4	8

4.78 Gegeben sind ein Ausschnitt aus einer Wertetabelle für eine Polynomfunktion und für ihre ersten drei Ableitungen (y"' ist *identisch* gleich dem angegeben Wert).

(1) Gib den Grad der Polynomfunktion an und begründe dies.

(2) Gewinne aus der Tabelle die Koeffizienten des Polynoms.

a)

x	y	y'	y"	y"'
−1	8	−14	22	−18
0	2	−1	4	−18
1	0	−6	−14	−18
2	−16	−29	−32	−18
3	−64	−70	−50	−18

b)

x	y	y'	y"	y"'
−1	−6,6	5,8	−1,6	−2,4
−0,5	−3,95	4,7	−2,8	− 2,4
0	−2	3	−4	− 2,4
0,5	−1,05	0,7	−5,2	−2,4
1	−1,4	−2,2	−6,4	−2,4

4.5 Differential einer Funktion

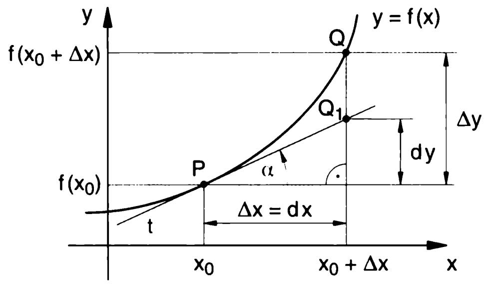


Abb. 4.24 Differential einer Funktion

Wird das Argument x_0 einer Funktion $y = f(x)$ um Δx geändert, so ändert sich der Funktionswert um Δy. Wie Abb. 4.24 zeigt, bedeutet dies den Übergang vom Punkt P des Funktionsgraphen zum Punkt Q.

Ist nun die Funktion an der Stelle x_0 differenzierbar, so kann man den Funktionsgraphen um den Punkt P durch die *Tangente* t in P annähern: statt Q wird bei einer Änderung Δx der Punkt Q_1 auf t erreicht; die damit verbundene y-Änderung wird mit dy bezeichnet und heißt **Differential der Funktion an der Stelle x_0 für den Zuwachs Δx.**

Aus dem Steigungsdreieck der Tangente in P entnimmt man:

$$\tan\alpha = f'(x_0) = \frac{dy}{dx} \quad\Rightarrow\quad dy = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

Es gilt stets $dx = \Delta x$. Dies erkennt man, wenn man speziell die Funktion $y = x$ betrachtet. Weil in diesem Fall $y' = f'(x_0) = 1$ ist, gilt $dy = dx = 1\cdot\Delta x$. dx wird als unabhängiges Differential bezeichnet. Zwischen den Differentialen dx und dy, den Koordinatenänderungen auf der in P errichteten *Tangente*, gilt der Zusammenhang:

> Man erhält das **Differential dy** einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 aus dem Differential $dx = \Delta x$ durch Multiplikation mit der Ableitung $f'(x_0)$**:**
>
> $\mathbf{dy = f'(x_0)\cdot dx}$.

Anmerkungen:

(1) Aus $dy = f'(x_0)\cdot dx$ folgt $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, d.h. die Ableitung ist nicht nur der Grenzwert eines Quotienten, sondern ein wirklicher Quotient der Differentiale dy und dx. Dies rechtfertigt nachträglich die Bezeichnung "Differentialquotient" für die Ableitung!

(2) Der Zusammenhang zwischen Δy und Δx ist in der Regel mehr oder weniger aufwendig. Dagegen besteht zwischen den Differentialen dy und dx ein einfacher *linearer* Zusammenhang.

(3) Für hinreichend kleine Änderungen dx gilt die für die Praxis wichtige Aussage: $\Delta y \approx dy$.

Beispiel 4.24 : Differential einer Funktion

Gegeben ist die Funktion $y = x^2$. Berechne die genaue Änderung Δy der Funktionswerte und vergleiche mit dem Differential dy der Funktion, wenn $x_0 = 1$ und

a) $dx = 0{,}2$ **b)** $dx = 0{,}02$.

Lösung

Zu **a)** $\Delta y = (1 + 0{,}2)^2 - 1^2 = 0{,}44$;

$f'(x) = 2x \;\Rightarrow\; f'(1) = 2\cdot 1 = 2$; $dy = f'(1)\cdot dx = 2\cdot dx = 2\cdot 0{,}2 = 0{,}4$;

$\Delta y - dy = 0{,}04$.

Zu **b)** $\Delta y = (1 + 0{,}02)^2 - 1^2 = 0{,}0404;$

$dy = f'(1) \cdot dx = 2 \cdot dx = 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04;$

$\Delta y - dy = 0{,}0004.$

Die Näherung ist erwartungsgemäß umso besser, je betragsmäßig kleiner $dx = \Delta x$ ist.

Beispiel 4.25 : Näherung für die Verdoppelungszeit

Ein Kapital K_0 wird zu $i = p\,\%$ Jahreszinsen verzinst. Nach wie vielen Jahren wächst es bei Zinseszins auf das Doppelte?

Lösung

Ist K_n das Kapital nach n Jahren, so gilt: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$. Für $K_n = 2 \cdot K_0$ folgt:

$$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + i)^n \quad | : K_0$$

$$2 = (1 + i)^n \quad | \text{ logarithmieren}$$

$$\ln 2 = n \cdot \ln (1 + i)$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln (1 + i)}$$

Wir betrachten nun die Funktion $y = f(x) = \ln x$ und berechnen ihr Differential dy an der Stelle $x_0 = 1$ für $dx = i$:

$f'(x) = \frac{1}{x}$; $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1} = 1$; $dy = f'(x_0) \cdot dx = 1 \cdot i = i.$

Da $\Delta y = \ln (1 + i) - \ln 1 = \ln (1 + i) \approx dy = i$, folgt $n = \frac{\ln 2}{\ln (1 + i)} \approx \frac{\ln 2}{i}$.

Setzt man noch $i = \frac{p}{100}$, wobei p der Prozentwert der jährlichen Kapitalsteigerung ist, und weiters $\ln 2 = 0{,}693\ldots \approx 0{,}70$, so erhält man die einfache *Näherungsformel für die Verdopplungszeit*: $n \approx \frac{70}{p}$.

Diese Näherungsformel gilt für alle Größen, für die prozentuelle Zunahme p pro Zeitschritt gleichbleibend angenommen werden kann. Nimmt man beispielsweise eine konstante prozentuelle Preissteigerung eines Artikels von $i = 3{,}5\,\% = 0{,}035$ pro Jahr an, so hat sich der Preis in etwa $\frac{70}{3{,}5} = 20$ Jahren verdoppelt. Die Verdoppelungszeit nach $n = \frac{\ln 2}{\ln (1 + i)}$ würde 20,15 Jahre betragen.

Berechnung des Maximalfehlers in linearer Näherung

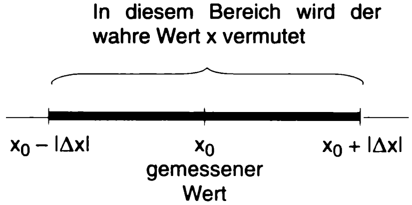


Abb. 4.25 Messunsicherheit $|\Delta x|$ einer Größe

Jede Messung einer physikalischen Größe, etwa einer Länge oder einer Stromstärke, ist fehlerbehaftet, ihr *wahrer* Wert x wird nicht bekannt. Ist x_0 der *gemessene* (angezeigte) Wert, so bleibt mit x auch die Messabweichung $x_0 - x$ (auch absoluter Messfehler genannt) unbekannt. Um dennoch eine Aussage über die Messunsicherheit machen zu können, begnügt man sich oft mit einer Abschätzung der Messabweichung (Abb. 4.25): $|x_0 - x| \leq |\Delta x|$.

$|\Delta x|$ wird deshalb als **Messunsicherheit** oder als **absoluter Maximalfehler** der Messung bezeichnet. Mit der Schreibweise $x = x_0 \pm |\Delta x|$ wird ausgedrückt, dass für den wahren Wert x vermutet wird: $x_0 - |\Delta x| \leq x \leq x_0 + |\Delta x|$. Die Angabe eines absoluten Maximalfehlers erfolgt in der Regel auf eine oder zwei geltende Ziffern. Auf die gleiche Genauigkeit wird x_0 gerundet.

Die Größe $\left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$ heißt **relative Messunsicherheit** oder **relativer Maximalfehler**. Sie wird in Prozent angegeben. Man sagt auch, dass x absolut auf $|\Delta x|$ oder relativ auf $\left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$ genau gemessen wurde.

Wie wirkt sich eine Messunsicherheit einer Messgröße x auf eine von ihr abhängige Größe y = f(x) aus?

Gegeben: $x = x_0 \pm |\Delta x|$. Da die Messunsicherheit $|\Delta x|$ im Allgemeinen klein ist, kann man den absoluten Maximalfehler von y in linearer Näherung durch das *Differential* angeben:

> Ist $y = f(x)$ und $x = x_0 \pm |\Delta x|$, so gilt für den **absoluten Maximalfehler von y:**
>
> $|\Delta y| \approx |f'(x_0)| \cdot |\Delta x|$

Beispiel 4.26 : Absoluter Maximalfehler einer abhängigen Größe

Der Durchmesser d einer Kugel wurde zu $d = d_0 \pm |\Delta d| = (5{,}0 \pm 0{,}1)$ cm gemessen. Bestimme näherungsweise den damit verbundenen absoluten und relativen Maximalfehler

a) der Kugeloberfläche A, **b)** des Kugelvolumens V.

Lösung

Zu **a)** $A(d) = \pi \cdot d^2$, $A'(d) = 2\pi \cdot d$. Ist $|\Delta A|$ der absolute Maximalfehler der Kugeloberfläche, so gilt:

$$|\Delta A| \approx |dA| = |A'(d_0)| \cdot |\Delta d| = 2\pi \cdot d_0 \cdot |\Delta d| = 2\pi \cdot 5{,}0\text{ cm} \cdot 0{,}1\text{ cm} = \\ = 3{,}141\ldots\text{ cm}^2 \approx 3{,}1\text{ cm}^2$$

$$\left|\frac{\Delta A}{A_0}\right| = \frac{2\pi d_0 \cdot |\Delta d|}{\pi \cdot d_0^2} = 2 \cdot \left|\frac{\Delta d}{d_0}\right| = 2 \cdot \frac{0{,}1}{5} = 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04 = 4\,\%.$$

Der relative Maximalfehler von A ist doppelt so groß wie jener von d. Berechnet man noch $A_0 = \pi \cdot d_0^2 = 78{,}539\ldots\text{ cm}^2 \approx 78{,}5\text{ cm}^2$, so kann man auch schreiben:

$A = (78{,}5 \pm 3{,}1)\text{ cm}^2$ oder $A = 78{,}5\text{ cm}^2 \cdot (1 \pm 4\,\%)$.

Zum Vergleich kann auch, weil $A = A(d)$ eine *monotone* Funktion ist, der mit der angegebenen Messunsicherheit verbundene Höchstwert A_{ob} bzw. Mindestwert A_{un} der Kugeloberfläche A leicht exakt berechnet werden:

$A_{ob} = \pi \cdot 5{,}1^2\text{ cm}^2 = 81{,}7\text{ cm}^2$; $A_{un} = \pi \cdot 4{,}9^2\text{ cm}^2 = 75{,}4\text{ cm}^2$.

Zu **b)** $V(d) = \frac{\pi}{6} \cdot d^3$, $V'(d) = \frac{\pi}{6} \cdot 3d^2 = \frac{\pi}{2} \cdot d^2$. Ist $|\Delta V|$ der absolute Maximalfehler des Kugelvolumens, so gilt:

$$|\Delta V| \approx |dV| = |V'(d_0)| \cdot |\Delta d| = \frac{\pi}{2} \cdot d_0^2 \cdot |\Delta d| = \frac{\pi}{2} \cdot 5{,}0^2\text{ cm}^2 \cdot 0{,}1\text{ cm} = \\ = 3{,}926\ldots\text{ cm}^3 \approx 3{,}9\text{ cm}^3.$$

$$\left|\frac{\Delta V}{V_0}\right| = \frac{\frac{\pi}{2} d_0^2 \cdot |\Delta d|}{\frac{\pi}{6} \cdot d_0^3} = 3 \cdot \left|\frac{\Delta d}{d_0}\right| = 3 \cdot \frac{0{,}1}{5} = 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}06 = 6\,\%.$$

Der relative Maximalfehler von V ist dreimal so groß wie jener von d. Berechnet man noch $V_0 = \frac{\pi}{6} \cdot d_0^3 = 65{,}449\ldots\text{ cm}^3 \approx 65{,}4\text{ cm}^3$, so kann man schreiben:

$V = (65{,}4 \pm 3{,}9)\text{ cm}^3$ oder auch $V = 65{,}4\text{ cm}^3 \cdot (1 \pm 6\,\%)$.

Im Überblick: Differential einer Funktion

Wird bei einer an der Stelle x_0 differenzierbaren Funktion das Argument x_0 um Δx geändert, so heißen die mit dx und dy bezeichneten Koordinatenänderungen auf der Tangente **Differentiale**. Es gilt: $\mathbf{dx = \Delta x}$ und $\mathbf{dy = f'(x_0) \cdot dx}$.

dy heißt **Differential der Funktion** an der Stelle x_0 für die Änderung dx.

Für die tatsächliche Änderung Δy der Funktionswerte gilt: $\mathbf{\Delta y \approx dy}$. Diese Näherung ist umso besser, je betragsmäßig kleiner Δx ist.

Absoluter Maximalfehler $|\Delta y|$ einer abhängigen Größe y = f(x):

Bei $x = x_0 \pm |\Delta x|$ gilt: $|\Delta y| \approx |f'(x_0)| \cdot |\Delta x|$

Aufgaben

4.79 Ermittle das Differential der Funktion an der Stelle x_0:

a) $y = 2x^3 - x,\ x_0 = 2$ **b)** $y = \frac{1}{1 - 2x},\ x_0 = 2$ **c)** $y = \sin x,\ x_0 = 0$

d) $y = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$ **e)** $y = e^{2x},\ x_0 = 1$ **f)** $y = x \cdot \ln x,\ x_0 = 1$

4.80 Berechne Δy und dy für:

a) $y = \frac{x^2 + 2}{2},\ x_0 = -1,\ dx = 2$ und $0{,}01$ **b)** $y = e^{-x},\ x_0 = 0,\ dx = 0{,}1$ und $0{,}01$

c) $y = \sin x,\ x_0 = \pi,\ dx = \frac{\pi}{5}$ und $\frac{\pi}{20}$ **d)** $y = \ln x,\ x_0 = 2,\ dx = -0{,}2$ und $-0{,}002$

e) $y = \frac{x + 1}{x - 1},\ x_0 = -2,\ dx = 0{,}1$ und $0{,}05$

f) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),\ x_0 = 0,\ dx = -0{,}2$ und $-0{,}02$

4.81 Gibt es Funktionen, für welche $\Delta y = dy$ ist?

4.82 Beim Erwärmen einer Kugel mit einem Durchmesser von 20,0 cm vergrößert sich dieser um 1 mm. Berechne die Volumszunahme exakt und in der Näherung durch das Differential.

4.83 Der elektrische Widerstand eines Heizkörpers, der an eine Spannung von $U = 230$ V angeschlossen ist, beträgt $R = 75\ \Omega$. Um wie viel Prozent ändert sich der durchfließende Strom $I = \frac{U}{R}$, um wie viel die Leistung $P = \frac{U^2}{R}$, wenn die Spannung um 5 V abfällt? Beantworte die Fragestellung exakt und in der Näherung durch das Differential.

4.84 Ein ungedämpfter elektrischer Schwingkreis (Abb. 4.26) bestehe aus einem Kondensator der Kapazität $C = 5\ \mu$F und einer Spule der Induktivität $L = 0{,}2$ H. Die Schwingungsdauer T für die Stromstärke i wie auch für die Kondensatorladung u_C beträgt nach der THOMSON'schen[8] Formel $T = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$. Berechne exakt und näherungsweise mit Hilfe des Differentials die Änderung von T, wenn sich C um $0{,}1\ \mu$F sowie um $0{,}5\ \mu$F vergrößert (L bleibe gleich).

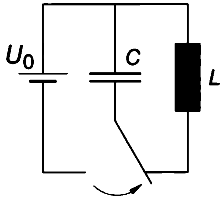


Abb. 4.26

[8] William THOMSON, (1824 - 1907), später Lord KELVIN, englischer Physiker

Absoluter Maximalfehler einer abhängigen Größe

4.85 Der Radius eines Kreises wurde zu 10,0 cm auf ± 0,5 cm genau gemessen. Berechne den absoluten und relativen Maximalfehler **a)** des Umfangs, **b)** des Flächeninhaltes.

4.86 Als Seitenkante eines Würfels wird 2,0 dm mit einem Maximalfehler von 0,5 cm angegeben. Wie groß sind der relative und absolute Maximalfehler

a) der Oberfläche **b)** des Volumens?

4.87 Der Durchmesser eines Ballons ist mit $d = (50{,}0 \pm 0{,}5)$ cm angegeben. Welcher relative und absolute Maximalfehler ergibt sich daraus für

a) das Volumen **b)** die Oberfläche des Ballons?

4.88 Für die Fallhöhe h eines Körpers wurde 50,0 m gemessen, wobei ein Fehler von ± 0,5 m für möglich gehalten wird. Wie groß ist der absolute und relative Maximalfehler für die Auftreffgeschwindigkeit v, wenn $v = \sqrt{2gh}$ ($g = 9{,}81\ \mathrm{m s^{-2}}$) gilt?

4.89 Ein unbekannter Ohm'scher Widerstand R_x lässt sich über eine Wheatstone'sche Brücke (Abb. 4.27) aus $R_x = R_0 \cdot \frac{x}{a-x}$ bestimmen, wenn der Abtastpunkt P entlang des Drahtes verschoben wird, bis das Amperemeter in der Brücke keinen Strom mehr anzeigt. Berechne den maximalen relativen und maximalen absoluten Fehler von R_x, wenn $R_0 = 1\,000\ \Omega$, a = 1 000 mm und x = 480 mm ± 1 mm ist.

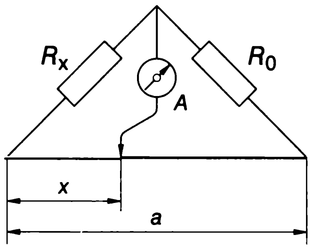


Abb. 4.27

4.90 $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ ist die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels (Abb. 4.28) für kleine Ausschläge, wobei l die Fadenlänge und $g = 9{,}81\ \mathrm{m s^{-2}}$ die Fallbeschleunigung ist. Auf welche prozentuelle Genauigkeit kann T angegeben werden, wenn l auf 1 % genau bestimmt wurde?

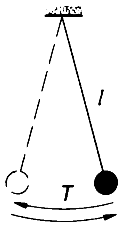


Abb. 4.28

4.91 Von einem Dreieck kennt man zwei Seiten zu 84,30 cm und 65,81 cm. Der von ihnen eingeschlossene Winkel α wurde zu 42° gemessen, wobei ein Fehler von 0,5° für möglich gehalten wird. Wie groß ist der relative Maximalfehler der Dreiecksfläche?

4.92 Um eine Masthöhe h (Abb. 4.29) zu berechnen, bestimmt man aus der Entfernung a = 52,0 m den Höhenwinkel $\alpha = (28 \pm 1)°$. Wie wirkt sich die Ungenauigkeit des Winkels auf die Masthöhe h aus?

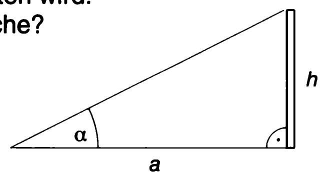


Abb. 4.29

4.93 Als Seitenkante eines Würfels wird der Wert 20,0 cm gemessen. Wie groß darf der absolute Messfehler der Seitenkante höchstens sein, wenn die Oberfläche auf 1 % genau bestimmt werden soll?

4.94 Das Volumen eines Würfels soll durch Messung seiner Seitenkante auf 3 % genau bestimmt werden. Wie groß darf in diesem Fall die prozentuelle Messunsicherheit der Seitenkante höchstens sein?

4.6 Ableitung einer Funktion (Kurve) in Parameterdarstellung

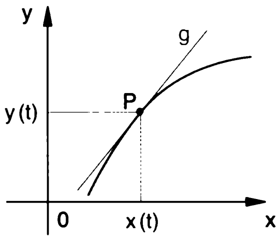


Abb. 4.30

Gegeben sei eine Funktion (Kurve) in Parameterdarstellung: x = x(t), y = y(t). Wir fragen nach der Steigung der Tangente g in dem zum Parameterwert t gehörenden Punkt P(x(t)/y(t)) der Kurve (Abb. 4.30).

Nimmt man zunächst an, dass zwischen x und y eine parameterfreie Darstellung y = y(x) möglich ist, so kann y als verkettete Funktion y = y(x) = y[x(t)] betrachtet werden. Differenzierbarkeit vorausgesetzt gilt dann nach der Kettenregel: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.

Man schreibt kurz: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$,

d.h. die Ableitungen nach dem Parameter t werden durch einen Punkt gekennzeichnet (gelesen: x Punkt bzw. y Punkt), während ein Strich auf eine Ableitung nach x hinweist. $\ddot{x}$ bzw. $\ddot{y}$ (gelesen: x zwei Punkt bzw. y zwei Punkt) bezeichnen die zweite Ableitung nach dem Parameter t.

Damit kann man schreiben: $\dot{y} = y' \cdot \dot{x}$, woraus für $\dot{x} \neq 0$ die einfache Regel folgt:

Ableitung nach x einer Funktion (Kurve) in Parameterdarstellung: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ $(\dot{x} \neq 0)$

Es lässt sich zeigen, dass eine parameterfreie Darstellung nicht Voraussetzung ist; diese Regel bleibt gültig, wenn $\dot{x} \neq 0$ ist.

Beispiel 4.27 : Waagrechter Wurf

Eine kleine Kugel bewegt sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit v_0 = 2 m/s auf einer horizontalen Bahn in der Höhe 1 m über dem Boden. Im Punkt P beginnt sie frei zu fallen.

a) Mit welcher Geschwindigkeit *v* trifft die Kugel am Boden auf?

b) Ermittle den Winkel φ, unter dem die Kugel am Boden auftrifft.

Lösung

Zu **a)** Zur Beschreibung der Bahnkurve wird ein Koordinatensystem wie in Abb. 4.31 festgelegt. Verlässt die Kugel zur Zeit *t* = 0 s die horizontale Bahn in P, dann gilt für *t* > 0 s bis zum Auftreffen am Boden:

$$x(t) = v_0 \cdot t \quad \text{und} \quad y(t) = h - \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Einsetzen ergibt ($g \approx 10$ ms^{-2}, *t* in s, x und y in m): $x(t) = 2t$, $y(t) = 1 - 5 \cdot t^2$.

Die Kugel trifft am Boden auf, wenn y = 0:

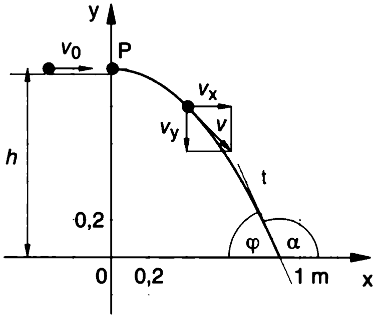


Abb. 4.31 Waagrechter Wurf

$$1 - 5 \cdot t^2 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447 \text{ als positive Lösung.}$$

Die Kugel führt beim Wurf gleichzeitig eine horizontale Bewegung mit der Geschwindigkeit $v_x = v_0 = 2$ und eine Fallbewegung mit der Geschwindigkeit $v_y = -g \cdot t = -10t$ durch (v_x und v_y in m/s). v_y ist negativ, weil der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ nach unten gerichtet ist. Man erhält diese beiden Geschwindigkeiten auch, wenn man x und y nach der Zeit *t ableitet*, da die Geschwindigkeit die Ableitung des Weges nach der Zeit ist (siehe dazu Abschnitt 5.1): $v_x = \dot{x}(t) = 2$, $v_y = \dot{y}(t) = 0 - 5 \cdot 2t = -10t$.

Im Moment des Auftreffens, also zum Zeitpunkt $t_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ist $v_x = 2$ und $v_y = -\frac{10}{\sqrt{5}}$.
Der Betrag des Geschwindigkeitskeitsvektors zum Zeitpunkt t_0 ist
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{24} = 4{,}9$ (in m/s).

Zu **b)** $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{10t}{2} = -5t$; $\tan\alpha = y'(t_0) = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5} \Rightarrow \alpha = -65{,}9° + 180° = 114{,}1°$.
Damit ist der gesuchte Winkel $\varphi = 180° - \alpha = 65{,}9°$.

Anmerkung: In diesem Fall kann man die Aufgabe auch lösen, indem man die Bahnkurve parameterfrei darstellt:

$t = \frac{x}{2}$, $y = 1 - 5 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{5}{4} \cdot x^2$.

Die Bahnkurve ist somit Teil einer Parabel ("Wurfparabel"). $x_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ist ihre positive Nullstelle.

$y' = 0 - \frac{5}{4} \cdot 2x = \frac{5}{2} \cdot x$; $y'(x_0) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$, woraus sich wie oben α und φ ergeben.

Beispiel 4.28 : Zykloide

Eine gespitzte Zykloide (siehe "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 174) ist durch die Parameterdarstellung $x(t) = r \cdot (t - \sin t)$, $y(t) = r \cdot (1 - \cos t)$ gegeben.

a) Ermittle gegebenenfalls die Stellen mit waagrechter Tangente für $0 \leq t < 2\pi$

b) Zeige, dass die Zykloide für $t = 0$ eine senkrechte Tangente besitzt.

Lösung

Zu **a)** Die Zykloide kann nicht parameterfrei dargestellt werden.

$\dot{x} = r \cdot (1 - \cos t)$, $\dot{y} = r \cdot \sin t$;

$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r \cdot \sin t}{r \cdot (1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = 0$

woraus folgt $\sin t = 0$.

Diese Gleichung wird für $0 < t < 2\pi$ gelöst durch $t = \pi$. Dem entspricht der Punkt P mit $x = r \cdot (\pi - \sin \pi) = \pi \cdot r$ und $y = r \cdot (1 - \cos \pi) = 2r$.

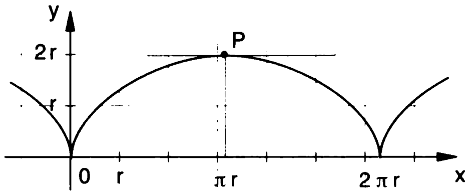


Abb. 4.32 Zykloide

Zu **b)** Für $t = 0$ ist $\dot{x} = 0$, sodass hier die Formel $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ nicht angewendet werden kann. Wir können jedoch untersuchen, wie sich die Ableitung y' verhält, wenn t sich dem Wert 0 von rechts unbegrenzt nähert, d.h. wir bilden den rechtsseitigen Grenzwert der Ableitung:

$\lim\limits_{t \to 0+} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = „\frac{0}{0}“.$

Man erhält vorerst eine unbestimmte Form, die den möglichen Grenzwert nicht erkennen lässt. Ersetzt man nun t durch $2 \cdot \frac{t}{2}$, so erhält man (wegen $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ und $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$):

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{t}{2}\right)}{1 - \cos\left(2 \cdot \frac{t}{2}\right)} = \lim_{t\to 0+} \frac{2 \cdot \sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2}}{1 - \left[\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}\right]} = \lim_{t\to 0+} \frac{2 \cdot \sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2}}{2 \cdot \sin^2\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0+} \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \infty .$$

Letzteres deswegen, da $\cos\frac{t}{2} \to 1$ und $\sin\frac{t}{2} \to 0$ für $t \to 0+$. Der (rechtseitige) Grenzwert der Tangentensteigung ist also ∞, die Tangente verläuft senkrecht.

Beispiel 4.29 : Tangente an eine Kurve in Parameterdarstellung

Die Gleichung der Astroide (Sternkurve) in Parameterform lautet: $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$ $(0 \leq t < 2\pi)$.

a) Ermittle die Gleichung der Tangente an die Astroide für t = 1.

b) Stelle die Astroide graphisch dar und zeichne die Tangente ein.

Lösung

Zu **a)** Obwohl hier eine parameterfreie Darstellung möglich ist, löst man die Aufgabe leichter in der Parameterdarstellung. Zunächst berechnen wir für t = 1 die Koordinaten des Punktes P: $x(1) = \cos^3 1 = 0{,}158$; $y(1) = \sin^3 1 = 0{,}596$; P(0,158/0,596).

Ableitungen: $\dot{x} = -3\cos^2 t \cdot \sin t$ bzw. $\dot{y} = 3\sin^2 t \cdot \cos t$.

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3\sin^2 t \cdot \cos t}{-3\cos^2 t \cdot \sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t.$$

Damit ergibt sich für die Steigung k der Tangente $y = k \cdot x + d$ im Punkt P:
$k = y'(t = 1) = -\tan 1 = -1{,}557$.

Berechnung von d durch Einsetzen der Koordinaten von P in die Tangentengleichung:
$0{,}596 = (-1{,}557) \cdot 0{,}158 + d \Rightarrow d = 0{,}841$.

Damit lautet die Gleichung der gesuchten Tangente: $y = -1{,}557 \cdot x + 0{,}841$.

Zu **b)**

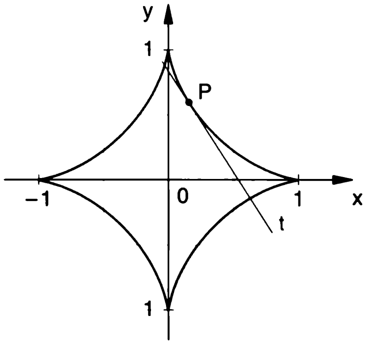
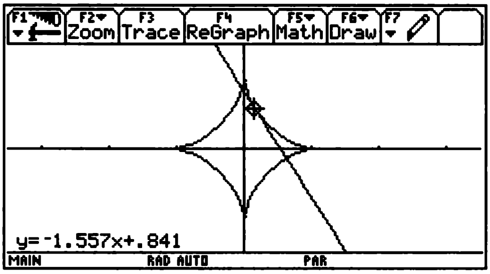


Abb. 4.33 Astroide und Tangente

Man kann die Kurve (Abb. 4.33) mit Hilfe einer Wertetabelle zeichnen. Es entsteht eine sternförmige Kurve mit 4 Zacken.

Bei t = 0 und t = π besitzt die Kurve waagrechte Tangenten, für $t = \frac{\pi}{2}$ und $t = \frac{3\pi}{2}$ senkrechte Tangenten. Zeige dies!

Die Astroide kann auch als Bahnkurve eines Punktes P am Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = \frac{1}{4}$ betrachtet werden, der innen auf einem Kreis mit dem Radius R = 1 abrollt (siehe "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 177).



Im MODE-Menü wird zuerst bei Graph PARAMETRIC aktiviert und danach die Kurve im y-Editor eingegeben.

Zum Zeichnen der Tangente wird F5 A (A: Tangent) gedrückt; auf die Frage Tangent at? wird der Parameterwert eingegeben: 1 ENTER, die Tangente wird gezeichnet.

Mit F2 5 (5:ZoomSqr) wird die Verzerrung der Kurve aufgehoben.

Die Kreisevolvente findet im Maschinenbau als Profilkurve der Zahnflanken bei einer Evolventenverzahnung Anwendung.

Beispiel 4.30 : Evolvente eines Kreises

Um einen Kreis sei ein Faden gelegt. Dieser Faden wird nun, in S beginnend, straff abgewickelt (Abb. 4.34). Dabei beschreibt das Fadenende P(x(t), y(t)) eine Kurve, die als **Evolvente**[9] *des Kreises* bezeichnet wird.

a) Ermittle ihre Parameterdarstellung und zeichne die Kurve.

b) Zeige, dass jede Kreistangente die Evolvente im rechten Winkel schneidet.

Lösung

Zu **a)**

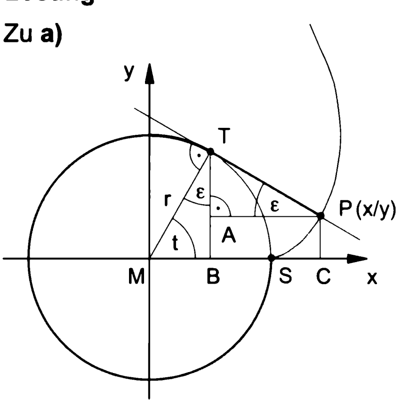


Abb. 4.34 Kreisevolvente

Es gilt: $\overline{TP} = \overset{\frown}{TS} = r \cdot t$ (t im Bogenmaß).

$x = \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{BC} = r \cdot \cos t + \overline{TP} \cdot \cos \varepsilon$; wegen $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - t$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ folgt:

$x = r \cdot \cos t + r \cdot t \cdot \sin t = r \cdot (\cos t + t \cdot \sin t)$.

$y = \overline{BT} - \overline{AT} = r \cdot \sin t - \overline{TP} \cdot \sin \varepsilon =$

$\quad = r \cdot \sin t - r \cdot t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = r \cdot (\sin t - t \cdot \cos t)$.

Somit lautet die Parameterdarstellung der Kreisevolvente:

$x = r \cdot (\cos t + t \cdot \sin t)$

$y = r \cdot (\sin t - t \cdot \cos t)$.

Wir zeichnen die Evolvente des Kreises für $0 \leqslant t < 2\pi$, also für eine volle Abwicklung des Fadens (Abb. 4.35). Dazu werden für einige Parameterwerte t die Koordinatenwerte x und y berechnet.

9 evolvere (lateinisch), hervorwälzen, entwickeln

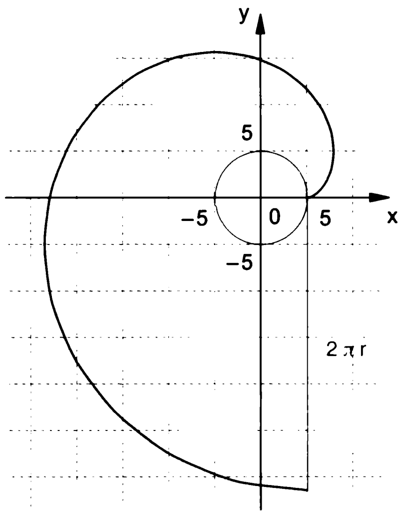
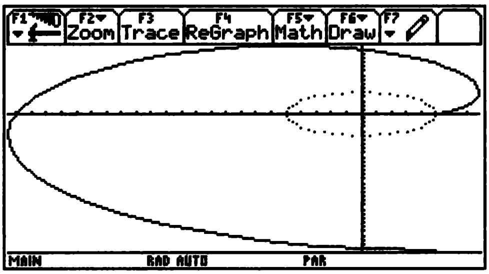
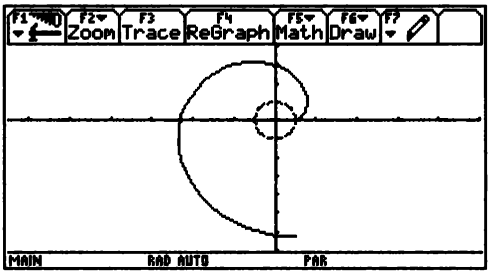


Abb. 4.35 Kreisevolvente bei voller Abwicklung

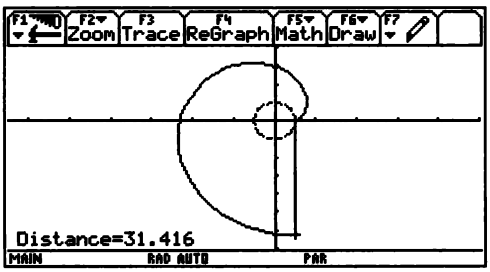
t	x	y
0	5	0
$\frac{\pi}{6}$	5,64	0,23
$\frac{\pi}{3}$	7,03	1,71
$\frac{\pi}{2}$	7,85	5
$\frac{2\pi}{3}$	6,57	9,57
$\frac{5\pi}{6}$	2,16	13,84
π	−5	15,71
$\frac{7\pi}{6}$	−13.49	13,37
$\frac{4\pi}{3}$	−20,64	6,14
$\frac{3\pi}{2}$	−23,56	−5
$\frac{5\pi}{3}$	−20,17	−17,42
$\frac{11\pi}{6}$	−10,07	−27,44
2π	5	−31,42





Nach Eingabe von x(t) und y(t) für den Kreis und seine Evolvente drückt man A (A:ZoomFit), um die beiden Kurven im (bereits voreingestellten) t-Bereich zwischen 0 und 2π zu zeichnen.

Anschließend kann man mit 5 (5:ZoomSqr) die gleiche Skalierung auf beiden Achsen einstellen. Es empfiehlt sich, im Ansichtfenster (Window) die Teilstrichabstände xscl und yscl geeignet zu setzen, etwa xscl = 10 und yscl = 5 und eventuell auch xmin, xmax, ymin und ymax betragsmäßig etwas zu vergrößern.



Mit 9 (9:Distance) kann man nach Eingabe zweier Parameterwerte den Abstand der ihnen entsprechenden Punkte ermitteln. Dabei werden diese Punkte durch eine Strecke verbunden.

Zu **b)**

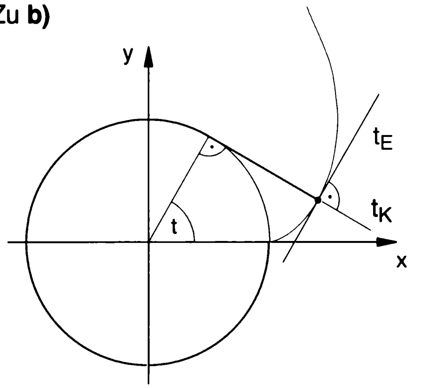


Abb. 4.36 Jede Kreistangente schneidet die Evolvente im rechten Winkel

Mit $\dot{x} = r \cdot (-\sin t + \sin t + t \cdot \cos t) = r \cdot t \cdot \cos t$ und $\dot{y} = r \cdot (\cos t - \cos t + t \cdot \sin t) = r \cdot t \cdot \sin t$ erhält man für die Steigung der Tangente t_E der Evolvente (Abb. 4.36):

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r \cdot t \cdot \sin t}{r \cdot t \cdot \cos t} = \tan t.$$

Mit *demselben* Parameter t ("Ingenieur-Mathematik 2", Seite 172) kann auch der Kreis in der Form:

$x = r \cdot \cos t,\ y = r \cdot \sin t$

dargestellt werden. Für die Steigung einer Kreistangente t_K gilt dann:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r \cdot \cos t}{r \cdot (-\sin t)} = -\frac{1}{\tan t}.$$

Da die Steigung von t_K gleich dem negativen Kehrwert der Steigung von t_E ist, stehen die Tangenten normal aufeinander.

Man kann auch Evolventen ("Abwicklungskurven") zu anderen Ausgangskurven zeichnen. Beispielsweise sind die Evolventen einer Astroide Ellipsen. Die Ausgangskurven, auf denen die Abwicklung erfolgt, werden in diesem Zusammenhang **Evoluten** genannt.

Im Überblick: Ableitung in Parameterdarstellung

Eine Ableitung nach einem Parameter wird üblicherweise durch einen Punkt bzw. durch Punkte gekennzeichnet: $\dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \dot{y} = \frac{dy}{dt},\ \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},\ \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}.$

Ableitung einer Funktion (Kurve) in Parameterdarstellung **nach x**: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\quad (\dot{x} \neq 0)$

Aufgaben

4.95 Bilde die Ableitung y' der folgenden in einer Parameterdarstellung gegebenen Funktion und ermittle gegebenenfalls die Punkte mit einer waagrechten Tangente:

a) $x = t + 1,\ y = t^2 - 1$
b) $x = t - 1,\ y = t^3 + 1$
c) $x = \frac{1}{2 - t},\ y = t^2$
d) $x = e^t,\ y = 1 + t^2$
e) $x = 2t,\ y = \sqrt{5t}$
f) $x = \cos t,\ y = \sin^2 t$
g) $x = \frac{1}{1 - t},\ y = \frac{1}{3 - t}$
h) $x = \ln t,\ y = \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right)$
i) $x = \ln t,\ y = \frac{t}{1 + t^2}$
j) $x = e^t - e^{-t},\ y = e^t + e^{-t}$
k) $x = 2 + t,\ y = t \cdot e^{-t}$
l) $x = \frac{t}{1 - t},\ y = (2t + 1)^2$

4.96 Ermittle die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkt mit dem Parameter t:

a) $x = 2 \cdot e^t,\ y = e^{-t},\ t = 0$
b) $x = 2t^2 - 1,\ y = t^4,\ t = 1$
c) $x = 3 \cdot \cos t,\ y = 3 \cdot \sin t,\ t = \frac{\pi}{4}$
d) $x = \frac{1}{t},\ y = -1 + \ln(2t),\ t = 1$
e) $x = \frac{3t}{1 + t^2},\ y = \frac{3t^2}{1 + t^2},\ t = 0{,}5$
f) $x = \sinh t,\ y = \cosh t,\ t = 0$
g) $x = 2 \cdot \cosh t,\ y = \sinh t,\ t = 2$
h) $x = \sqrt{\arctan t},\ y = 2 - \arctan t,\ t = 0{,}5$

4.97 Gegeben ist ein Kreis in Parameterdarstellung $x = 5 \cdot \cos t,\ y = 5 \cdot \sin t,\ 0 \leq t < 2\pi$. Ermittle die Gleichungen der beiden Tangenten an der Stelle $x_0 = 3$.

4.98 Ermittle die Punkte mit waagrechter Tangente der folgenden LISSAJOUS-Figur ($0 \leqslant t < 2\pi$):

a) $x = \cos t,\ y = \cos(2t)$ **b)** $x = \cos t,\ y = \sin(2t)$ **c)** $x = \sin t,\ y = \cos(3t)$

4.99 Die LISSAJOUS-Figur $x = \sin t,\ y = \sin 2t,\ 0 \leqslant t < 2\pi$ besitzt im Koordiantenursprung zwei Tangenten. Wie lauten ihre Gleichungen?

4.100 Durch $x(t) = 3 + 5\cos t,\ y(t) = 1 + 3\sin t$ ist eine Ellipse in Parameterdarstellung gegeben. In welchen Punkten der Ellipse beträgt der Steigungswinkel α der Tangenten 135°?

4.101 Durch $x(t) = 2\cdot(t - \sin t),\ y(t) = 2\cdot(1 - \cos t),\ t \in \mathbb{R}$, ist eine Funktion in Parameterdarstellung gegeben.

a) Ermittle die Gleichung der Tangenten für t = 1, 2 und 3.

b) In welchen Punkten besitzt die Kurve eine waagrechte Tangente?

4.102 Stelle die Gleichung der Tangente an die Kreisevolvente $x = 2\cdot(\cos t + t\cdot\sin t)$, $y = 2\cdot(\sin t - t\cdot\cos t),\ t > 0$, im Punkt mit dem Parameterwert $t = \frac{\pi}{4}$ auf.

4.103 Eine *Kardioide* (Herzkurve) ist gegeben durch $x = 2\sin t - \sin 2t,\ y = 2\cdot\cos t - \cos 2t$ mit $0 \leqslant t < 2\pi$. Ermittle ihre Punkte mit waagrechter Tangente.

4.104 Durch $x = 2\cdot\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},\ y = 2\cdot\frac{t^3 - t}{t^2 + 1},\ t \in \mathbb{R}$, ist eine *Strophoide* in Parameterdarstellung gegeben.

a) Die Kurve verläuft zweimal durch den Koordinatenursprung. Unter welchen Winkeln erfolgt dies?

b) In welchen Punkten besitzt die Kurve waagrechte Tangenten?

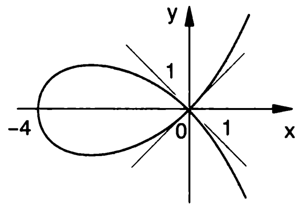


Abb. 4.37

4.105 Durch $x = 3\cdot\frac{\cos t}{\sin t},\ y = 2\cdot\sin(2t),\ 0 < t < \pi$, ist eine Kurve in Parameterdarstellung gegeben.

a) Stelle die Gleichung der Tangente im Koordinatenursprung auf und berechne den Steigungswinkel der Tangente.

b) In welchen Punkten besitzt die Kurve eine waagrechte Tangente?

4.106 Ein Körper wird zum Zeitpunkt $t = 0$ s aus einer Höhe $h = 20$ m mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 30\ \mathrm{ms}^{-1}$ unter einem Winkel $\alpha = 30°$ abgeschossen. Für seine Bahnkurve gilt: $x = v_0\cdot t\cdot\cos\alpha,\ y = h + v_0\cdot t\cdot\sin\alpha - \frac{1}{2}g\cdot t^2$ ($g \approx 10\ \mathrm{ms}^{-2}$).

a) Ermittle allgemein die Geschwindigkeit des Körpers in horizontaler und in vertikaler Richtung!

b) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Körper am Boden auf?

c) Unter welchem Winkel trifft der Körper am Boden auf?

d) Ermittle die Koordinaten des Scheitels der Bahnkurve.

4.107 Unter welchem Winkel schneiden einander die Graphen

a) $y = f(x) = x^2$ sowie $x = \cos t,\ y = \sin t$ ($0 \leqslant t < 2\pi$) für $x > 0$,

b) $y = f(x) = \ln(2x)$ sowie $x = t^2$ und $y = \ln\sqrt{t}$.

Hinweis: Setze $y(t) = f(x(t))$ und bestimme daraus den Parameterwert t des Schnittpunktes.

4.108 Unter welchem Winkel schneiden einander die Graphen

a) $x = 2\cdot e^t,\ y = e^{-t}$ sowie $x = \sqrt{\tau},\ y = \tau^2$,

b) $x = \sqrt{\ln t},\ y = \ln(2t)$ sowie $x = \sqrt{2\tau}$ und $y = \sqrt{\tau + 1}$.

Hinweis: Im Schnittpunkt ist $x(t) = x(\tau)$ und $y(t) = y(\tau)$; aus diesem Gleichungssystem können die Parameterwerte t und τ des Schnittpunktes bestimmt werden.

5 Anwendungen der Differentialrechnung

5.1 Differentialquotienten in Naturwissenschaft und Technik

In den Anwendungen interessiert oft nicht nur der Zusammenhang zweier Größen x und y, der in Form einer Funktion y = f (x) bestehen kann. Man möchte darüber hinaus auch wissen, wie *stark* sich die Größe y ändert, wenn die andere Größe x zu- oder abnimmt.

Beispiel:

Wir denken uns einen frei fallenden Körper. Nach einem Fallweg s besitzt er die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gs}$ mit $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$. Vergrößert sich s um Δs, so nimmt v um Δv zu. Ein Maß für die Stärke dieser Änderung ist das *Verhältnis* Δv zu Δs, also der Differenzenquotient $\frac{\Delta v}{\Delta s}$. Er wird (mittlere) Änderungsrate genannt.

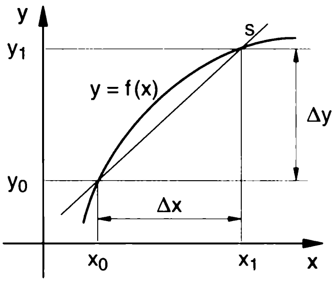


Abb. 5.1

> Sind x und y physikalische Größen mit y = f (x), so heißt das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ **mittlere Änderungsrate** von y zwischen x_0 und x_1.

Geometrisch ist die mittlere Änderungsrate gleich der Steigung der Sekante s (Abb. 5.1).

Beispiel 5.1 : Mittlere Änderungsrate

Ein Körper hat eben die Strecke $s = 2{,}00$ m im freien Fall zurückgelegt. Berechne die mittlere Änderungsrate der Fallgeschwindigkeit, wenn der Fallweg s

a) um 0,5 m **b)** um 0,1 m zunimmt.

Lösung

$v(s)$ bezeichnet die Fallgeschwindigkeit nach dem Fallweg s.

$v(2\ \mathrm{m}) = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2}\ \mathrm{ms^{-1}} = 6{,}32\ \mathrm{ms^{-1}}$;

$v(2{,}5\ \mathrm{m}) = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2{,}5}\ \mathrm{ms^{-1}} = 7{,}07\ \mathrm{ms^{-1}}$; $v(2{,}1\ \mathrm{m}) = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2{,}1}\ \mathrm{m/s} = 6{,}48\ \mathrm{ms^{-1}}$;

Zu **a)** $\Delta s = 0{,}5$ m: $\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{7{,}07\ \mathrm{ms^{-1}} - 6{,}32\ \mathrm{ms^{-1}}}{0{,}5\ \mathrm{m}} = 1{,}49\ \frac{\mathrm{ms^{-1}}}{\mathrm{m}}$

Zu **b)** $\Delta s = 0{,}1$ m: $\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{6{,}48\ \mathrm{ms^{-1}} - 6{,}32\ \mathrm{ms^{-1}}}{0{,}1\ \mathrm{m}} = 1{,}56\ \frac{\mathrm{ms^{-1}}}{\mathrm{m}}$.

Da die Geschwindigkeit v während des Fallens zunimmt, kann nur von einer mittleren Änderungsrate innerhalb der Wegänderung Δs gesprochen werden.

Ganz gleich, wie klein Δs schon ist, stets wird $\frac{\Delta v}{\Delta s}$ eine mittlere Änderungsrate **während** der Fallwegzunahme Δs sein. Man kann noch nicht von einer Änderungsrate *bei* einem bestimmten Wert von s sprechen. Erst im Grenzfall $\Delta s \to 0$ m der mittleren Änderungsrate kann von einer Änderungsrate *bei* einem bestimmten Fallweg s die Rede sein. Sie gibt an, wie stark sich dort die Fallgeschwindigkeit v bei Zunahme von s ändert:

$\lim\limits_{\Delta s \to 0 m} \frac{\Delta v}{\Delta s}$ ist die Änderungsrate von v bei Zunahme von s.

Dies ist aber gerade die Ableitung oder der Differentialquotient $v'(s)$!

Wegen $v'(s) = \frac{g}{\sqrt{2gs}}$ ist $v'(2\text{ m}) = \frac{10}{\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2}} \frac{\text{ms}^{-1}}{\text{m}} = 1{,}58 \frac{\text{ms}^{-1}}{\text{m}}$ die Änderungsrate der Geschwindigkeit v, wenn $s = 2$ m ist.

Wir halten fest:

> x und y seien physikalische Größen mit $y = f(x)$ als differenzierbare Funktion.
> Die (momentane) **Änderungsrate** der Größe y an der Stelle x_0 ist gleich dem **Differentialquotienten** $\mathbf{y'(x_0)}$.

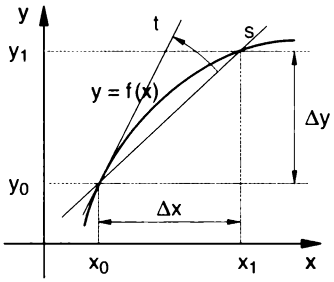


Abb. 5.2

Geometrisch ist die (momentane) Änderungsrate gleich der Steigung der Tangente (Abb. 5.2). Je steiler die Tangente, desto stärker ändert sich dort die Funktion.

Die folgende Tabelle zeigt einige in Physik, Technik oder Wirtschaft häufig verwendete Größen, die als Differentialquotienten (Änderungsraten) *definiert* sind:

Änderungsrate	Schreibweise	Name
des Weges s mit der Zeit t	$v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$	Geschwindigkeit
der Geschwindigkeit v mit der Zeit t	$a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$	Beschleunigung
der verrichteten Arbeit W (etwa eines Automotors) mit der Zeit t	$P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$	Leistung
der durch einen Leiter fließenden elektrischen Ladung q mit der Zeit t	$i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$	elektrische Stromstärke
der durch eine Fläche strömenden Wärmemenge Q mit der Zeit t	$P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$	Wärmestrom
der Temperatur T mit der Eindringtiefe x in eine Wand	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{dT}{dx}$	Temperaturgefälle oder Temperaturgradient
der Kosten K eines Gutes mit der produzierten Menge x	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{dK}{dx}$	Grenzkosten

Anmerkung:

Die Ableitung einer Größe y nach der Zeit t wird häufig mit einem Punkt über y – wie bei der Ableitung nach einem Parameter – gekennzeichnet. So schreibt man kurz $\dot{y}$ statt $y'(t)$.

Beispiele: Geschwindigkeit $v = \dot{s}$, Beschleunigung $a = \dot{v}$, Wärmestrom $\dot{Q}$.

Auch naturwissenschaftliche Gesetze werden mit Hilfe von Änderungsraten formuliert. Ein Beispiel ist das Induktionsgesetz in der Elektrizitätslehre: $u_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$; hier ist u_{ind} die Spannung, die in einer Leiterschleife von einem sich zeitlich ändernden magnetischen Fluss Φ induziert wird.

Beispiel 5.2 : Harmonische Schwingung

Für einen harmonisch schwingenden Körper (Abb. 5.3) gelte für die Auslenkung y von der Ruhelage in Abhängigkeit von der Zeit t: $y = \hat{y} \cdot \sin \omega t$ mit der Amplitude $\hat{y} = 2$ cm und der Kreisfrequenz $\omega = 3\,\mathrm{s}^{-1}$.

a) Berechne die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a des schwingenden Körpers für $t = 0$ s und $t = \frac{T}{4}$, wenn $T = \frac{2\pi}{\omega}$ die Schwingungsdauer ist.

b) Stelle die drei Funktionen $y = y(t)$, $v = v(t)$ und $a = a(t)$ über eine volle Periode T graphisch dar.

Lösung

Zu **a)**

Die Geschwindigkeit v ist die Ableitung des Weges y nach der Zeit: $v = \dot{y}$, die Beschleunigung a ist die Ableitung der Geschwindigkeit v nach der Zeit, also die zweite Ableitung des Weges y nach der Zeit: $a = \dot{v} = \ddot{y}$. Unter Berücksichtigung der Kettenregel erhält man:

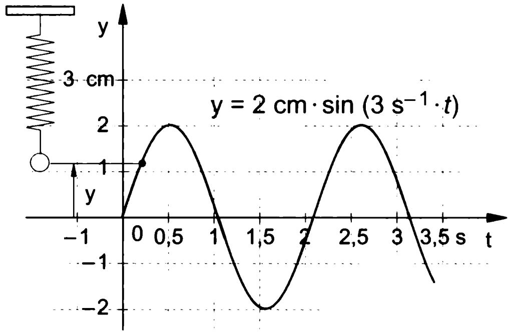


Abb. 5.3 Harmonische Schwingung

$v = \dot{y} = 2\,\mathrm{cm} \cdot 3\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \cos(3\,\mathrm{s}^{-1} t) =$
$= 6\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot \cos(3\,\mathrm{s}^{-1} t)$

$a = \ddot{y} = -6\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot 3\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \sin(3\,\mathrm{s}^{-1} t) = -18\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin(3\,\mathrm{s}^{-1} t)$.

$t = 0$ s (Durchgang durch die Ruhelage):

$v = 6\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot \cos(3\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0\,\mathrm{s}) = 6\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot \cos 0 = 6\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$

$a = -18\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin(3\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0\,\mathrm{s}) = -18\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin 0 = 0\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$. Die Beschleunigung ist null.

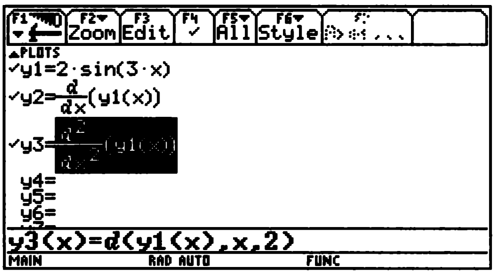
$t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi/3\,\mathrm{s}^{-1}}{4} = \frac{\pi}{6}$ s (oberer Umkehrpunkt der Schwingung):

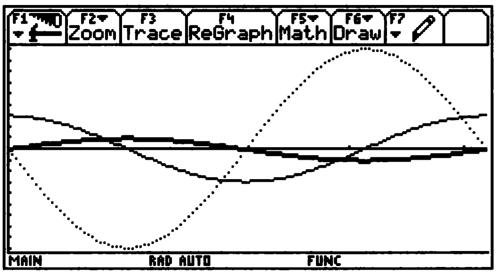
$v = 6\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot \cos(3\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \frac{\pi}{6}\,\mathrm{s}) = 6\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$. Die Geschwindigkeit ist null.

$a = -18\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin(3\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \frac{\pi}{6}\,\mathrm{s}) = -18\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -18\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$.

Zu **b)**

Voyage 200





y1(x) ist die Auslenkung y als Funktion der Zeit (hier x). Als Anzeigestil wird Thick (F6 4) gewählt. y2(x) ist als Geschwindigkeit die 1. Ableitung von y1(x).

Schließlich ist y3(x) als Beschleunigung die zweite Ableitung von y1(x). Als Anzeigestil für y3(x) ist Dot (F6 2) gewählt.

Beispiel 5.3 Bewegung eines Objektes

Eine Stange von 6,0 m Länge lehnt gegen eine Wand (Abb. 5.4). Der Fußpunkt A der Stange wird mit einer Geschwindigkeit von 0,50 m/s horizontal weggezogen. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das obere Stangenende B nach unten, wenn A gerade einen Abstand von 3,0 m von der Wand besitzt?

Lösung

Ist x der Abstand des unteren Stangenendes A von der Wand, so ist $\dot{x} = 0{,}5$ m/s. Bezeichnet y die Entfernung des oberen Stangenendes B vom Boden, so ist $\dot{y}$ gesucht. Zwischen x und y gilt die Beziehung: $x^2 + y^2 = 6{,}0^2\ \mathrm{m}^2$.

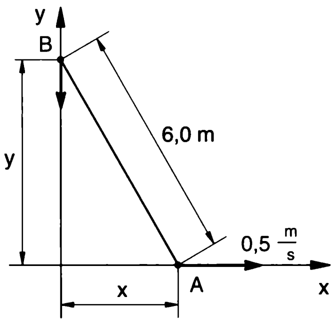


Abb. 5.4

Daraus: $y = \sqrt{36\ \mathrm{m}^2 - x^2}$.

Ableitung nach t ergibt nach der Kettenregel:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{36\ \mathrm{m}^2 - x^2}} \cdot \dot{x} = -\frac{x \cdot \dot{x}}{\sqrt{36\ \mathrm{m}^2 - x^2}}.$$

Einsetzen für x und $\dot{x}$ ergibt: $\dot{y} = -\frac{3\ \mathrm{m} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{\sqrt{36\ \mathrm{m}^2 - 3^2\ \mathrm{m}^2}} = -0{,}29\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Das negative Vorzeichen drückt aus, dass $y(t)$ erwartungsgemäß eine streng monoton fallende Funktion ist.

Im Überblick: Differentialquotienten in Naturwissenschaft und Technik

Seien x und y physikalische Größen mit $y = f(x)$:

Mittlere Änderungsrate von y *zwischen* x_0 und x_1: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

(Momentane) Änderungsrate von y *an* der Stelle x_0: $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Die (momentane) Änderungsrate ist also der **Differentialquotient** $y'(x_0)$.

Beispiele für Änderungsraten:

Geschwindigkeit: Ableitung des Weges s nach der Zeit t

Beschleunigung: Ableitung der Geschwindigkeit v nach der Zeit t

Elektrische Stromstärke: Ableitung der Ladungsmenge q nach der Zeit t

Aufgaben

5.1 Wird ein Körper zur Zeit $t = 0$ s aus einer Höhe $h = 2{,}0$ m mit der Geschwindigkeit $v_0 = 30\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ senkrecht nach oben geworfen, so gilt für seine momentane Höhe y: $y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, wobei $g \approx 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ist.

a) Berechne die mittlere Geschwindigkeit (mittlere Änderungsrate des Weges mit der Zeit) für die Zeitintervalle [2 s, 2,5 s], [2 s, 2,1 s] und [2 s, 2,01 s].

b) Berechne seine Geschwindigkeit $v = \frac{dy}{dt}$ zur Zeit $t = 2$ s nach dem Abwurf.

c) Wann erreicht der Körper seine maximale Höhe und wie groß ist diese?

5.2 Eine Last Q wird über zwei Stützen der Längen a = 8,0 m gehoben (Abb. 5.5). Mit welcher Geschwindigkeit wird die Last gehoben, wenn die Fußpunkte A und B der Stützen gerade einen Abstand von 2,0 m haben und jeder der beiden Punkte sich mit 1,0 m/s bewegt?

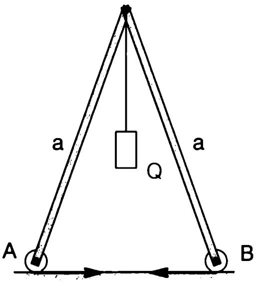


Abb. 5.5

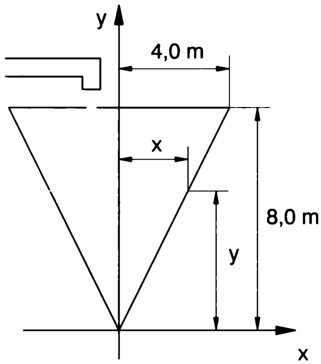


Abb. 5.6

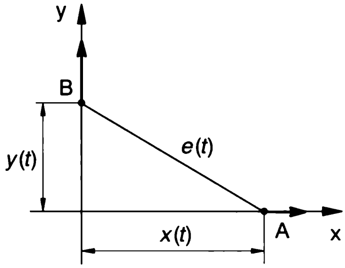


Abb. 5.7

5.3 Ein kegelförmiger Behälter mit der Spitze nach unten hat einen Grundkreisradius von 4,0 m und eine Höhe von 8,0 m (Abb. 5.6). Pro Stunde fließen 3,0 m³ Wasser zu. Wie ändert sich die Füllhöhe y mit der Zeit, wenn y gerade 5,0 m beträgt?

Hinweis: $\frac{dV}{dt}$ = 3,0 m³/h; V kann als Funktion von y ausgedrückt werden. $\frac{dy}{dt} = ?$

5.4 Ein Flugzeug A startet um 12 Uhr und fliegt mit einer Geschwindigkeit von 200 km/h ostwärts (Abb. 5.7). Ein zweites Flugzeug B startet eine Stunde später und fliegt mit einer Geschwindigkeit von 300 km/h in nördlicher Richtung. Mit welcher Geschwindigkeit $\dot{e}$ bewegen sich die beiden Flugzeuge um 14 Uhr voneinander weg?

5.5 Das Volumen eines Würfels nimmt mit einer Rate von 1,0 dm³ pro Minute zu. Wie groß ist die Änderungsrate der Seitenkante, wenn diese gerade 10,0 dm beträgt?

5.6 Nach dem Anlegen einer Gleichspannung U_0 an einen OHM'schen Widerstand R und einen Kondensator mit der Kapazität C zur Zeit t = 0 s gilt für die dem Kondensator zugeflossene Ladung $q(t) = U_0 C\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ mit $\tau = RC$ (Abb. 5.8). Berechne die Stromstärke $i(t) = \frac{dq}{dt}$ für $t \geqslant 0$ s, wenn R = 1000 Ω, C = 30 μF und U_0 = 25 V.

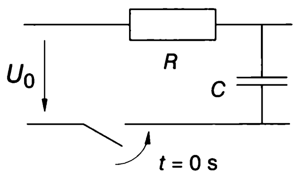


Abb. 5.8

5.7 Eine Kondensator hat die anfängliche Ladung Q_0 (Abb. 5.9). Beginnt seine Entladung mit t = 0 s, so nimmt die momentane Kondensatorladung q nach $q(t) = Q_0 e^{-t/t}$ mit $\tau = RC$ ab.

Berechne die Stromstärke $i(t) = \frac{dq}{dt}$ für $t \geqslant 0$ s, wenn R = 1000 Ω, C = 30 μF und $Q_0 = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ As.

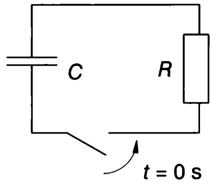


Abb. 5.9

5.2 Unbestimmte Ausdrücke

Im Kapitel 3 wurde ausführlich der Begriff des Grenzwertes behandelt. Im Folgenden geht es um eine weitere Methode zur Ermittlung gewisser Grenzwerte mit Hilfe der Differentialrechnung.

Beispiel 5.4 : Zwei vorbereitende Grenzwertaufgaben

Bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left[(x+2) - (x+1)\right]$

Lösung

Zu **a)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 2 = 2$. Kürzt man nicht, so entsteht für $x \to 0$ ein nicht definierter und daher eigentlich nicht erlaubter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$.

Zu **b)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left[(x+2) - (x+1)\right] = \lim\limits_{x \to \infty} 1 = 1$. Vereinfacht man nicht, so streben die Terme $(x+2)$ und $(x+1)$ für $x \to \infty$ ebenfalls nach ∞; es entsteht ein anderer nicht definierter Ausdruck, nämlich $\infty - \infty$. Dieser "Ausdruck" ist nicht null, sondern steht *hier* für den Grenzwert 1.

Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\infty - \infty$ heißen **unbestimmte Ausdrücke** oder **unbestimmte Formen**. Neben diesen beiden unbestimmten Ausdrücken gibt es noch weitere; wir fassen zusammen:

Unbestimmte Ausdrücke: $\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ 0 \cdot \infty, \ \infty - \infty, \ 0^0, \ \infty^0, \ 1^\infty$

Diese unbestimmten Ausdrücke sind *keine* Rechenanweisungen, sondern nicht mehr als bequeme kurze Schreibweisen für ein besonderes Grenzwertverhalten!

Die Ermittlung von Grenzwerten, die auf einen unbestimmten Ausdruck führen, kann schwierig sein. Hier kann die folgende Regel helfen.

Regel von de L'Hospital[10] (das s wird nicht gesprochen): Führt ein Grenzwert auf einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Anmerkungen:

(1) Die Regel setzt voraus, dass $f(x)$ und $g(x)$ in x_0 differenzierbar sind. Für x_0 darf auch ∞ oder $-\infty$ gesetzt werden.

(2) Zu beachten ist, dass Zähler und Nenner *getrennt* zu differenzieren sind und anschließend erst der Grenzwert zu bilden ist!

[10] Antoine de L'Hospital (1661 – 1704), französischer Mathematiker, verfasste mit Hilfe des Schweizer Mathematikers Johann Bernoulli (1667 – 1748) das erste verständliche Lehrbuch über die Differentialrechnung. Von ihm stammt auch die erwähnte Regel.

(3) Die Regel ist nur auf unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ anwendbar. Liegt ein unbestimmter Ausdruck einer anderen Form vor, so kann dieser stets durch elementare Umformungen auf die beiden genannten Formen zurückgeführt werden!

(4) Die Regel ist auch bei einseitigen Grenzwerten $x \to x_0+$ bzw. $x \to x_0-$ anwendbar.

(5) Öfters ist eine mehrmalige Anwendung der Regel von de L'HOSPITAL nötig; es gibt jedoch auch Fälle, wo die Regel trotzdem nicht zum Ziel führt, obwohl ein Grenzwert vorhanden ist.

(6) Tritt im Grenzwert ein unbestimmter Ausdruck auf, so kann nicht selten statt der Anwendung der Regel von de L'HOSPITAL eine elementare Umformung schneller zum Ziel führen.

Beispiel 5.5 : Unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$ **e)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$

Lösung

Zu **a)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(2x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{1} = 2.$

Zu **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^2-1)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2x}{1} = \frac{2}{1} = 2.$ Siehe auch Beispiel 3.1 c, Seite 75.

Zu **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$

Während die Grenzwerte in a) und b) auch ohne die Regel von de L'HOSPITAL einfach zu ermitteln sind, ist dies bei dieser Aufgabe nicht mehr der Fall.

Zu **d)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$ (da bei einem festen Zähler der Nenner nach ∞ und damit der Bruch gegen 0 strebt).

Zu **e)** Hier führt die dreimalige Anwendung der Regel von de L'HOSPITAL zum Ziel, jedes Mal liegt ein unbestimmter Ausdruck von der Form $\frac{\infty}{\infty}$ vor:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{e^x} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{e^x} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{e^x} = 0.$$

Zu **f)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$

In Verallgemeinerung von Beispiel 5.5 d), e) und f) ergibt sich die folgende Regel (siehe auch "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 78):

Monoton steigende Funktionen im Vergleich:

Die Exponentialfunktion $y = e^x$ geht schneller nach ∞ als die Potenzfunktion $y = x^n$ $(n > 0)$, und diese wiederum schneller als die logarithmische Funktion $y = \ln x$.

Beispiel 5.6 : Unbestimmte Ausdrücke anderer Formen

a) $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot e^{-x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0+} x \cdot \ln x$ **c)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^2 - x\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$

Lösung

Vor Anwendung der Regel von de L'HOSPITAL muss auf $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ umgeformt werden.

Zu **a)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-x} = „\infty\cdot 0" = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

Zu **b)** $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot \ln x = „0\cdot(-\infty)" = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = „\frac{-\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} (-x) = 0.$

Zu **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 - x\right) = „\infty - \infty"$. Schreibt man $x^2 - x = x\cdot(x-1)$, so kommt man ohne Regel von de L'HOSPITAL aus; denn mit $x \to \infty$ wächst natürlich auch $x\cdot(x-1)$ über alle Schranken: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 - x\right) = \infty$.

Zu **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = „\infty - \infty"$; hier ist es naheliegend, auf gleichen Nenner zu bringen, wodurch die Form $\frac{0}{0}$ erreicht wird:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\cdot\sin x} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x\cdot\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cdot\cos x} = „\frac{0}{0}".$$

Nochmalige Anwendung der Regel von de L'HOSPITAL ergibt weiters:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + x\cdot\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\cdot\sin x} = \frac{-0}{1+1-0} = 0.$$

Zu **e)** *Zur Erinnerung:* $a = e^{\ln a}$ $(a > 0)$ und weiters $a^n = (e^{\ln a})^n = e^{n\cdot\ln a}$!

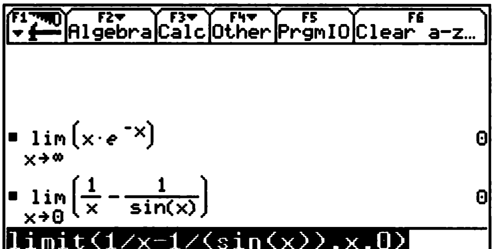
Diese Umformung wird bei allen drei unbestimmten Ausdrücken 0^0, ∞^0 und 1^∞ angewendet; anschließend wird der Grenzwert des Exponenten untersucht.

$f(x) = x^x = e^{x\cdot\ln x}$ ist nur für $x > 0$ definiert (warum?). Es kann daher nur der rechtsseitige Grenzwert, wenn vorhanden, bestimmt werden.

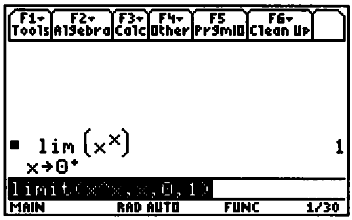
$\lim\limits_{x\to 0+} x^x = „0^0"$; wir schreiben daher: $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\cdot\ln x}$.

Da $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\ln x = 0$, ist $\lim\limits_{x\to 0+} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$ und damit $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1$.

Voyage 200



TI 89



Im Überblick: Regel von de L'HOSPITAL

Unbestimmte Ausdrücke: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Regel von de L'HOSPITAL: Ist $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Der Grenzwert kann auch einseitig sein. x_0 kann auch für ∞ oder $-\infty$ stehen.

Alle anderen Formen unbestimmter Ausdrücke lassen sich durch elementare Umformungen auf die beiden genannten speziellen Formen zurückführen.

Aufgaben

5.8 Bestimme den Grenzwert folgender gebrochen rationaler Funktion:
(i) nach einer Polynomdivision (ii) mit der Regel von de L'HOSPITAL:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{(x-2)^2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-x^3-3x^2+3x}{x^2-x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^6-3x^4+3x^2-1}{x^4-2x^2+1}$ **i)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-2x^2-4x+8}$

5.9 Bestimme den Grenzwert:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x}$ **g)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin(2x)}{\tan x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x}$ **j)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos bx}{x}$ **k)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a\cdot x-\sin x}{x\cdot\cos x}$ **l)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\sin ax}{\tan bx}$

5.10 Bestimme das Verhalten im Unendlichen ("für große x"), also den Grenzwert:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x-1}{1-x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2}$ **g)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ **h)** $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a\cdot x+3}{x+1}$ **j)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+a}{2x^2+b}$ **k)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ **l)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(a\cdot x)}{\sqrt{x^2+b}}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$ **n)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3}$ **o)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{\cosh x}$ **p)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{\sinh x}$

5.11 Bestimme den Grenzwert:

a) $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x}\cdot\ln x$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-3x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\ln(2x+a)$ **e)** $\lim\limits_{x\to\pi} \sin x\cdot\tan\frac{x}{2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0+} \sin x\cdot\ln x$

g) $\lim\limits_{x\to 0+} \tan x\cdot\ln 2x$ **h)** $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\tan x$ **i)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

5.12 Bestimme den Grenzwert in einer dazu geeigneten Weise:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1-} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x}\right)$ **e)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\ln x)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0-} \left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{2x}\right)$ **i)** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

5.13 Bestimme den Grenzwert:

a) $\lim\limits_{x \to 0+} (2x)^x$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$ **c)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ **d)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\sin x}$ **g)** $\lim\limits_{x \to 0+} (\sin x)^x$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\tan x}$

i) $\lim\limits_{x \to 0+} (\tan x)^{\tan x}$ **j)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ **k)** $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[x]{x}$ **l)** $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[x]{\ln x}$

5.14 Zeige mit Hilfe der Regel von de L'Hospital, dass gilt: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

5.15 Zeige, dass die Grenzwertbestimmung $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ mit der Regel von de L'Hospital nicht möglich ist. Wie könnte man auf andere Art den Grenzwert ermitteln?

5.16 Was ist falsch an folgender Rechnung? Wie groß ist der Grenzwert wirklich?

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x} = \lim_{x \to 2} \frac{6x - 4}{6x - 4} = 1$$

5.17 Was ist richtig?

a) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-5} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{2x} = \frac{1}{10}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-5} = \frac{0}{20} = 0$

5.18 Bestimme $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$ mit der Regel von de L'Hospital und erkläre das Ergebnis.

5.19 Ein Federpendel (Abb. 5.10) besteht aus einem Pendelkörper der Masse m, einer elastischen Feder und einer Dämpfungsvorrichtung. Stößt man das Pendel in der Gleichgewichtslage zur Zeit $t = 0$ s kurz an und erteilt ihm damit eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$, so kommt es bei nicht zu großer Dämpfung zu Schwingungen einer bestimmten Kreisfrequenz ω. Dabei gilt für die Auslenkung ($t \geqslant 0$ s) $y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t$, wobei δ ein Maß für die Dämpfung ist. Bei größer werdender Dämpfung geht ω gegen null (oder die Schwingungsdauer T gegen ∞): es kommt zum *aperiodischen Grenzfall*.
Ermittle $y(t)$ in diesem Fall!

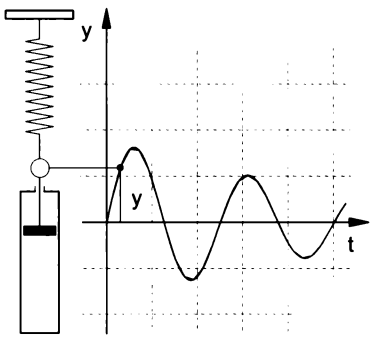


Abb. 5.10

5.20 Beim freien Fall eines Körpers der Masse m gilt bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes nach dem Gesetz $F_R = k \cdot v^2$.

a) $v = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}\left(1 - e^{-\frac{2k \cdot s}{m}}\right)}$ **b)** $s = \frac{m}{k} \cdot \ln\left[\cosh\left(t \cdot \sqrt{\frac{k \cdot g}{m}}\right)\right]$

Dabei ist v die Fallgeschwindigkeit und s der Fallweg nach der Fallzeit t, k der Reibungskoeffizient und g die Fallbeschleunigung. Leite durch den Grenzübergang $k \to 0$ das entsprechende Gesetz im luftleeren Raum her, also $v = \sqrt{2gs}$ bzw. $s = \frac{1}{2} g t^2$.

5.3 Kurvenuntersuchung

Die ersten beiden Ableitungen $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$ bestimmen ganz wesentlich das Verhalten einer differenzierbaren Funktion $y = f(x)$ um eine Stelle x_0.

Geometrische Deutung der ersten Ableitung: Steigungsverhalten

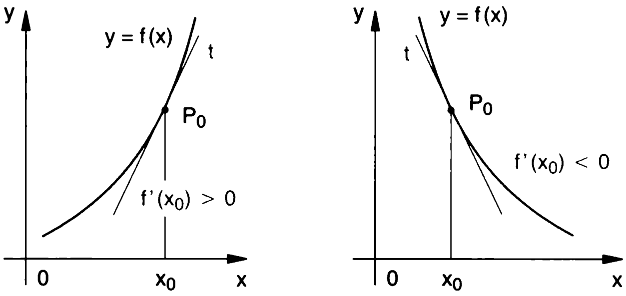


Abb. 5.11 Geometrische Deutung der 1. Ableitung

Ist $f'(x_0) > 0$, ist also die Tangentensteigung positiv an der Stelle x_0 (Abb. 5.11), wächst die Funktion in der Umgebung von x_0 streng monoton. Entsprechend fällt dort die Funktion streng monoton, wenn $f'(x_0) < 0$, d.h. die Tangentensteigung negativ ist.

Erste Ableitung und Monotonieverhalten:

$f'(x_0) > 0$: Die Funktion ist um x_0 **streng monoton wachsend.**

$f'(x_0) < 0$: Die Funktion ist um x_0 **streng monoton fallend.**

Geometrische Deutung der zweiten Ableitung: Krümmungsverhalten

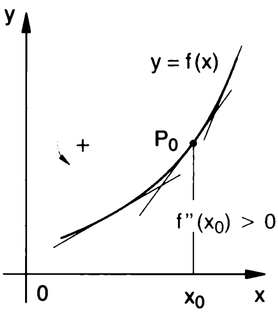


Abb. 5.12 a) Linkskurve

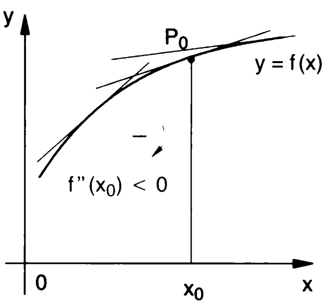


Abb. 5.12 b) Rechtskurve

Nehmen bei zunehmenden x-Werten in einer Umgebung um x_0 auch die *Steigungen* der Tangenten zu (Abb. 5.12 a), so wächst $f'(x)$ streng monoton. Dies bedeutet, dass dort die Ableitung von $f'(x)$, also $f''(x)$, positiv ist. Die Tangenten drehen sich dabei im positiven Drehsinn (Gegenuhrzeigersinn). Man spricht von einer Linkskrümmung oder von einer Linkskurve.

Nehmen dagegen um x_0 die Steigungen der Tangenten ab (Abb. 5.12 b), so fällt $f'(x)$ streng monoton: die Ableitung von $f'(x)$, also $f''(x)$, ist nun negativ. Die Tangenten drehen sich nun im negativen Drehsinn (Uhrzeigersinn). Man spricht jetzt einer Rechtskrümmung oder von einer Rechtskurve.

Zweite Ableitung und Krümmungsverhalten:

$f''(x_0) > 0$: Der Graph ist um x_0 eine **Linkskurve** oder **linksgekrümmt.**

$f''(x_0) < 0$: Der Graph ist um x_0 eine **Rechtskurve** oder **rechtsgekrümmt.**

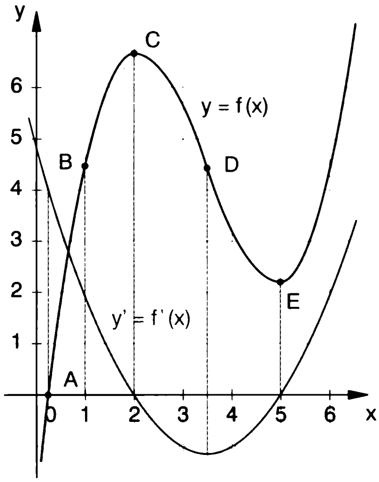


Abb. 5.13 Graphen von f(x) und f'(x)

Wir betrachten in Abb. 5.13 den Graphen einer Funktion $y = f(x)$. Die Steigung im Punkt A ist ziemlich groß; das kommt durch einen großen Wert für $f'(x)$ an dieser Stelle zum Ausdruck (über 4). Danach wird die Steigung geringer, in B ist sie etwa 2. Im Punkt C ist der "Gipfel" erreicht, die Steigung ist 0. Danach fällt der Graph, zuerst langsam; in D ist das stärkste Gefälle, die Steigung am stärksten negativ! Beim Weitergehen wird das Gefälle immer kleiner, bis im Punkt E die "Talsohle" erreicht ist; die Steigung in E ist genauso wie vorher in C gleich 0. Dann steigt der Graph wieder an.

In Abb. 5.13 ist neben dem Graphen von $y = f(x)$ auch jener der Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$ gezeichnet; sie gibt an jeder Stelle die Steigung des Graphen von $y = f(x)$ an. *Versuche den Verlauf des Graphen von $y' = f'(x)$ zu verstehen!*

Besonders wichtige Punkte des Graphen von $y = f(x)$ sind der "Gipfelpunkt" C, wo die Funktion ein Maximum besitzt, und die "Talsohle" E mit einem Minimum der Funktion.

Genauer wird definiert:

> Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an einer Stelle x_0 ein **lokales Maximum** $f(x_0)$ bzw. ein **lokales Minimum** $f(x_0)$, wenn für alle $x \neq x_0$ in einer *Umgebung* von x_0 gilt:
> $f(x_0) > f(x)$ bzw. $f(x_0) < f(x)$
> x_0 heißt **Maximum-** bzw. **Minimumstelle**, allgemein eine **Extremalstelle**.

Anmerkungen:

(1) Minimum und Maximum werden zusammenfassend als ein **Extremum** der Funktion bezeichnet. C wird auch ein **Hochpunkt**, E ein **Tiefpunkt** des Graphen in Abb. 5.13 genannt.

(2) Ein Extremum kann auch global sein, wenn sich die Extremaleigenschaft auf den gesamten Definitionsbereich bezieht (Abb. 5.14). "Lokal" bezieht sich nur auf die *unmittelbare* Umgebung einer bestimmten Stelle, "global" stets auf die gesamte Definitionsmenge der Funktion. Globale Extrema können auch am Rand des Definitionsbereichs auftreten! Man spricht dann von einem **Randextremum**.

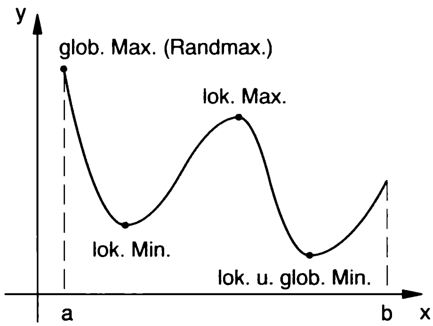


Abb. 5.14 Lokale und globale Extrema

Hat eine Funktion an einer Stelle x_0 ein lokales Extremum und ist sie dort differenzierbar, so ist anschaulich verständlich, dass ihr Graph an der Stelle x_0 eine waagrechte Tangente besitzt. D.h. die Funktion besitzt dort eine Ableitung mit dem Wert 0:

> **Notwendiges Kriterium für ein lokales Extremum**, wenn $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar : x_0 ist eine lokale Extremalstelle $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Anmerkungen:

(1) Die Bedingung $f'(x) = 0$ liefert bei einer differenzierbaren Funktion alle *möglichen* "Kandidaten" für lokale Extremalstellen. Aber es ist noch nicht ganz sicher, dass dort wirklich ein lokales Extremum vorliegt.

Beispiel (Abb. 5.15): $y = x^3$ für die Stelle $x_0 = 0$: $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, trotzdem ist x_0 keine lokale Extremalstelle.

(2) Randextrema können nicht mit der Bedingung $f'(x) = 0$ erfasst werden. Dies ist beispielsweise bei Aufgaben der Linearen Optimierung der Fall.

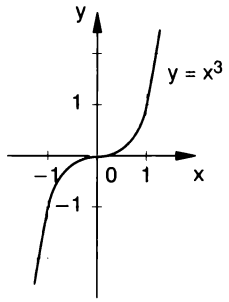


Abb. 5.15 Kein lokales Extremum an $x_0 = 0$

Mit zusätzlicher Hilfe der zweiten Ableitung kann jedoch eine Bedingung angegeben werden, die eine Stelle x_0 mit einer waagrechten Tangente mit Sicherheit als eine Extremalstelle ausweist. Denn ist $y = f(x)$ in der Umgebung einer solchen Stelle eine **Linkskurve** (Abb. 5.16 a), d.h. ist $f''(x_0) > 0$, so liegt ein **Minimum** vor; ist dort $y = f(x)$ eine **Rechtskurve** (Abb. 5.16 b), d.h. ist $f''(x_0) < 0$, so liegt ein **Maximum** vor.

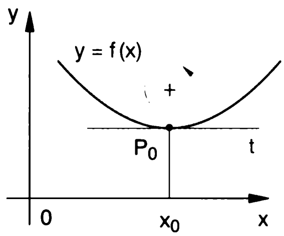


Abb. 5.16 a) Minimum

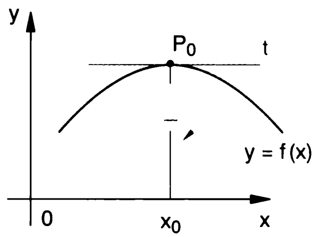


Abb. 5.16 b) Maximum

Hinreichendes Kriterium für ein lokales Extremum mit Hilfe der zweiten Ableitung

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Minimum an der Stelle x_0

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Maximum an der Stelle x_0

Anmerkung:

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, so ist die Entscheidung, ob x_0 eine Extremalstelle ist, auf diese Weise nicht möglich.

Beispiel: $y = x^3$ und $y = x^4$. In beiden Fällen sind die erste und die zweite Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ gleich null. Skizziere die Graphen beider Funktionen und bestätige:

$y = x^3$: $x_0 = 0$ ist keine Extremalstelle.

$y = x^4$: $x_0 = 0$ ist Extremalstelle.

Es gibt noch ein weiteres hinreichendes Kriterium für ein lokales Extremum, das Vorzeichenwechselkriterium. Es benützt die Tatsache, dass $f'(x)$ an einer Minimumstelle sein Vorzeichen von – auf + und an einer Maximumstelle von + auf – wechselt. Dieses Kriterium ist nützlich, wenn die zweite Ableitung schwer berechenbar ist:

Vorzeichenwechselkriterium

$f'(x_0) = 0$ und $f'(x)$ wechselt an der Stelle x_0 sein Vorzeichen $\Rightarrow$ x_0 ist Extremalstelle

Ein weiterer interessanter Punkt in Abb. 5.13, Seite 148, ist der Punkt D. Dort geht die Kurve von einer Rechtskurve in eine Linkskurve über, es erfolgt eine Wendung der Krümmung.

Man definiert:

Ein Punkt des Graphen von $y = f(x)$ heißt **Wendepunkt**, wenn dort der Graph von einer Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht oder umgekehrt.

Ein Wendepunkt mit einer *waagrechten* Tangente heißt **Sattelpunkt** (auch Terrassen- oder Flachpunkt genannt).

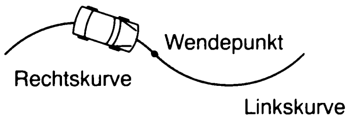


Abb. 5.17 Wendepunkt

Denkt man sich (Abb. 5.17) den Graph als eine Straße, auf der ein Fahrzeug fährt, so ist die Lenkung im Wendepunkt geradeaus gerichtet!

Auf Grund der Definition eines Wendepunktes ergibt sich für die Stelle eines Wendepunktes:

Notwendiges Kriterium für Wendestellen:
x_0 ist Wendestelle $\Rightarrow f''(x_0) = 0$

Aus $f''(x_0) = 0$ ergeben sich daher alle "Kandidaten" für einen Wendepunkt. Mit *Sicherheit* liegt ein Wendepunkt an einer Stelle x_0 vor, wenn dort die zweite Ableitung ihr Vorzeichen ändert oder die dritte Ableitung an dieser Stelle *nicht* null ist.

Hinreichendes Kriterium für Wendestellen:
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist Wendestelle

Beachte auch hier, dass bei $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) = 0$ eine Aussage, ob eine Wendestelle vorliegt, nicht möglich ist.

Beispiel 5.7 : Lokale Extrema und Wendepunkte

Untersuche, ob die Polynomfunktion 3. Grades $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ lokale Extrema oder Wendepunkte besitzt.

Lösung

Wir bilden die ersten drei Ableitungen:

$y' = 3x^2 - 12x + 9;\ y'' = 6x - 12;\ y''' = 6$

$y' = 0$ ergibt die möglichen Stellen für lokale Extrema:

$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x_{12} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6} = 2 \pm 1$; also $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

Damit ist beantwortet, dass wegen der Differenzierbarkeit der Funktion als Extrema nur diese beiden Stellen in Frage kommen und es keine weiteren Extrema geben kann! Um zu erkennen, dass dort *wirklich* Extrema liegen, bilden wir die zweite Ableitung für $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ (Extremwertkriterium mit Hilfe der zweiten Ableitung):

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0$; d.h. $x_1 = 1$ ist eine Maximumstelle;
$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0$; d.h. $x_2 = 3$ ist eine Minimumstelle.

Mit $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 5$ und $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 1$ ergeben sich als Hochpunkt H (1/5) und als Tiefpunkt T (3/1).

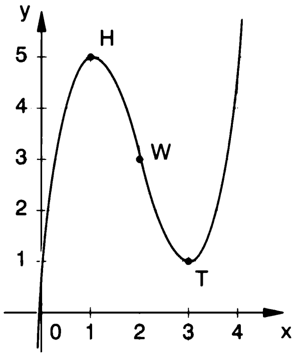


Abb. 5.18 $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

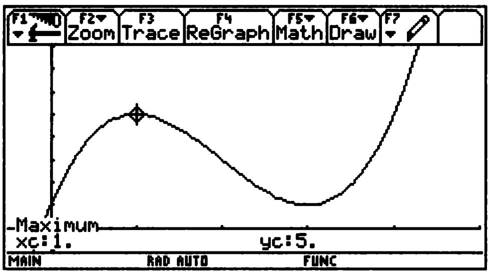
$y'' = 0$ ergibt die möglichen Wendepunktstellen:
$y'' = 6x - 12 = 0$; daraus $x_3 = 2$.

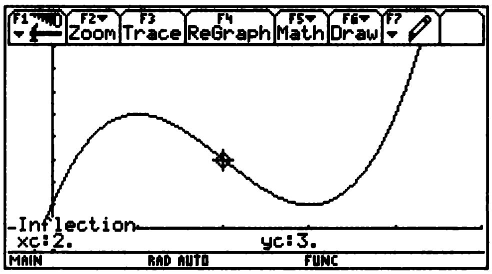
Dass dies wirklich eine Stelle mit einem Wendepunkt ist, ergibt das hinreichende Kriterium für Wendestellen mit Hilfe der dritten Ableitung. Da $y''' = 6$ und damit stets ungleich null ist, ist x_3 als Wendestelle nachgewiesen.

Mit $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 1 = 3$ lautet der Wendepunkt W (2/3).

Abb. 5.18 zeigt den Graphen der Polynomfunktion
$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Voyage 200





`Zur Bestimmung eines lokalen Extremums siehe "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 42.`

`Bei der Bestimmung eines Wendepunktes geht man gleich vor, nachdem man` F5 8 `(8:Inflection) gedrückt hat.`

Ein Hochpunkt oder Tiefpunkt besitzt die Eigenschaft, dass dort die Steigung y' der Tangente den Wert null hat. Das nächste Beispiel zeigt, dass dies auch der Fall sein kann, wenn der betreffende Punkt *kein* Hoch- oder Tiefpunkt ist.

Beispiel 5.8 : Sattelpunkt

Untersuche die Polynomfunktion $y = x^4 - 4x^3$ auf lokale Extrema und Wendepunkte.

Lösung

Wir bilden die ersten drei Ableitungen:
$y' = 4x^3 - 12x^2$; $y'' = 12x^2 - 24x$; $y''' = 24x - 24$

$y' = 0$ ergibt die möglichen Stellen für die lokalen Extrema:
$y' = 4x^3 - 12x^2 = 0$.

Diese kubische Gleichung kann nach Faktorisieren der linken Seite leicht mit dem Produkt-Null-Satz gelöst werden:

$4x^2 \cdot (x-3) = 0$; daraus

(1) $x^2 = 0$, d.h. $x = x_1 = 0$

(2) $x - 3 = 0$, d.h. $x = x_2 = 3$.

$x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ sind also die möglichen Extremwertstellen. Wir versuchen nun, ob mit Hilfe der zweiten Ableitung eine Entscheidung möglich ist.

$x_1 = 0$: $f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0$.

Da wohl $f'(0) = 0$, aber nicht $f''(0) \neq 0$ ist, bringt das hinreichende Kriterium mit Hilfe der zweiten Ableitung keine Entscheidung! Wir können nicht sagen, ob $x_1 = 0$ eine Extremalstelle ist oder nicht.

$x_2 = 3$: $f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 = 36 > 0$; d.h. $x_2 = 3$ ist eine Minimumstelle.

Mit $f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$ ergibt sich als Tiefpunkt T(3/–27).

$y'' = 0$ ergibt die möglichen Wendepunktstellen:

$y'' = 12x^2 - 24x = 12x \cdot (x-2) = 0$.

Wieder ergibt der Produkt-Null-Satz als Lösung $x = x_1 = 0$ und $x = x_3 = 2$.

Damit ist $x_1 = 0$ nicht nur eine mögliche Extremalstelle, sondern auch eine mögliche Wendestelle.

Wir wenden nun das hinreichende Wendepunkt-Kriterium an:

$x_1 = 0$: $f'''(0) = 24 \cdot 0 - 24 \neq 0$;

d.h. das hinreichende Kriterium für Wendestellen ergibt eine Entscheidung: An der Stelle $x_1 = 0$ ist ein Wendepunkt. Wegen $f'(0) = 0$, besitzt dieser Wendepunkt eine waagrechte Tangente, ist also ein *Sattelpunkt*.

Wegen $f(0) = 0$ gilt für den Sattelpunkt S(0/0).

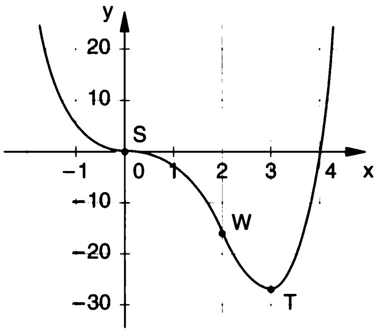


Abb. 5.19 Graph mit Sattelpunkt

$x_3 = 2$: $f'''(2) = 24 \cdot 2 - 24 \neq 0$;

auch an der Stelle $x_3 = 2$ ist ein Wendepunkt.

Wegen $f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 = -16$ gilt für diesen Wendepunkt W(2/–16).

Abb. 5.19 zeigt den Graph der untersuchten Funktion.

Beispiel 5.9 : Nicht durchwegs differenzierbare Funktion

Untersuche die Funktion $y = |x - 1|$ in $\mathbb{R}$ auf lokale Extrema und Wendepunkte.

Lösung

Da allgemein $|a| = \begin{cases} a & \text{für } x \geqslant 0 \\ -a & \text{für } x < 0 \end{cases}$, kann man die vorliegende Funktion unter Vermeidung der Betragsschreibweise abschnittsweise zusammensetzen:

$$y = f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{für } x \geqslant 1 \\ -x + 1 & \text{für } x < 1 \end{cases}.$$

Der Graph besteht also, wie Abb. 5.20 zeigt, aus zwei Halbgeraden. Die Funktion ist überall differenzierbar außer an der Stelle $x_0 = 1$, da dort der Graph eine Spitze besitzt (siehe Beispiel 4.2, Seite 96). Daher kann auch das dort befindliche lokale Minimum nicht wie bisher über die Bedingung $y' = 0$ gefunden werden. Die Funktion besitzt einen lokalen Tiefpunkt T(1/0).

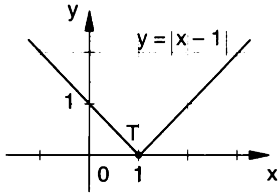


Abb. 5.20

Obwohl $y'' = 0$ für alle $x \neq 1$, besitzt die Funktion keinen Wendepunkt, da der Graph nirgends von einer Rechts- in eine Linkskurve oder umgekehrt übergeht.

Polynomfunktionen (auch **ganzrationale Funktionen** genannt)

Diese Funktionen sind wegen ihrer Einfachheit für die Praxis von hoher Bedeutung. Zu ihrer Berechnung genügen die Grundrechnungsarten! Oft werden kompliziertere Funktionen in einem interessierenden Bereich durch Polynomfunktionen approximiert.

Beispiele für Polynomfunktionen:

(1) *Polynomfunktionen vom Grade 2 oder quadratische Funktionen*:

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, auch in der Form
$y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ geschrieben.

Wie aus "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 37 ff., bekannt, sind ihre Graphen Parabeln (2. Ordnung), deren Achsen parallel zur y-Achse verlaufen (Abb. 5.21).

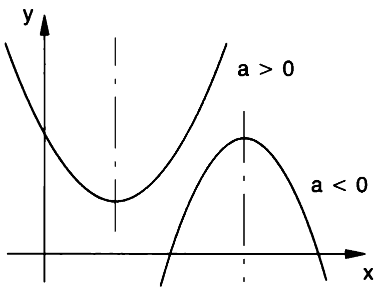


Abb. 5.21 Graphen quadratischer Funktionen

(2) *Polynomfunktionen vom Grade 3 oder kubische Funktionen*:

$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ oder $y = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Ihre Graphen werden auch Parabeln 3-ter Ordnung oder kubische Parabeln genannt.

(3) *Polynomfunktionen vom Grade n*:

$y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$.

Ihre Graphen werden auch Parabeln n-ter Ordnung genannt.

Beispiel 5.10 : Ermittlung einer Polynomfunktion

Ermittle die Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ einer Polynomfunktion 2. Grades mit Scheitel S(x/2). Der Graph ihrer Ableitungsfunktion ist in Abb. 5.22 gegeben.

Lösung

I: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

II: $y' = 2a \cdot x + b$

III: $y'' = 2a$

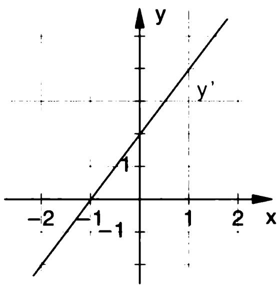


Abb. 5.22 Graph einer Ableitungsfunktion

(1) Aus Abb. 5.22 liest man ab, dass $y'(-1) = 0$, d.h. die gesuchte Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x = -1$ eine waagrechte Tangente; dies ist somit die Scheitelstelle. Damit: S(−1/2)

(2) Aus der Abbildung liest man ferner ab, dass die Gerade, der Graph der Ableitungsfunktion, die Steigung 2 hat. Daher gilt: $y'' = (y')' = 2$.

Dies führt zu:

I: $2 = \quad a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$ S liegt auf der Parabel.

II: $0 = 2a \cdot (-1) + b$ An der Scheitelstelle $x = -1$ ist die Steigung null.

III: $2 = 2a$

Auflösung ergibt: $a = 1, b = 2, c = 3$.

Damit lautet die gesuchte Polynomfunktion 2. Grades: $y = x^2 + 2x + 3$

Beispiel 5.11 : Gestalt des Graphen einer kubischen Funktion

Untersuche allgemein, welche Gestalt der Graph einer kubischen Funktion $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad (a \neq 0)$ haben kann.

Lösung

Dies kann in einfacher Weise mit Hilfe der Differentialrechnung erfolgen.

$y' = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

$y'' = 6a \cdot x + 2b$

$y''' = 6a \neq 0$

Mögliche Extremalstellen? $y' = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c = 0$. Diese quadratische Gleichung hat höchstens zwei reelle Lösungen. Man kann nun folgende Feststellungen treffen:

(a) Besitzt die quadratische Gleichung keine Lösung, so hat auch die kubische Funktion kein Extremum.

Die beiden folgenden Aussagen werden ohne Begründung gemacht.

(b) Besitzt die quadratische Gleichung nur eine Lösung, so liegt dort kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

(c) Besitzt sie zwei Lösungen, so hat die kubische Funktion zwei Extrema: ein Minimum und ein Maximum.

Mögliche Wendestellen? $y'' = 6a \cdot x + 2b = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{3a}$.

Wegen $y'''(x_0) = 6a \neq 0$ liegt an dieser Stelle tatsächlich ein Wendepunkt vor. Somit kann zusammenfassend festgestellt werden:

Eine kubische Funktion besitzt

- *entweder genau zwei Extrema (ein Maximum und ein Minimum) oder überhaupt kein Extremum.*
- *stets genau einen Wendepunkt.*

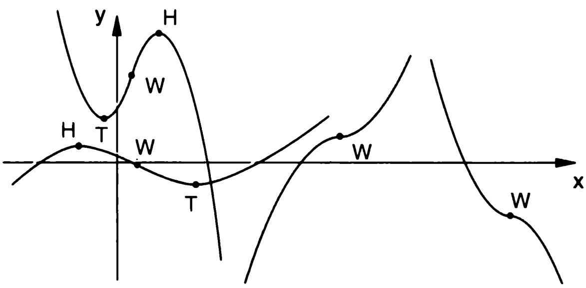


Abb. 5.23 zeigt die in diesem Sinne grundsätzlich möglichen Formen von Graphen kubischer Funktionen.

Abb. 5.23 Graphen von Polynomfunktionen 3. Ordnung

Beispiel 5.12 : Umkehraufgabe bei einer Polynomfunktion

Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades besitzt den Hochpunkt H(1/7) und den Wendepunkt W(2/4). Wie lautet die Funktion?

Lösung

Gesucht: $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$. Wir notieren zusätzlich:

$y' = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

$y'' = 6a \cdot x + 2b$.

Zur Ermittlung der Koeffizienten a, b, c und d sind vier Bestimmungsgleichungen nötig:

H(1/7) ist Punkt des Graphen: $7 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$

W(2/4) ist Punkt des Graphen: $4 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d$

An der Hochpunktstelle $x = 1$ ist y' gleich null: $0 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c$

An der Wendestelle $x = 2$ ist die y" gleich null: $0 = 6a \cdot 2 + 2b$.

Damit liegt ein lineares Gleichungssystem für die 4 Unbekannten a,b,c und d vor:

$$
\begin{array}{ll}
\text{I:} & a + b + c + d = 7 \\
\text{II:} & 8a + 4b + 2c + d = 4 \\
\text{III:} & 3a + 2b + c = 0 \\
\text{IV:} & 12a + 2b = 0
\end{array}
$$

Lösung: $a = \frac{3}{2}$, $b = -9$, $c = \frac{27}{2}$, $d = 1$. Somit: $y = \frac{3}{2} \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + \frac{27}{2} \cdot x + 1$.

Beispiel 5.13 : Kostenfunktion als kubische Funktion

Die Kosten K(x), die bei der Erzeugung eines Gutes anfallen, steigen mit der produzierten Warenmenge x (in Stückzahlen, in Tonnen oder dgl.). Die Funktion K(x), die Kostenfunktion, kann in einfacher Weise als *lineare* Funktion mit positiver Steigung angenommen werden. Zutreffender wird jedoch der Kostenverlauf im Allgemeinen durch eine monoton steigende *kubische* Funktion wiedergegeben.

Untersuche die Kostenfunktion $K(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 + 65 \cdot x + 50$ (Geldeinheiten)

Lösung

$K'(x) = x^2 - 14x + 65$; $K''(x) = 2x - 14$; $K'''(x) = 2$.

Der Graph von $y' = K'(x) = x^2 - 14x + 65$ ist eine sich nach oben öffnende Parabel; um ihre Scheitelstelle zu bestimmen, setzen wir $(K')' = K'' = 2x - 14 = 0$; daraus $x_S = 7$; die y-Koordinate des Scheitels beträgt $y_S = 7^2 - 14 \cdot 7 + 65 = 16$; da der Scheitel S(7/16) der tiefstgelegene Punkt der Parabel ist, ist stets $y' > 0$, d.h. die *Kostenfunktion $y = K(x)$ ist streng monoton steigend*.

$y'' = K''(x) = 2x - 14 = 0 \Rightarrow x = 7$; wegen $K'''(7) \neq 0$ ist $x = 7$ Wendestelle.

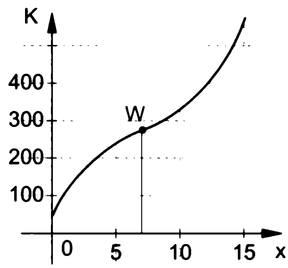


Abb. 5.24 Kubische Kostenfunktion

Eine kubische Kostenfunktion ist ein oft brauchbares Modell für eine Kostenfunktion, die oft einen s-förmigen Verlauf zeigt: Bei einer Erhöhung der Produktionsmenge x steigen anfänglich die Kosten stark an; danach folgt um den Wendepunkt W ein Bereich mit geringerem Anstieg. Danach steigen die Kosten wieder stark an, da eine weitere Erhöhung der Produktion beispielsweise nur mit teuren Zusatzkosten, Überstunden und dgl. erfolgen kann. Man spricht vom **Gesetz des schließlich zunehmenden Kostenzuwachses** ($K''(x) > 0$ ab der Wendestelle).

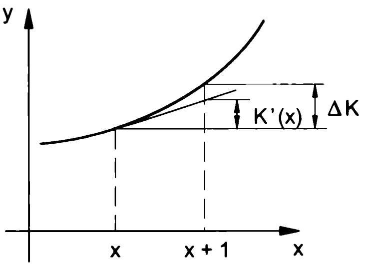


Abb. 5.25 Grenzkosten K'(x)

Wir bilden das Differential der Kostenfunktion an einer Stelle x für den Zuwachs dx (Abb. 5.25):

$dK = K'(x) \cdot dx$

Setzt man $dx = \Delta x = 1$, erhöht man also die Produktionsmenge um eine Einheit, so gilt für den Kostenzuwachs ΔK:

$\Delta K \approx dK = K'(x)$.

Die Ableitung K'(x) gibt daher für eine gegebene Produktionsmenge x näherungsweise den Kostenzuwachs an, wenn die Produktionsmenge auf x + 1 erhöht wird. K'(x) wird als **Grenzkosten(funktion)** bezeichnet. Dann kann man auch sagen:

Die Grenzkosten sind näherungsweise gleich den Kosten für die zuletzt produzierte Mengeneinheit. Dies gilt natürlich nur, wenn die produzierten Einheiten genügend klein sind.

Wie eine Kostenfunktion kann auch eine Produktionsfunktion durch eine Polynomfunktion, im Besonderen wieder durch eine kubische Funktion beschrieben werden. Dabei ist jedoch ein besonderer Verlauf zu berücksichtigen, der im sogenannten **Gesetz vom abnehmenden Ertragszuwachs** formuliert wird. Danach bringt ein Mehreinsatz von Produktionsmitteln (Geld, Arbeit, ...) zuerst steigende, ab einer bestimmten Einsatzmenge abnehmende und schließlich sogar negative Ertragszuwächse.

Beispiel 5.14 : Produktionsfunktion

Untersuche, ob die Funktion $y = -\frac{1}{25} \cdot x^3 + \frac{3}{5} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot x$, $x \geqslant 0$, als eine Produktionsfunktion gelten kann, für die das Gesetz des abnehmenden Ertragszuwachses eingehalten ist ("ertragsgesetzliche Produktionsfunktion").

Lösung

$y' = -\frac{3}{25} \cdot x^2 + \frac{6}{5} \cdot x + \frac{1}{4}$; $y'' = -\frac{6}{25} \cdot x + \frac{6}{5} = \frac{6}{25} \cdot (5 - x)$;

$y''' = -\frac{6}{25}$

Extremalstellen:

$y' = -\frac{3}{25} \cdot x^2 + \frac{6}{5} \cdot x + \frac{1}{4} = 0$; $x_1 = 10{,}20$; ($x_2 = -0{,}20$ ist außerhalb des Definitionsbereiches).

$y''(x_1) < 0 \Rightarrow x_1$ ist Maximumstelle;

Wendestellen: $y'' = \frac{6}{25} \cdot (5 - x) = 0$; $x = 5$; wegen $y''' \neq 0$, ist $x = 5$ eine Wendestelle.

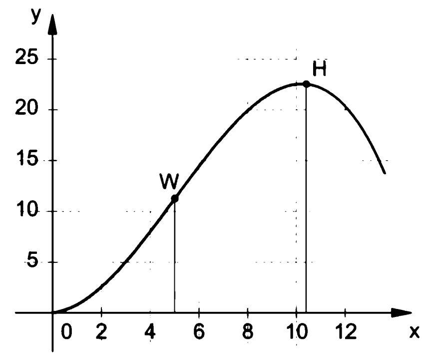


Abb. 5.26 Kubische Produktionsfunktion

Abb. 5.26 lässt erkennen, dass das Gesetz des abnehmenden Ertragszuwachses erfüllt ist, die vorliegende kubische Funktion also eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion sein könnte.

Ähnlich wie bei einer Kostenfunktion nennt man die Ableitung einer Produktionsfunktion **Grenzproduktivität**. Sie gibt näherungsweise den Produktions- oder Ertragszuwachs an, wenn man die Produktionsmittelmenge um eine Einheit steigert. Dann kann man in der Ertragsentwicklung drei Phasen erkennen, wenn das Ertragsgesetz erfüllt ist: steigende positive Grenzproduktivität bis zur Wendestelle, sinkende positive Grenzproduktivität von der Wendestelle bis zur Maximalstelle und danach möglicherweise sogar negative Grenzproduktivität.

Beispiel 5.15 : Biegelinie

Ein beidseitig eingespannter Träger der Länge L (Abb. 5.27) ist mit einer konstanten Streckenlast q belegt, wodurch sich die Trägerachse durchbiegt. Die durchgebogene Trägerachse heißt elastische Linie oder **Biegelinie**.

Für den vorliegenden Träger wird die Biegelinie bezüglich des Koordinatensystems in Abb. 5.27 durch eine Polynomfunktion vom Grad 4 beschrieben:

$$y = w(x) = \frac{qL^4}{24EI}\frac{x^2}{L^2}\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 = \frac{q}{24E \cdot I}(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2),\quad 0\text{ m} \leqslant x \leqslant L.$$

E ist der Elastizitätsmodul und I das Flächenträgheitsmoment. Zeichne den Graphen der Polynomfunktion, wenn $L = 4{,}00$ m und $\frac{q}{E \cdot I} = 0{,}00600\ \text{m}^{-3}$.

Lösung

Bei den folgenden Berechnungen werden der Einfachheit halber die Einheiten weggelassen. Alle Zahlenwerte sind in SI-Einheiten ohne Vorsätze (also nicht etwa in mm, sondern in m) zu denken. Einsetzen ergibt:

$y = 0{,}00025 \cdot (x^4 - 8x^3 + 16x^2)$.

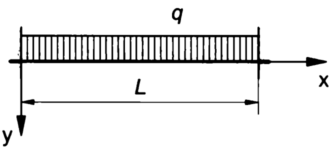


Abb. 5.27

Nullstellen: $y = 0$:

$0{,}00025 \cdot (x^4 - 8x^3 + 16x^2) = 0{,}00025 \cdot x^2 \cdot (x^2 - 8x + 16) = 0{,}00025 \cdot x^2 \cdot (x-4)^2$

Diese Gleichung lässt sich leicht lösen: $x_1 = 0$; $x_2 = 4$.

$y' = 0{,}00025 \cdot (4x^3 - 24x^2 + 32x) = 0{,}001 \cdot (x^3 - 6x^2 + 8x)$;

$y'' = 0{,}001 \cdot (3x^2 - 12x + 8)$

Mögliche Extremalstellen:

$y' = 0$ für $y' = 0{,}001 \cdot x \cdot (x^2 - 6x + 8) = 0$.

Dieses Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist. Daraus ergeben sich: $x_1 = 0$ sowie als Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$ die Werte $x_2 = 2$ und $x_3 = 4$

Durch Einsetzen in die zweite Ableitung erhält man:

$y''(0) = 0{,}001 \cdot (3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 8) = 0{,}001 \cdot 8 > 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ist eine Minimumstelle;

der y-Wert an der Stelle 0 beträgt ebenfalls 0: $T_1(0/0)$.

$y''(2) = 0{,}001 \cdot (3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8) = 0{,}001 \cdot (-4) < 0 \Rightarrow x_2 = 2$ ist eine Maximumstelle;

$y(2) = 0{,}00025 \cdot (2^4 - 8 \cdot 2^3 + 16 \cdot 2^2) = 0{,}004$; $H(2/0{,}004)$.

Die größte Durchbiegung $y_{max} = 0{,}004$ m = 4 mm tritt also erwartungsgemäß für x = 2 m, in der Mitte des Trägers, auf.

Führe die Rechnung allgemein und zeige, dass dann $y_{max} = \frac{q\,L^4}{384 \cdot E \cdot I}$ ist.

$y''(4) = 0{,}001 \cdot (3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 8) = 0{,}001 \cdot 8 > 0 \Rightarrow x_3 = 4$ ist eine Minimumstelle;
$y(4) = 0{,}00025 \cdot (4^4 - 8 \cdot 4^3 + 16 \cdot 4^2) = 0$; $T_2(4/0)$.

Mögliche Wendestellen: $y'' = 0{,}001 \cdot (3x^2 - 12x + 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0{,}845$ sowie $x_2 = 3{,}155$.
Da y''' an diesen beiden Stellen ungleich null ist, gibt es dort Wendepunkte: $W_1\,(0{,}845/0{,}002)$ sowie $W_2\,(3{,}156/0{,}002)$.

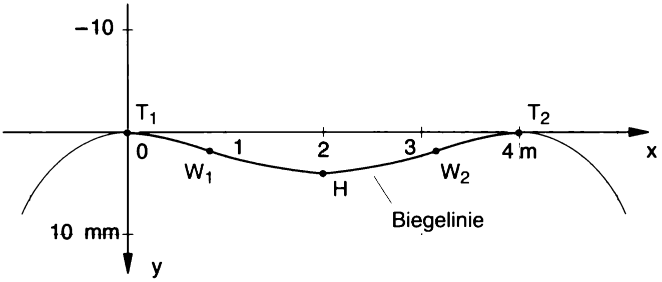


Abb. 5.28 Biegelinie eines beidseitig eingespannten Trägers

Abb. 5.28 zeigt den Graphen der Polynomfunktion, der zwischen x = 0 m und x = 4 m die Biegelinie des Trägers darstellt. Dabei wird üblicherweise die Durchbiegung y nach unten positiv aufgetragen.

Krümmung eines Graphen

Mit Hilfe der zweiten Ableitung kann eine qualitative Aussage gemacht werden, ob der Graph links- oder rechtsgekrümmt ist. Wie stark jedoch eine Krümmung ist, konnte bisher nicht gesagt werden.

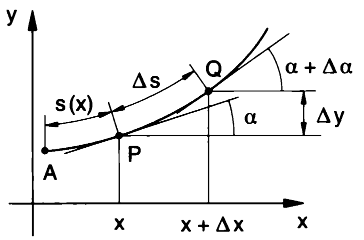


Abb. 5.29 Maß für die Krümmung

Wir betrachten (Abb. 5.29), wie stark sich der Steigungswinkel α der Tangente ändert, wenn man von einer Stelle x zur Stelle $x + \Delta x$ weitergeht. Dabei wird der Graph von P nach Q durchlaufen. Die Länge des Kurvenbogens, gemessen von einem beliebig gewählten festen Punkt A ändert sich von $s(x)$ auf $s(x) + \Delta s$.

$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, die Änderung des Steigungswinkels α bezogen auf die Änderung der Bogenlänge s, ist ein Maß für die Stärke der mittleren Krümmung des Graphen zwischen P und Q.

Die Krümmung *im* Punkt P wird dementsprechend als Grenzwert dieses Differenzenquotienten definiert:

Krümmung eines Graphen in einem Punkt P: $\kappa = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$

Die Krümmung κ lässt sich durch die Funktion $y = f(x)$ und ihre Ableitungen ausdrücken:
$\tan\alpha = f'(x) \Rightarrow \alpha = \arctan\,[f'(x)]$.

Mit Hilfe der Kettenregel folgt: $\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx}\,[\arctan y'] \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{1 + y'^2} \cdot y'' \cdot \frac{dx}{ds}$.

Es bleibt noch die Berechnung von $\frac{dx}{ds}$. Aus Abb. 5.29 entnimmt man, dass für kleines Δx in guter Näherung gilt: $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ oder auch $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$. Daraus entsteht durch Grenzübergang $\Delta x \to 0$, wenn $y = f(x)$ differenzierbar ist: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$.

Damit folgt schließlich:

> **Krümmung** in rechtwinkligen Koordinaten: $\kappa(x) = \dfrac{y''}{\left[1 + y'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$.

Der Nenner $\left[1 + y'^2\right]^{\frac{3}{2}}$ ist stets positiv. Daher hat die Krümmung κ das gleiche Vorzeichen wie die zweite Ableitung y".

Beispiel 5.16 : Berechnung der Krümmung

a) Wie groß ist die Krümmung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$?

b) Berechne die Krümmung im Scheitel der Parabel $y = x^2$.

Lösung

Zu **a)** Wir berechnen die Krümmung in einem Punkt des "oberen" Halbkreises:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2x) = -x\cdot\left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}};\quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

$$y'' = -\left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x) = \frac{-1}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^2}{\left(r^2 - x^2\right)\cdot\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{r^2}{\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa = \frac{-\dfrac{r^2}{\left(r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}}{\left(\dfrac{r^2}{r^2-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\dfrac{r^2}{\left(r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{r^3}{\left(r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}} = -\frac{1}{r}.$$

Erwartungsgemäß ist die Krümmung nicht von der betrachteten Stelle x abhängig. Sie ist dem Betrage nach gleich dem Kehrwert des Kreisradius. Für den oberen Halbkreis ist die Krümmung negativ (Rechtskurve), für den unteren Halbkreis ist sie positiv (Linkskurve). Wegen des Ergebnisses dieser Aufgabe wird auch für andere Kurven der Betrag des Kehrwertes von κ als **Krümmungsradius** ϱ bezeichnet.

Zu **b)** $y' = 2x$; $y'' = 2$.

$$\kappa(x) = \frac{2}{\left(1 + 4x^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \kappa(0) = 2;\quad \varrho(0) = \frac{1}{|\kappa(0)|} = \frac{1}{2}.$$

In Abb. 5.30 ist der Kreis mit dem Radius $\varrho = \frac{1}{2}$ an der Stelle x = 0 gezeichnet, der dort den Graphen berührt und die gleiche Krümmung besitzt. Man spricht von einem **Krümmungskreis**, hier vom Scheitelkrümmungskreis.

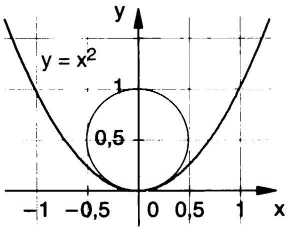


Abb. 5.30 Krümmungskreis

Anmerkungen:

(1) Allgemein werden Punkte eines Graphen, in denen die Krümmung einen Extremwert annimmt, *Scheitel* genannt.

(2) Denkt man sich zu jedem Punkt eines Graphen von y = f(x) die Mittelpunkte der Krümmungskreise gezeichnet, so heißt der die Mittelpunkte verbindende Graph **Evolute** der Ausgangsfunktion y = f(x). Der Graph von y = f(x) heißt in diesem Zusammenhang **Evolvente** der betreffenden Evolute.

Kurvendiskussion

Bei einer sogenannten Kurvendiskussion geht es darum, mit wenig Aufwand *im Wesentlichen* den Verlauf des Graphen einer Funktion zu erkennen. Das Zeichnen des Graphen aus einer Wertetabelle mit zufälligen Wertepaaren kann bei vielen Funktionen zu falschen Einschätzungen führen. Wertvolle Hilfe kann hier die Differentialrechnung bieten, mit deren Hilfe *charakteristische* Punkte des Graphen wie lokale Hoch- und Tiefpunkte oder Wendepunkte gefunden werden können. Dabei ist es günstig, gefundene Ergebnisse sofort in einem Koordinatensystem einzutragen und so den Graphen der Funktion schrittweise zu zeichnen. Oft kann man im Verlauf der Kurvendiskussion aus vorliegenden Zwischenergebnissen schon weitere Fragen beantworten. Bei Bedarf können noch zusätzliche Funktionswerte berechnet werden.

Bei einer Kurvendiskussion kann man sich von der Behandlung folgender Punkte leiten lassen:

1. Größtmöglicher Definitionsbereich, Stetigkeit, Polstellen
2. Symmetrie (gerade oder ungerade Funktion?)
3. Nullstellen
4. Verhalten im Unendlichen, Asymptoten
5. Extrema und Wendepunkte
6. Graph zeichnen (notfalls mit zusätzlicher Wertetabelle)

Bei anwendungsorientierten Aufgaben weicht man von diesem Schema öfters etwas ab.

Beispiel 5.17 : Diskussion einer gebrochenrationalen Funktion

Diskutiere die Funktion $y = f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 16}{x^2 - 5x + 4}$.

Lösung

1. Größtmöglicher Definitionsbereich, Stetigkeit, Polstellen:

   Da eine unecht gebrochenrationale Funktion vorliegt (der Grad des Zählerpolynoms ist größer oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms), führen wir eine Polynomdivision durch:

   $(x^3 - 5x^2 + 8x - 16) : (x^2 - 5x + 4) = x$, Rest: $4x - 16$;

   d.h. $y = f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 16}{x^2 - 5x + 4} = x + \frac{4x - 16}{x^2 - 5x + 4}$

   Die Nullstellen des Nenners $x^2 - 5x + 4$ sind vom Definitionsbereich auszuschließen (Division durch null!):

   $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$ Lösungen: $x_1 = 1$ sowie $x_2 = 4$.

   Daher lautet der größtmögliche Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$, d.h. $x \neq 1$ oder $x \neq 4$. Diese zwei Stellen sind daher Definitionslücken der Funktion.

   Die Funktion ist in $\mathbb{D}$ stetig (nicht zu $\mathbb{D}$ gehören als Definitionslücken die Nullstellen des Nennerpolynoms).

Nur eine Nullstelle des Nenners $x^2 - 5x + 4$ kann eine Polstelle oder Unendlichkeitsstelle der gegebenen Funktion sein. Als Polstellen kommen somit $x = 1$ und $x = 4$ in Frage.

- Eine Nullstelle x_0 des Nenners ist sicher eine Polstelle oder Unendlichkeitsstelle, wenn x_0 *nicht* zugleich eine Nullstelle des Zählers ist!
- Ist für x_0 auch der Zähler null, so kann der betreffende Bruch durch $x - x_0$ gekürzt werden!

$x = 1$ ist keine Nullstelle des Zählers von $\frac{4x - 16}{x^2 - 5x + 4}$, daher ist 1 eine Polstelle. Da $x = 4$ auch eine Nullstelle des Zählers $4x - 16$ ist, können wir den Bruch $\frac{4x - 16}{x^2 - 5x + 4}$ durch $x - 4$ kürzen. Dazu schreiben wir den quadratischen Term $x^2 - 5x + 4$ in der Produktform:

$$\frac{4x - 16}{x^2 - 5x + 4} = \frac{4 \cdot (x - 4)}{(x - 1) \cdot (x - 4)} = \frac{4}{x - 1}.$$

Man hätte auch die Polynomdivision $(x^2 - 5x + 4) : (x - 4) = x - 1$ ausführen können. Wir erkennen nun, dass der Nenner nur für $x = 1$ null wird. $x = 4$ kann daher keine Polstelle sein; es liegt dort eine Lücke im Graphen vor:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 16}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \to 4} \left(x + \frac{4x - 16}{x^2 - 5x + 4}\right) = \lim_{x \to 4} \left(x + \frac{4}{x - 1}\right) = 4 + \frac{4}{4 - 1} = \frac{16}{3}.$$

Da die Grenzwertbildung der Funktion in der ursprünglichen Gestalt auf einen unbestimmten Ausdruck der Form 0/0 führt, könnte auch die Regel von de L'Hospital verwendet werden.

Wir können nun in $\mathbb{D}$ mit der Funktion in der Gestalt $y = x + \frac{4}{x - 1}$ weiterarbeiten.

2. Symmetrie:

   Es ist weder $f(-x) = f(x)$ noch $f(-x) = -f(x)$. Die Funktion ist somit weder gerade noch ungerade.

3. Nullstellen: $y = x + \frac{4}{x - 1} = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = 0;$

   $x^2 - x + 4 = 0$; $x_{12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4}$, d.h. der Zähler hat keine keine reellen Nullstellen, daher hat auch die Funktion keine Nullstellen.

4. Verhalten im Unendlichen: Aus der Darstellung $y = x + \frac{4}{x - 1}$ erkennt man, dass $y = x$ eine Asymptote der Funktion ist, dass also für betragsmäßig große Werte von x gilt:

   $$y = f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 16}{x^2 - 5x + 4} \approx x.$$

5. Extrema und Wendepunkte:

   $y = x + \frac{4}{x - 1}$, $y' = 1 - \frac{4}{(x - 1)^2}$, $y'' = \frac{8}{(x - 1)^3}$

   Mögliche Extremalstellen:

   $y' = 1 - \frac{4}{(x - 1)^2} = 0 \Rightarrow x - 1 = \pm 2$, also $x_1 = -1$ sowie $x_2 = 3$.

   $y''(-1) = \frac{8}{(-1 - 1)^3} < 0$, $x_1 = -1$ ist Maximumstelle; $y(-1) = -1 + \frac{4}{-1 - 1} = -3$; H(−1/−3).

   $y''(3) = \frac{8}{(3 - 1)^3} > 0$, $x_2 = 3$ ist Minimumstelle; $y(3) = 3 + \frac{4}{3 - 1} = 5$; T(3/5).

   Mögliche Wendestellen:

   $y'' = \frac{8}{(x - 1)^3} = 0$; diese Gleichung hat keine Lösung, daher gibt es keinen Wendepunkt.

6. Graph der Funktion: Abb. 5.31
   Neben der schrägen Asymptote $y = x$ gibt es die senkrechte Asymptote $x = 1$.

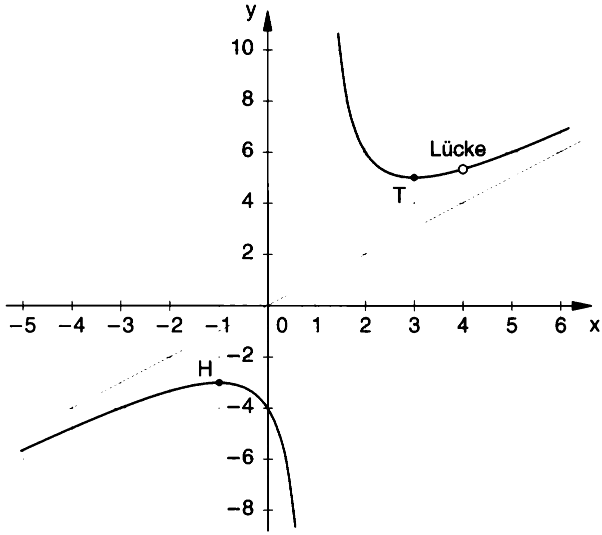


Abb. 5.31

Beispiel 5.18 : Diskussion der GAUSS'schen Glockenkurve

Diskutiere die Funktion $g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(\sigma > 0)$.

Lösung

1. Größtmöglicher Definitionsbereich, Stetigkeit, Polstellen: Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert; keine Unstetigkeitsstellen und keine Polstellen (Unendlichkeitsstellen).
2. Symmetrie? Für $\mu = 0$ ist die Funktion gerade, da in diesem Fall $g(-x) = g(x)$. Für $\mu \neq 0$ ist die Funktion weder gerade noch ungerade.
3. Nullstellen:
   Da stets $g(x) > 0$, gibt es keine Nullstellen.
4. Verhalten im Unendlichen, Asymptoten
   Wächst x über alle Schranken, so geht $g(x)$ unbegrenzt nach 0: $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$.
   Das Gleiche gilt, wenn x nach $-\infty$ geht: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$. Die Gerade $y = 0$, also die x-Achse, ist Asymptote der Funktion.
6. Extrema und Wendestellen:

$$g'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\,2(x-\mu)\right) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu) \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} - (x-\mu) \cdot \frac{x-\mu}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Mögiche Extremalstellen: $g'(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0.$

Die erste Ableitung ist nur null, wenn $x = \mu$ ist, da eine Exponentialfunktion stets positiv ist und daher nie null sein kann.

Da $g''(\mu) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot(1-0)\cdot 1 < 0$, ist $x = \mu$ eine Maximumstelle.

Wegen $g(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{0,399}{\sigma}$ gilt für den Hochpunkt $H\left(\mu/\frac{0,399}{\sigma}\right)$.

Mögliche Wendestellen: $g''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot\left(1-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0$

Diese Gleichung ist nur null, wenn $1-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} = 0$ ist. Daraus folgt $(x-\mu)^2 = \sigma^2$ oder weiter $x - \mu = \pm\sigma$ oder $x = \mu \pm \sigma$.

Statt die 3. Ableitung zu berechnen und damit $x = \mu \pm \sigma$ als Wendestellen zu bestätigen, kann man wie folgt argumentieren: $g''(x)$ wechselt an $x = \mu - \sigma$ sein Vorzeichen von + auf –, d.h. die Kurve wechselt an dieser Stelle von einer Links- zu einer Rechtskurve; das bedeutet aber gerade, dass die Kurve an dieser Stelle einen Wendpunkt besitzt. Entsprechend folgert man an der Stelle $x = \mu + \sigma$, wo das das Vorzeichen von $g''(x)$ von – auf + wechselt, dass die Kurve von einer Rechts- zu einer Linkskurve übergeht.

Wegen $g(\mu-\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(-\sigma)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{0,242}{\sigma}$ ist $W_1\left(\mu-\sigma/\frac{0,242}{\sigma}\right)$.

Da $g(\mu+\sigma) = g(\mu-\sigma)$ lautet der zweite Wendepunkt: $W_2\left(\mu+\sigma/\frac{0,242}{\sigma}\right)$.

Jede Gauss'sche Glockenkurve besitzt also ein Maximum an der Stelle μ und zwei symmetrisch dazu liegende Wendepunkte an den Stellen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$. Diese geben dem Graphen eine glockenförmige Gestalt.

$g(x)$ ist die sogenannte Dichtefunktion der **Normalverteilung**, die von fundamentaler Bedeutung in der Statistik ist. μ heißt **Erwartungswert** oder Mittelwert, σ **Standardabweichung** der Normalverteilung.

6. Graphen zeichnen: Abb. 5.32. Die Gauss'sche Glockenkurve liegt symmetrisch zur Geraden $x = \mu$.

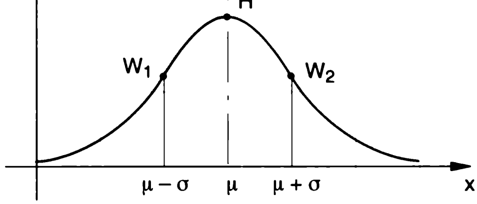


Abb. 5.32 Eine Gauss'sche Glockenkurve

Beispiel 5.19 : Gedämpfte Schwingung

Ein Feder-Masse-System mit Dämpfung (Abb. 5.33) beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ s aus seiner Ruhelage mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit v_0 zu schwingen. Dann kann man unter bestimmten Voraussetzungen für die Auslenkung herleiten: $y(t) = \hat{y}_0 e^{-\delta t} \sin \omega t$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Dabei ist δ ein Maß für die Dämpfung, ω_0 die Kreisfrequenz des schwingenden Systems bei fehlender Dämpfung und $\hat{y}_0 = \frac{v_0}{\omega}$.

Untersuche die Funktion für $t \geqslant 0$ s allgemein und mit $\hat{y}_0 = 10{,}0$ cm, $\delta = 0{,}1\ \text{s}^{-1}$ und $\omega_0 = 2\ \text{s}^{-1}$.

Lösung

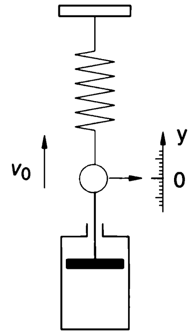


Abb. 5.33

1. Da $|\sin(\omega t)| \leqslant 1$, gilt $|y(t)| \leqslant \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t}$, d.h. der Graph von $y(t) = \hat{y}_0 e^{-\delta t} \sin \omega t$ liegt zwischen den Graphen von $y = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t}$ und $y = -\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t}$. Die Amplitude $\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t}$ der gedämpften Schwingung klingt exponentiell ab.

2. Nullstellen: $y(t) = \hat{y}_0 e^{-\delta t} \sin \omega t = 0$.
   Dies ist nur möglich, wenn $\sin \omega t = 0$. Daraus folgt sofort:
   $\omega t = n\pi$ oder $t = \frac{n\pi}{\omega}$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.
   Mit $\omega = \sqrt{2^2 - 0{,}1^2} = 1{,}997\ \text{s}^{-1}$ lauten die Nullstellen:
   $t_0 = 0$ s, $t_1 = 1{,}57$ s, $t_2 = 3{,}15$ s, $t_3 = 4{,}72$ s, $t_4 = 6{,}29$ s, usw.
   Mit wachsender Dämpfung wird $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ kleiner (solange δ kleiner als ω_0 bleibt). Das bedeutet, dass die Nullstellen weiter auseinander rücken und damit auch die Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ größer wird.
   Wir fragen noch, zu welchen Zeiten der Graph die Exponentialkurven $y = \hat{y}_0 e^{-\delta t}$ und $y = -\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t}$ berührt: $\hat{y}_0 e^{-\delta t} \sin \omega t = \hat{y}_0 e^{-\delta t}$, woraus folgt: $\sin \omega t = 1$.
   Lösungen: $\omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ oder $t = \frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}, \frac{5\pi}{2\omega}, \dots = 0{,}786$ s; $2{,}359$ s; $3{,}932$ s; … .
   Die Berührstellen liegen jeweils in der Mitte zwischen zwei Nullstellen. Abb. 5.34 zeigt den Graphen, gezeichnet mit den angegebenen Zahlenwerten.

3. Verhalten im Unendlichen, d.h. annähernd für große Zeiten t:
   $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 0$, da $e^{-\delta t} \to 0$ für $t \to \infty$. Die x-Achse ist Asymptote.

4. Extrema: $\dot{y}(t) = \hat{y}_0(-\delta)e^{-\delta t} \sin \omega t + \hat{y}_0 e^{-\delta t} \omega \cos \omega t = \hat{y}_0 e^{-\delta t} \cdot (-\delta \sin \omega t + \omega \cos \omega t) = 0$.
   $\dot{y}(t)$ ist null, wenn $-\delta \sin \omega t + \omega \cos \omega t = 0$.
   Daraus: $\tan \omega t = \frac{\omega}{\delta}$ oder $t = \frac{1}{\omega} \cdot \left(\arctan \frac{\omega}{\delta} + n \cdot \pi\right)$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.
   Mit den angegebenen Zahlenwerten folgt: $t = 0{,}761$ s; $2{,}334$ s; $3{,}907$ s, … .
   Dass hier tatsächlich Extrema vorliegen, ist durch das Vorliegen einer exponentiell abklingenden Sinusschwingung nahegelegt: abwechselnd folgen Maxima und Minima.
   Die Extremalstellen fallen nicht mit den Berührstellen der Schwingung mit den begrenzenden Graphen $y(t) = \pm \hat{y}_0 e^{-\delta t}$ zusammen, sondern liegen etwas davor.

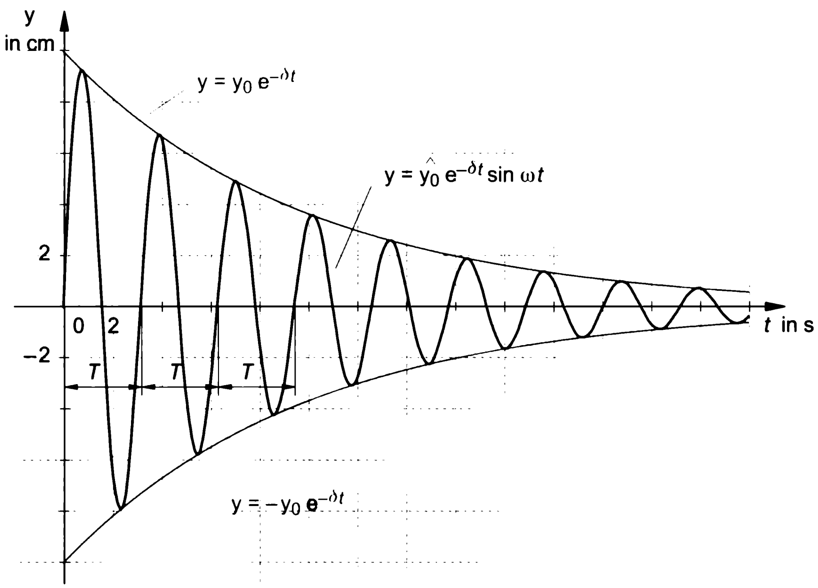


Abb. 5.34 Gedämpfte Schwingung

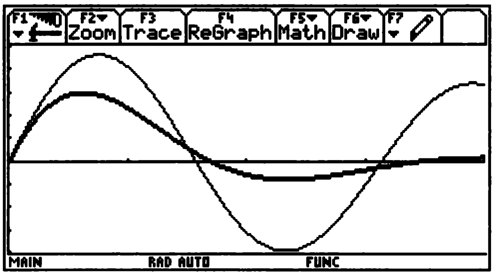
5. Die Größe δ ("Abklingkonstante") kann aus dem Verhältnis zweier beliebiger Elongationen $y(t+T)$ und $y(T)$ ermittelt werden, die im zeitlichen Abstand T aufeinander folgen (etwa zweier Amplituden). Dieses Verhältnis bleibt konstant:

$$\frac{y(t)}{y(t+T)} = \frac{\hat{y}_0 e^{-\delta t}\cdot \sin\omega t}{\hat{y}_0 e^{-\delta(t+T)}\cdot \sin(\omega\cdot(t+T))} = e^{\delta T}.$$

Der natürliche Logarithmus dieses Verhältnisses heißt logarithmisches Dekrement Λ:

$$\Lambda = \ln e^{\delta T} = \delta T.$$

Voyage 200



Die dünne Linie stellt die Schwingung des Beispiels 5.19 ($\delta = 0{,}1\ s^{-1}$) innerhalb der ersten 4 Sekunden dar.

Zum Vergleich ist als dicke Linie der Graph der Schwingung mit $\delta = 0{,}8\ s^{-1}$ gezeichnet. Bis auf die Abklingkonstanten bestehen gleiche Angaben.

Im Überblick: Kurvenuntersuchung

$f'(x_0) > 0$: Die Funktion ist um x_0 **streng monoton wachsend**.
$f'(x_0) < 0$: Die Funktion ist um x_0 **streng monoton fallend**.
$f''(x_0) > 0$: Der Graph ist um x_0 eine **Linkskurve** oder **linksgekrümmt**.
$f''(x_0) < 0$: Der Graph ist um x_0 eine **Rechtskurve** oder **rechtsgekrümmt**.

Lokales **Maximum** bzw. **Minimum** $f(x_0)$:
$f(x_0) > f(x)$ bzw. $f(x_0) < f(x)$ für alle $x \neq x_0$ in einer *Umgebung* von x_0.
Für differenzierbare Funktionen gilt:
(1) x_0 ist eine lokale Extremalstelle $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.
(2) $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist eine lokale Minimumstelle.
$f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist eine lokale Maximumstelle.
(3) $f'(x_0) = 0$ *und* $f'(x)$ wechselt an der Stelle x_0 sein Vorzeichen $\Rightarrow x_0$ ist Extremalstelle.

Wendepunkt: Graph geht von einer Rechtskurve in eine Linkskurve über oder umgekehrt (ein Wendepunkt mit einer *waagrechten* Tangente heißt *Sattelpunkt*).
(1) x_0 ist Wendestelle $\Rightarrow f''(x_0) = 0$.
(2) $f''(x_0) = 0$ *und* $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist Wendestelle.

Eine **kubische Funktion** (Polynomfunktion 3. Grades) besitzt entweder zwei Extrema (ein Maximum und ein Minimum) oder überhaupt kein Extremum. Sie besitzt genau einen Wendepunkt.

Maß für die **Krümmung**: $\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}$; *Krümmungsradius* $\varrho = \frac{1}{|\kappa|}$.

Aufgaben

Für alle im Folgenden genannten Funktionen soll, wenn nicht anders gesagt, der größtmögliche Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ angenommen werden.

5.21 Der Graph der Funktion ist eine Parabel. Ermittle ihren Scheitel:

a) $y = -x^2 + 2x + 3$ **b)** $y = x^2 - 4x + 3$ **c)** $y = \frac{x^2}{2} - x + 2$

5.22 Bestimme den *höchstgelegenen* Punkt des Graphen:

a) $y = \frac{\ln(2x)}{x}$ **b)** $y = (x-1) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ **c)** $y = e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}$

5.23 Bestimme den *tiefstgelegenen* Punkt des Graphen:

a) $y = x + \frac{1}{2x}, x > 0$ **b)** $y = x \cdot \ln\frac{x}{3}$ **c)** $y = 2^{-x} + \frac{x}{2}$

5.24 Ermittle die lokalen Extrema der Funktion:

a) $y = x^2 - 4x + 3$ **b)** $y = t^3 - 3t$ **c)** $y = x^4 - 4{,}5 \cdot x^2 + 2$

d) $y = \frac{1}{1 - x^2}$ **e)** $y = \frac{x}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ **f)** $y = x \cdot \ln\frac{4}{x}$

g) $y = \frac{x}{2} - \ln(2x + 1)$ **h)** $y = \frac{e^x}{2 - x}$ **i)** $y = \sin x + \cos x$ in $[0, 2\pi]$.

5.25 Untersuche die Funktion auf lokale Extrema und Wendepunkte:

a) $y = 3x^2 - x^3 - \frac{3}{4} \cdot x^4$ **b)** $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ **c)** $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$

d) $y = \frac{1}{1 - x} - x$ **e)** $y = \frac{\ln(3x)}{x}$ **f)** $y = \cos^2 x$ in $[0, 2\pi[$

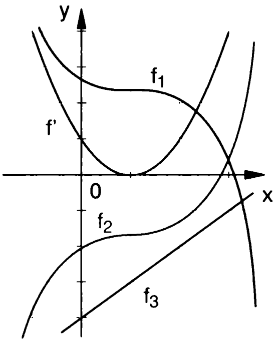


Abb. 5.35

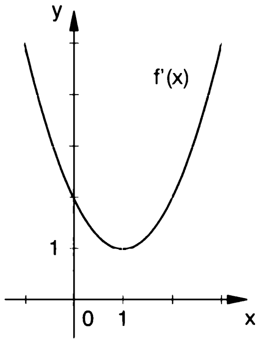


Abb. 5.36

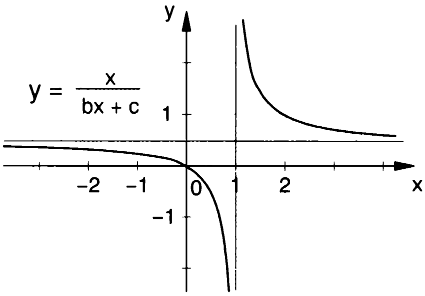


Abb. 5.37

5.26 In Abb. 5.35 ist der Graph $f'(x)$ der Ableitungsfunktion von $f(x)$ gegeben. Welcher der drei Graphen $f_1(x)$, $f_2(x)$ oder $f_3(x)$ kommt als Graph von $f(x)$ in Frage?

5.27 In Abb. 5.36 ist der Graph $f'(x)$ der Ableitungsfunktion von $f(x)$ gegeben. Zusätzlich gilt $f(0) = 0$. Beantworte sodann folgende Fragen:

a) Hat $f(x)$ Extrema, Wendepunkte? Wenn ja, wo liegen sie?

b) Kann eine Aussage über das Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$ gemacht werden?

c) Skizziere den ungefähren Verlauf der Funktion.

5.28 In Abb. 5.37 ist der Graph einer rationalen Funktion $y = \frac{x}{bx + c}$ mit den Asymptoten $y = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ gegeben. Ermittle ihre Funktionsgleichung.

5.29 Von einem Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades sind folgende Eigenschaften bekannt. Wie lautet die Funktionsgleichung?

a) Der Graph verläuft durch die Punkte A(1/0), B(0/−4), C(2/2) und D(3/8).

b) Der Graph verläuft durch den Ursprung und den Punkt P(4/2) und berührt an der Stelle $x = 6$ die x-Achse

c) Der Graph verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung (d.h. die Funktion ist ungerade) und besitzt den Tiefpunkt T(1/−2).

d) Hochpunkt H(1/7) und Tiefpunkt T(3/1).

e) Hochpunkt H(1/−2), Tangente im Punkt P(3/−2) mit der Steigung 2.

f) Hochpunkt H(2/−2), Wendepunkt an $x = 4$ mit einer Tangente der Steigung −3.

g) Der Graph schneidet die y-Achse bei $y = 2$ und besitzt den Sattelpunkt S(2/6).

5.30 Von einem Graphen einer Polynomfunktion 4. Grades $y = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ sind folgende Eigenschaften bekannt. Wie lautet die Funktionsgleichung?

a) Sattelpunkt S(0/0), Wendepunkt W(1/1).

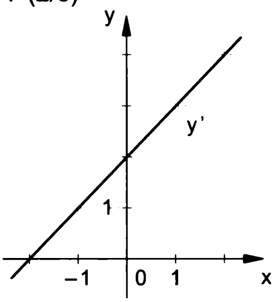
b) Der Graph verläuft symmetrisch zur y-Achse und besitzt 0 und 2 als Schnittstellen mit der x-Achse. P(4/12) ist ein Punkt des Graphen.

c) Der Graph verläuft durch den Ursprung und besitzt die Hochpunkte $H_1(-2/8)$ und $H_2\left(1/\frac{5}{4}\right)$.

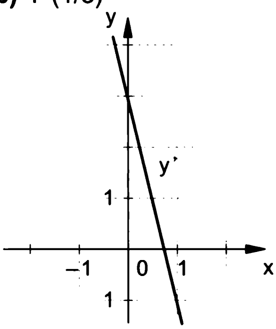
d) Der Graph geht durch den Ursprung und besitzt den Tiefpunkt $T\left(3/-\frac{3}{4}\right)$ und den Hochpunkt $H\left(1/\frac{7}{12}\right)$.

5.31 Vom Graphen einer quadratischen Funktion kennt man einen Punkt P sowie den Graphen der 1. Ableitung. Wie lautet die Funktionsgleichung?

a) P(2/3)



b) P(1/3)



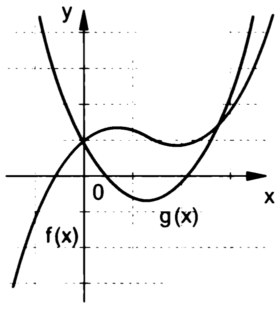


Abb. 5.38

5.32 In Abb. 5.38 sind die Graphen zweier Funktionen f(x) und g(x) gezeichnet, von denen eine die Ableitung der anderen ist. Welche Funktion ist die Ableitung?

5.33 Wie lautet die quadratische Funktion, die an der Stelle x = 1 gleichen Funktionswert, gleiche erste sowie zweite Ableitung wie die Exponentialfunktion $y = e^x$ besitzt?

5.34 Zeichne die Funktion und ermittle ihre Extremalstellen:

a) $y = |x - 1|$ **b)** $y = |x| + |x - 1|$ **c)** $y = |x| + |x - 1| + |x - 3|$

Hinweis: Schreibe die Funktionsgleichung zuerst abschnittsweise ohne Verwendung des Absolutbetrages.

5.35 Diskutiere den Verlauf der folgenden Funktion:

a) $y = x^2 - 3x$ **b)** $y = -(x + 2)^2 + 4$ **c)** $y = x^3 - x^2$

d) $y = -x \cdot (x + 2)^2$ **e)** $y = -x^3 + 3x^2 - 4x$ **f)** $y = |x^3 - 4x^2 + 3x|$

5.36 Diskutiere die Funktion:

a) $y = x + \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

d) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ **e)** $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$ **f)** $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

g) $y = \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x - 3}$ **h)** $y = \frac{3x - 4}{2x - 1}$ **i)** $y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 5}$

j) $y = \frac{x^2 - 2x + 25}{x^2 - 2x + 1}$ **k)** $y = \frac{x \cdot (x - 3)}{x - 4}$ **l)** $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$

5.37 Diskutiere die Funktion:

a) $y = x \cdot \sqrt{4x - x^2}$ **b)** $y = x^2 \cdot \sqrt{4 - x^2}$ **c)** $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + x$

d) $y = (x - 1) \cdot \sqrt{5 + 10x - x^2}$ **e)** $y = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4}$ **f)** $y = \sqrt{\frac{x}{x - 2}}$

5.38 Diskutiere die Funktion, wenn nicht anders angegeben für $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

a) $y = \sin^2 x$ **b)** $y = \cos(2x) + \cos x$ **c)** $y = x + \cos x$ **d)** $y = \sqrt{1 - \cos x}$

5.39 Diskutiere die Funktion:

a) $y = x \cdot e^{-x}$ **b)** $y = x^2 \cdot e^{-x}$ **c)** $y = 2 \cdot (e^{-x} - e^{-2x})$

d) $y = e^{-x} \cdot \sin x,\ x \geqslant 0$ **e)** $y = e^{-x} \cdot \cos(2x),\ x \geqslant 0$ **f)** $y = x \cdot \ln(2x)$

g) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$ **h)** $y = x + \ln(\cos x)$ für $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$

5.40 Berechne die Krümmung in den Punkten $P_1(1/y_1)$ sowie $P_2(2/y_2)$:

a) $y = x^2$ **b)** $y = \frac{1}{x}$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = 2x + 3$

5.41 Berechne die Krümmung der Sinuslinie $y = \sin x$ für $x = \frac{\pi}{2}$.

5.42 Besitzt der folgende Graph einen Scheitel? Wie groß ist dort gegebenfalls der Krümmungsradius?

a) $y = e^x$ **b)** $y = \ln x$ **c)** $y = \ln(\sin x),\ 0 < x < \pi$

5.43 Bestimme den Mittelpunkt des Krümmungskreises im Scheitel von

a) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ **b)** $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Verschiedene Anwendungen

5.44 Welche der folgenden Polynomfunktionen 3. Grades kommen als Kostenfunktionen in Betracht? Überprüfe dazu, ob die Funktionen für $x \geqslant 0$ stets positiv sowie streng monoton steigend sind.

a) $y = x^3 - 15x^2 + 78x + 10$ **b)** $y = x^3 - 12x^2 + 60x + 50$

c) $y = x^3 - 15x^2 + 72x + 50$ **d)** $y = x^3 - 18x^2 + 135x + 100$

5.45 Die Kosten für die Herstellung eines bestimmten elektronischen Bauteils betragen in €: $K(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}023 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3300,\ 0 \leqslant x \leqslant 2000$ Stück.

a) Wie groß sind die Kosten für 1600 Bauteile? Wie groß sind in diesem Fall die durchschnittlichen Kosten pro Einheit?

b) Stelle fest, dass die Funktion streng monoton steigend verläuft.

c) Stelle exakt und näherungsweise über die Grenzkosten fest, wie viel bei einer gegebenen Produktion von 200, 800 sowie 1500 Bauteilen die nächste produzierte Einheit kosten würde.

5.46 Ein Unternehmen stellt PKW-Anhänger her. Es könnte wöchentlich bis zu 20 Anhänger herstellen. Die Kosten betragen (Geldeinheit = 100 €):
$K(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 2{,}5 \cdot x^2 + 25 \cdot x + 10, \ \ 0 \leqslant x \leqslant 20.$

a) Stelle fest, dass die Funktion streng monoton steigend und für $0 \leqslant x \leqslant 20$ positiv ist.

b) Wie groß sind die durchschnittlichen Kosten bei der Herstellung von 8 Anhängern?

c) Berechne exakt und näherungsweise mit Hilfe der Grenzkosten, was es das Unternehmen zusätzlich kostet, wenn es die wöchentliche Produktion von 10 Anhängern auf 11 erhöht?

5.47 Die folgende Funktion ist eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion. Stelle die Bereiche der steigendenden positiven, sinkenden positiven und negativen Grenzproduktivität fest:

a) $y = -x^3 + 20x^2 + 40x$ für $0 \leqslant x \leqslant 18$

b) $y = -0{,}001 \cdot x^3 + 0{,}2 \cdot x^2 + 8{,}5 \cdot x$ für $0 \leqslant x \leqslant 200$

c) $y = -0{,}05 \cdot x^3 + 7 \cdot x^2 + 140 \cdot x$ für $0 \leqslant x \leqslant 140$

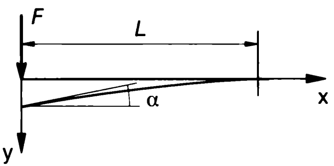


Abb. 5.39 a)

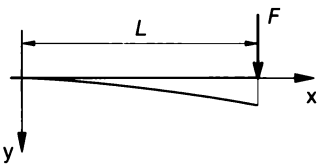


Abb. 5.39 b)

5.48 Auf einen Freiträger (Abb. 5.39 a) mit der "Biegesteifigkeit" $E \cdot I = 2 \cdot 10^6$ N m² und der Länge $L = 5{,}00$ m wirkt eine Last $F = 200$ N. Die Gleichung seiner Biegelinie lautet:

$$y = \frac{FL^3}{3EI}\left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{L^3}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant L.$$

a) Berechne die Durchbiegung, den (positiven) Neigungswinkel der Tangente sowie die Krümmung am freien Trägerende. Führe die Rechnung zuerst allgemein.

b) Wie würde die Biegegleichung lauten, wenn das Koordinatensystem wie in Abb. 5.39 b liegt?

Hinweis: Ersetze x durch $L - x$.

5.49 Gegeben ist ein Freiträger (Abb. 5.40) mit der "Biegesteifigkeit" $E \cdot I = 2 \cdot 10^6$ N m² und der Länge $L = 3{,}00$ m mit einer konstanten Streckenlast $q = 500$ N/m. Die Gleichung seiner Biegelinie lautet:

$$y = \frac{qL^4}{8EI}\left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{L} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{L^4}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant L.$$

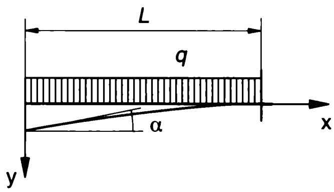


Abb. 5.40

Berechne die Durchbiegung, den (positiven) Neigungswinkel der Tangente sowie die Krümmung am freien Trägerende. Führe die Rechnung zuerst allgemein.

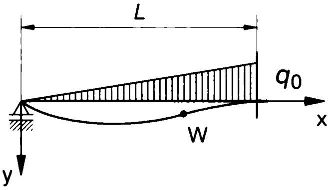


Abb. 5.41

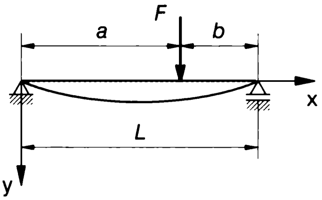


Abb. 5.42

5.50 Die Biegelinie eines Trägers mit einer Dreieckslast (Abb. 5.41) lautet: $y = \frac{q_0 L^4}{120EI} \cdot \frac{x}{L} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)^2$, $0 \leqslant x \leqslant L$. Bestimme Lage und Ausmaß der größten Durchbiegung, den Wendepunkt und den Anstieg der Wendetangente.

5.51 Gegeben ist ein mit einer Einzelkraft F belasteter Stützträger nach Abb. 5.42. Die Gleichung seiner Biegelinie lautet:

$$y = \begin{cases} \frac{FL^3}{6EI} \cdot \frac{a}{L} \cdot \frac{b^2}{L^2} \cdot \frac{x}{L} \cdot \left(1 + \frac{L}{b} - \frac{x^2}{ab}\right), & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant a. \\ \frac{FL^3}{6EI} \cdot \frac{b}{L} \cdot \frac{a^2}{L^2} \cdot \frac{L - x}{L} \cdot \left(1 + \frac{L}{a} - \frac{(L - x)^2}{ab}\right), & \text{für } a < x \leqslant L. \end{cases}$$

a) Zeige, dass die Funktion an der Stelle $x = a$ ohne abzusetzen durchgezeichnet werden kann, also stetig ist.

b) Bestimme Lage und Ausmaß der größten Durchbiegung, wenn $a > b$, $a = b$ und $a < b$ ist.

5.52 In Beispiel 5.15 wurde die Gleichung der Biegelinie für einen beidseitig eingespannten Träger der Länge L, angegeben, der mit einer konstanten Streckenlast q belegt ist. Leite die Gleichung der Biegelinie $y = w(x)$ für $L = 4$ m unter Berücksichtigung der folgenden verständlichen Forderungen ab:

$y(0) = 0$, $y(4) = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(4) = 0$, $y(2) = y_{max}$.

Diese Forderungen können durch ein Polynom 4. Grades erfüllt werden. Zeige, dass dieses Polynom mit der Biegelinie des Beispiels 5.15 übereinstimmt.

5.53 Schwach durchhängende Seile haben in guter Näherung Parabelform. Beschreibe die Kurve der Freileitung in Abb. 5.43 als Parabel $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, wenn $h_1 = 8{,}0$ m, $h_2 = 12{,}0$ m, die Minimalhöhe $h_0 = 7{,}0$ m und der Abstand der Masten $d = 24{,}0$ m beträgt.

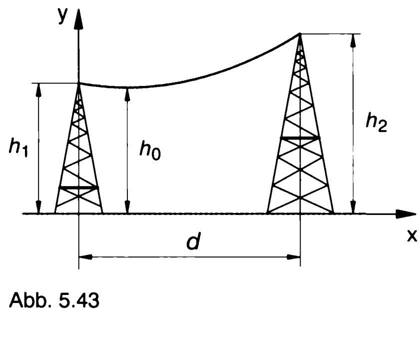


Abb. 5.43

5.54 Zwei normal aufeinander zulaufende Straßen (Abb. 5.44) sollen durch ein Übergangsstück von P nach Q abgerundet werden. Suche eine Polynomfunktion 2. Grades, deren Graph die beiden Straßenstücke sinnvoll verbindet.

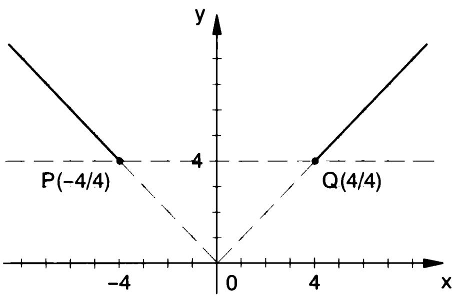


Abb. 5.44

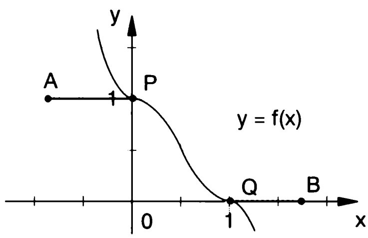


Abb. 5.45

5.55 Zwischen den Punkten P und Q soll ein "Straßenstück" so eingepasst werden (Abb. 5.45), dass ein Fortschreiten von A nach B in P und Q keinen Knick in der Richtung und auch in der Krümmung erfährt. Das bedeutet, dass für die gesuchte Kurve $y = f(x)$ die erste wie auch zweite Ableitung in P und Q null sein müssen. Damit bestehen die Forderungen:

$y(0) = 1,\ y(1) = 0$

$y'(0) = y'(1) = y''(0) = y''(1) = 0.$

Diese Gleichungen können durch eine Polynomfunktion 5. Grades erfüllt werden. Wie lautet sie?

5.56 Lässt man in Abb. 5.45 in P und Q einen Krümmungssprung zu (was beim Durchfahren einen seitlichen Beschleunigungssprung bedeuten würde), begnügt man sich also bloß mit dem Vermeiden einer plötzlichen Richtungsänderung, so kommt man mit einer Polynomfunktion 3. Grades aus. Wie lautet sie und wie groß ist der Krümmungssprung in P und Q?

5.57 Gegeben ist wie im Beispiel 5.19, Seite 164, ein Feder-Masse-System mit Dämpfung. Seine Kreisfrequenz bei fehlender Dämpfung ω_0 betrage wieder $\omega_0 = 2\ \text{s}^{-1}$. Es beginnt zur Zeit $t = 0$ s mit der Geschwindigkeit $v_0 = 20{,}0$ cm/s zu schwingen. Untersuche den Schwingungsverlauf, wenn

a) $\delta = 2\ \text{s}^{-1} = \omega_0$ ("aperiodischer Grenzfall"): $y(t) = v_0\, t e^{-\delta t}$

b) $\delta = 2{,}5\ \text{s}^{-1} > \omega_0$ ("Kriechfall"): $y(t) = \dfrac{v_0}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}\, e^{-\delta t} \sinh\left(t \cdot \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right).$

5.58 Die folgende Funktion stellt jeweils einen typischen Vertreter eines Kriechfalls (einer aperiodischen Bewegung) dar. Untersuche ihren Verlauf für $t \geqslant 0$:

a) $y(t) = 5e^{-t} - 2e^{-4t}$ **b)** $y(t) = 7e^{-t} - e^{-4t}$ **c)** $y(t) = -e^{-t} + 4e^{-4t}$

5.59 Die augenblickliche elektrische Leistung eines Wechselstromkreises ist $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ mit $u = \hat{u} \cdot \sin \omega t$ und $i = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Untersuche den zeitlichen Verlauf der Leistung $p(t)$ innerhalb einer Periode des Wechselstroms, wenn $\hat{u} = 5$ V, $\hat{i} = 1$ A, $\omega = 1\ \text{s}^{-1}$ und $\varphi = 60°$ sind.

5.60 Gegeben ist ein elektrischer Reihenschwingkreis (Abb. 5.46) mit $L = 1$ H und $C = 100$ µF. Zum Zeitpunkt $t = 0$ s beginnt sich der mit $U_0 = 100$ V aufgeladene Kondensator zu entladen. Je nach Größe des OHM'schen Widerstandes R wird der Stromverlauf unterschiedlich ausfallen: Bei kleinem R kommt es zu Schwingungen, bei großem R wird sich ein aperiodischer Verlauf (Kriechfall) einstellen.

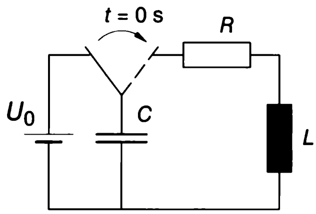


Abb. 5.46

Schreibt man abkürzend $\delta = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, so lautet die zeitliche Abhängigkeit des elektrischen Stromes für $t \geqslant 0$ s:

1. Fall (Schwingfall): $\delta < \omega_0$: $i(t) = \frac{U_0}{L\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

2. Fall (aperiodischer Grenzfall): $\delta = \omega_0$: $i(t) = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}$

3. Fall (aperiodischer Fall, Kriechfall): $i(t) = \frac{U_0}{L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} e^{-\delta t} \sinh\left(t\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)$.

Untersuche den Stromverlauf für:

a) $R = 50\ \Omega$ **b)** $R = 200\ \Omega$ **c)** $R = 250\ \Omega$

5.61 Die Abbildungsgleichung für eine dünne Sammellinse lautet: $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Dabei ist $f > 0$ die Brennweite der Linse, $g > 0$ die Entfernung des Gegenstandes von der Linse und b die Bildweite. Ist b positiv, so lässt sich das Bild auf einem Schirm auffangen ("reelles Bild"), ist $b < 0$, so ist dies nicht der Fall ("virtuelles Bild").

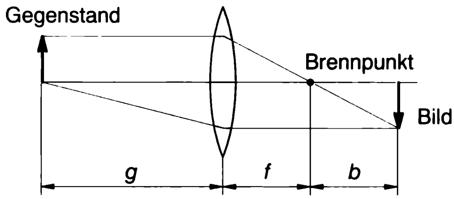


Abb. 5.47

a) Forme die Abbildungsgleichung so um, dass b explizit als Funktion von g ausgedrückt ist (f ist eine Konstante). Welche Funktion entsteht?

b) Untersuche die Funktion für $g > 0$.

Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus der früheren deutschen 10-DM-Banknote mit einer Glockenkurve nach Beispiel 5.18, Seite 162, sowie ein Bild von C. F. GAUSS.

5.4 Extremwertaufgaben

In den Anwendungen ist öfter die Aufgabe gestellt, von einer vorgegebenen Funktion $y = f(x)$ das **globale Maximum** oder **Minimum** zu bestimmen. Es interessiert nicht der Gesamtverlauf des Graphen, sondern nur die (meist in einem bestimmten Intervall) liegende Extremalstelle und das zugehörige Extremum der Funktion. Diese Funktion wird auch **Zielfunktion** genannt.

Bei den meisten Extremwertaufgaben ist die Gleichung der Zielfunktion von vornherein nicht angegeben; sie ist erst aufzustellen. Oft ergibt sich dabei eine Funktion von zwei oder mehr Variablen. Zwischen diesen Variablen bestehen Abhängigkeiten in Form von Gleichungen, die man als **Nebenbedingungen** bezeichnet. Das Hauptproblem besteht in der Regel darin, diese Nebenbedingungen zu finden. Häufig gelingt dies durch geometrische Überlegungen (pythagoräischer Lehrsatz, Strahlensätze und dgl.). Mit Hilfe der Nebenbedingungen stellt man, die Zielfunktion nur mehr als Funktion $y = f(x)$ einer Variablen x dar.

Bei der Lösung einer Extremwertaufgabe geht man in der Regel so vor, dass man zuerst mit Hilfe der Differentialrechnung die im interessierenden Intervall liegende Stelle des lokalen Extremums bestimmt. Allerdings kann es sein, dass das globale Extremum am Rand des Intervalls liegt, was eventuell noch geprüft werden muss.

Beispiel 5.20 : Volumsgrößter offener Behälter

Aus einem rechteckigen Blech (Abb. 5.48) mit den Seiten $a = 48{,}0$ cm und $b = 18{,}0$ cm ist nach Herausschneiden der Ecken der volumsgrößte offene Behälter zu formen.

Lösung

Ist x der Zahlenwert der Quadratseite in cm und V jener des Behältervolumens in cm^3, so gilt: $V(x) = (48 - 2x)(18 - 2x) \cdot x$.

Aus sachlichen Gründen muss für x gelten: $0 < x < 9$. Wir suchen daher die Maximumstelle in diesem Intervall.

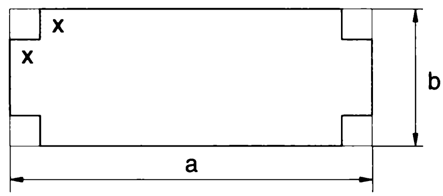


Abb. 5.48

$V(x) = 4x^3 - 132x^2 + 864x$; $V' = 12x^2 - 264x + 864 = 0$

$$x_{12} = \frac{-(-264) \pm \sqrt{264^2 - 4 \cdot 12 \cdot 864}}{2 \cdot 12} = \frac{264 \pm \sqrt{28224}}{24} = 11 \pm 7;\ x_1 = 4;\ x_2 = 18.$$

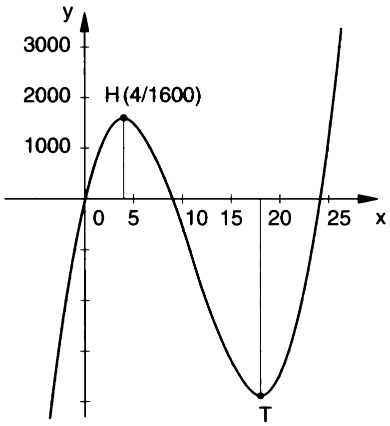


Abb. 5.49

In Betracht kommt nur $x_1 = 4$.

$V''(x) = 24x - 264$; $V''(4) = 24 \cdot 4 - 264 < 0$.

Damit ist $x_1 = 4$ als Maximumsstelle nachgewiesen. Für das maximale Volumen ergibt sich:

$V_{max} = (48 - 2 \cdot 4)(18 - 2 \cdot 4) \cdot 4 = 1600$.

Man erhält also das maximale Volumen 1,60 dm^3, wenn man an den Ecken des Blechs quadratische Flächen der Seitenlänge 4,0 cm ausschneidet.

Abb. 5.49 zeigt den Verlauf des Graphen $V(x) = (48 - 2x)(18 - 2x) \cdot x$.

Es handelt sich um den typischen Verlauf einer Polynomfunktion vom Grad 3. Neben einem Maximum, das hier gefragt ist, gibt es noch ein Minimum an der Stelle $x_2 = 18$.

Beispiel 5.21 : Vereinfachung der Zielfunktion

Welches Rechteck von gegebenem Umfang u = 8,0 cm hat die kleinste Diagonale d?

Lösung

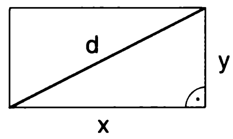


Abb. 5.50

$d = \sqrt{x^2 + y^2}$, wobei x und y die Rechteckseiten sind. Die Diagonale hängt also von den Variablen x und y ab. Im Folgenden rechnen wir wieder mit den Zahlenwerten der Größen, alle Längen sind in cm gegeben.

Zwischen x und y besteht auf Grund der Aufgabenstellung die *Nebenbedingung*:

$u = 2x + 2y = 8$ ist. Daraus kann etwa y durch x ausgedrückt werden: $y = 4 - x$. Durch Einsetzen in die Zielfunktion wird diese zu einer Funktion von einer Variablen:

$d(x) = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2}, \ x \geqslant 0.$

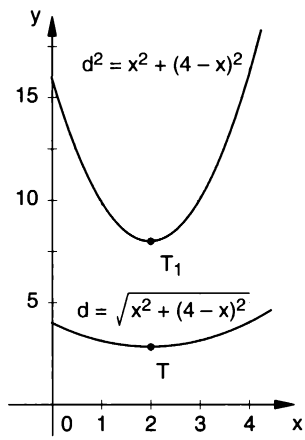


Abb. 5.51

Zur Bestimmung des Minimums von d(x) kann man davon Gebrauch machen, dass sich die Lage eines Extremums beim Quadrieren nicht ändert! Denn von allen Quadratwurzeln ist diejenige die kleinste (die größte), deren Radikand am kleinsten (am größten) ist. Abb. 5.51 zeigt die Funktion d(x) und $d^2(x)$. Man kann daher zur Bestimmung der Extremalstellen das Quadrat der Zielfunktion untersuchen!

$f(x) = d^2(x) = x^2 + (4 - x)^2;$

$f'(x) = 2x + (-2) \cdot (4 - x) = 4x - 8;$

$f''(x) = 4.$

Lösung der Gleichung $f'(x) = 4x - 8 = 0$: $x = 2$;

$f''(2) = 4 > 0 \Rightarrow x = 2$ ist eine Minimumstelle von f(x).

$x = 2$ ist auch eine Minimumstelle von $d(x) = \sqrt{f(x)}$;

$y = 4 - x = 2$; daher ist das gesuchte Rechteck mit minimaler Diagonale eine Quadrat mit der Seite 2 cm. $d_{min} = 2 \cdot \sqrt{2}$ cm $\approx 2{,}83$ cm.

In Beispiel 5.21 konnte die Zielfunktion vereinfacht werden. Zusammenfassend werden nun mögliche Vereinfachungen der Zielfunktion angegeben.

Vereinfachungenen der Zielfunktion ohne Änderung der Extremalstellen:

1. Ein konstanter Faktor der Zielfunktion kann weggelassen werden. Denn die Gleichung $f'(x) = 0$ hat die gleichen Lösungen wie $a \cdot f'(x) = 0$.
2. Anstelle der Zielfunktion kann ihr Quadrat untersucht werden (siehe Beispiel 5.21).
3. Anstelle der Zielfunktion kann man auch ihren Kehrwert untersuchen. Dabei ist zu beachten, dass ein Maximum (Minimum) des Kehrwertes ein Minimum (Maximum) der ursprünglichen Zielfunktion ist.

Beispiel 5.22 : Hydraulisch günstiger Querschnitt einer Rinne

Aus drei Brettern der Breite a ist eine Rinne mit möglichst großem Querschnitt in Form eines gleichschenkligen Trapezes zu bilden (Abb. 5.52).

Lösung

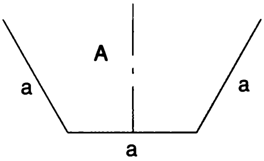


Abb. 5.52

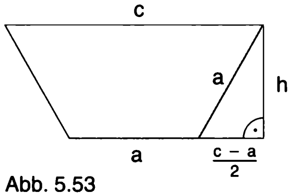


Abb. 5.53

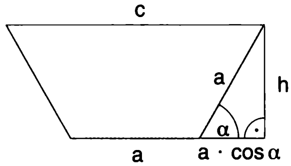


Abb. 5.54

Mit den Bezeichnungen von Abb. 5.53 gilt gilt für die Querschnittsfläche: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$.

Damit ist A eine Funktion von c und h. c und h sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Aus dem rechtwinkligen Dreieck in Abb. 5.53 folgt die *Nebenbedingung*: $a^2 = h^2 + \frac{1}{4}(c-a)^2$.

Daraus lässt sich etwa h durch c ausdrücken: $h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}(c-a)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (c-a)^2}$.
Damit lautet die Querschnittsfläche A als Funktion von c:

$A(c) = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (c-a)^2} = \frac{1}{4}(a+c)\sqrt{3a^2 - c^2 + 2ac}$.

Diese Funktion muss nun nach c abgeleitet werden. Man wird hier als Vereinfachung der Zielfunktion den konstanten Faktor $\frac{1}{4}$ weglassen und danach zum Quadrat übergehen:

$f(c) = (a+c)^2 \cdot (3a^2 - c^2 + 2ac)$.

$f'(c) = 2 \cdot (a+c) \cdot (3a^2 - c^2 + 2ac) + (a+c)^2 \cdot (-2c + 2a)$.

Herausheben von (a + c) und Vereinfachung führt auf $f'(c) = 4(a+c) \cdot (2a^2 + ac - c^2)$.

$f''(c) = 12(a^2 - c^2)$.

$f'(c) = 0$ ist nach dem Produkt-Null-Satz gleich null, wenn

1. Fall: $a + c = 0 \Rightarrow c_1 = -a$
2. Fall: $c^2 - ac - 2a^2 = 0$ (quadratische Gleichung in c) $\Rightarrow c_2 = 2a$ sowie $c_3 = -a$.

Davon kommt nur $c_2 = 2a$ als mögliche Maximumstelle in Frage.

$f''(2a) = 12(a^2 - 4a^2) = -36 \cdot a^2 < 0 \Rightarrow c_2 = 2a$ ist Maximumstelle.

Daher sind die 3 Bretter so zu verbinden, dass die obere Seite c des von ihnen gebildeten Trapezes die Größe 2a hat. Überlege, dass dies $\alpha = 60°$ bedeutet (Abb. 5.54). Setzt man $c = 2a$ im Term für A(c), so erhält man als maximalen Fächeninhalt $A_{max} = \frac{3a^2}{4}\sqrt{3}$.

Eine zweite Lösungsvariante:

Man führt den Winkel α nach Abb. 5.54 ein und drückt über *zwei Nebenbedingungen* die Größen h und c durch α aus. Dadurch wird die Zielfunktion nur noch eine Funktion des Winkels α. Aus dem rechtwinkligen Dreieck in Abb. 5.54 entnimmt man $h = a \cdot \sin\alpha$ und

$c = a + 2a \cdot \cos\alpha$: $A(\alpha) = \frac{a + a + 2a\cos\alpha}{2} \cdot a \cdot \sin\alpha = a^2(1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha$, $\alpha \leq 90°$.

a^2 kann als konstanter Faktor der Zielfunktion $A(\alpha)$ weggelassen werden, wodurch man eine einfachere Zielfunktion $f(\alpha)$ mit gleichen Extremalstellen erhält:

$f(\alpha) = (1 + \cos\alpha)\cdot\sin\alpha.$

$f'(\alpha) = (-\sin\alpha)\cdot\sin\alpha + (1 + \cos\alpha)\cdot\cos\alpha = -\sin^2\alpha + \cos\alpha + \cos^2\alpha = 2\cdot\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1.$

$f''(\alpha) = 4\cdot\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha) - \sin\alpha = -\sin\alpha\cdot(4\cos\alpha + 1).$

Lösung der goniometrischenGleichung $f'(\alpha) = 2\cdot\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$:

Setzt man $u = \cos\alpha$, so erhält man die quadratische Gleichung:

$$2u^2 + u - 1 = 0 \;\Rightarrow\; u_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4};\; u_1 = \frac{1}{2};\; u_2 = -1.$$

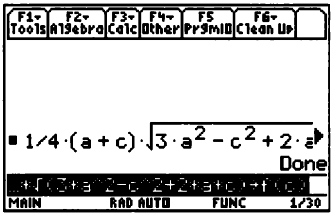
Damit folgt aus $u_1 = \cos\alpha = \frac{1}{2}$ der Winkel $\alpha_1 = 60°$. Aus $u_2 = \cos\alpha = -1$ folgt der Winkel $\alpha_2 = 180°$, der jedoch auszuschließen ist.

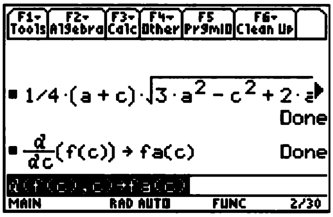
$f''(\alpha_1) = -\sin 60°\cdot(4\cos 60° + 1) \approx -2{,}60 < 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 60°$ ist Maximumstelle.

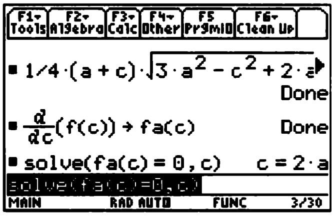
Die Verwendung eines Winkels so wie hier ist rechentechnisch fallweise vorteilhaft.

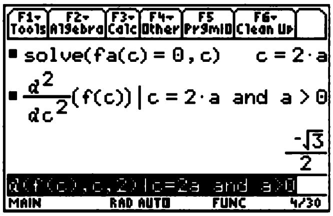
Eine dritte Lösungsvariante: Mit Hilfe des TI-89 oder von Mathcad

TI 89









Zuerst wird die abzuleitende Funktion als f(c) gespeichert und ihre Ableitung gebildet; diese wird als Funktion fa(c) gespeichert. Dann wird die Gleichung fa(c) gelöst.

Schließlich wird c = 2a in die zweite Ableitung von fa(c) eingesetzt unter der Bedingung a > 0. Da dies zu einem negativen Wert führt, liegt an der Stelle c = 2a ein Maximum vor.

MC

$$A(c) = \frac{1}{4}\cdot(a + c)\cdot\sqrt{3a^2 - c^2 + 2a\cdot c}$$

Die erste Ableitung von $A(c)$ wird null gesetzt und nach c gelöst.

$$\frac{d}{dc}A(c) = 0 \;\left|\; \begin{array}{l} \text{ersetzen, } A(c) = \frac{1}{4}\cdot(a + c)\cdot\sqrt{3\cdot a^2 - c^2 + 2\cdot a\cdot c} \\ \text{auflösen, } c \end{array}\right. \;\rightarrow\; 2\cdot a$$

Für die Überprüfung, ob c = 2a eine Maximalstelle ist, setzt man c = 2a in die zweite Ableitung von A(c) ein:

$$\frac{d^2}{dc^2}A(c) \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen, } A(c) = \frac{1}{4}\cdot(a+c)\cdot\sqrt{3\cdot a^2 - c^2 + 2\cdot a\cdot c} \\ \text{ersetzen, } c = 2a \\ \text{annehmen, } a > 0 \\ \text{vereinfachen} \end{array} \right. \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{3}$$

Da dieser Wert negativ ist, ist der Querschnitt A(c) für c = 2a maximal.

Beispiel 5.23 : Gewinnmaximum

Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{15}{2}\cdot x^2 + 60\cdot x + 50$ (Geldeinheiten). Bestimme jene Produktionsmenge x, für die der Gewinn maximal ist, wenn

a) der Preis pro Mengeneinheit unabhängig von der abgesetzten Menge x gleich p = 30 Geldeinheiten beträgt;

b) der Preis mit der abgesetzten Menge x linear nach dem Gesetz $p(x) = 35 - \frac{x}{2}$ fällt (d.h. die abgesetzte Menge fällt mit steigendem Preis).

Lösung

Für die Gewinnmaximierung ist der Produktpreis p zu berücksichtigen. Wir besprechen zwei Marktformen:

(1) Es gibt viele Anbieter und viele Nachfrager eines Produktes. Man spricht von einer "vollständigen Konkurrenz". Der Preis bleibt konstant unabhängig von der abgesetzten Menge.

(2) Es gibt nur einen Anbieter und viele Nachfrager, es besteht eine Monopolsituation. Für den Anbieter fällt der Preis p mit der abgesetzten Produktmenge x.

Gewinn G(x) = Erlös E(x) – Kosten K(x)

Zu **a)** Abb. 5.55

$G(x) = p\cdot x - K(x) =$
$= 30\cdot x - \left(\frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{15}{2}\cdot x^2 + 60\cdot x + 50\right) =$
$= -\frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{15}{2}\cdot x^2 - 30x - 50.$

$G'(x) = -x^2 + 15x - 30 = 0$
$\Rightarrow x_1 = 12{,}6$ sowie $x_2 = 2{,}4$.

$G''(x) = -2x + 15$; $G''(x_1) < 0$, d.h. x_1 ist die gesuchte Maximumstelle. $G(x_1) = 95{,}9$.

Der Gewinn ist also mit 95,9 Geldeinheiten am größten, wenn die Produktion gleich 12,6 Mengeneinheiten beträgt.

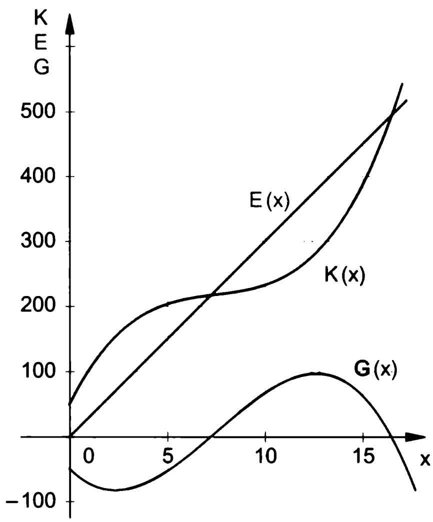


Abb. 5.55 Maximum einer Gewinnfunktion

Zu b) $G(x) = \left(35 - \frac{x}{2}\right) \cdot x - \left(\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{15}{2} \cdot x^2 + 60 \cdot x + 50\right) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + 7 \cdot x^2 - 25x - 50.$

$G'(x) = -x^2 + 14x - 25 = 0 \Rightarrow x_1 = 11{,}9$ sowie $x_2 = 2{,}1$.

$G''(x) = -2x + 14$; $G''(x_1) < 0$, d.h. x_1 ist die gesuchte Maximumstelle. $G(x_1) = 82{,}1$.

Der Gewinn ist nun mit 82,1 Geldeinheiten am größten, wenn die Produktion gleich 11,9 Mengeneinheiten beträgt.

Beispiel 5.24 : Die zerbrochene Glasplatte

Von einer rechteckigen Glasplatte (Abb. 5.56) von a = 150,0 cm und b = 120,0 cm ist an einer Ecke ein Stück in Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten

a) c = 60,0 cm und d = 40 cm

b) c = 30,0 cm und d = 40 cm

abgebrochen. Aus der restlichen Platte soll eine rechteckige Platte von möglichst großem Flächeninhalt geschnitten werden.

Lösung

Zu a) Für den Flächeninhalt A der Restplatte entnimmt man aus Abb. 5.56: $A = (a - x) \cdot (b - y)$

Nebenbedingung für x und y:

Der Punkt P(x/y) liegt auf der Geraden mit den Achsenabschnitten c und d. Die Steigung dieser Geraden ist $k = -\frac{d}{c}$. Daher lautet ihre Gleichung: $y = -\frac{d}{c} \cdot x + d$.

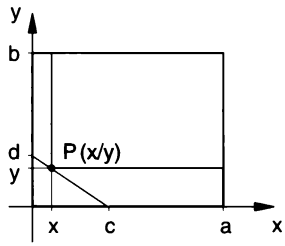


Abb. 5.56

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt $A(x) = (a - x) \cdot \left(b + \frac{d}{c} \cdot x - d\right)$, $0 \leq x \leq c$.

$A' = (-1) \cdot \left(b + \frac{d}{c} \cdot x - d\right) + (a - x) \cdot \frac{d}{c} = -2x \cdot \frac{d}{c} - b + d + a \cdot \frac{d}{c}$; $A'' = -\frac{2d}{c}$.

$A' = -2x \cdot \frac{d}{c} - b + d + a \cdot \frac{d}{c} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2d} \cdot (ad + cd - bc)$.

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt: $x = 15$ cm $\leq c$. Da $A'' < 0$ für alle x und daher auch für x = 15 cm, liegt ein Maximum vor: $x_{max} = 15$ cm. $y_{max} = -\frac{d}{c} \cdot x_{max} + d = 30$ cm.

$A_{max} = (a - x_{max}) \cdot (b - y_{max}) = 12150\ \text{cm}^2$.

Die größte Fläche mit 12 150 cm^2 erhält man daher, wenn man die Länge auf 135 cm und die Breite auf 90 cm kürzt.

Zu b) Setzt man c = 30 cm und d = 40 cm, so erhält man aus A' = 0 die Lösung x = 45 cm. Dieser Wert ist jedoch nicht mehr möglich, da $x \leq c = 30$ cm sein muss. Da $A' \neq 0$ zwischen 0 cm und c = 30 cm, gibt es dort kein lokales Extremum! Da weiters die Funktion A(x) überall differenzierbar ist, kann daher das Maximum nur am Rand des Intervalls [0 cm; c] liegen:

$A(0\ \text{cm}) = (a - 0\ \text{cm}) \cdot \left(b + \frac{d}{c} \cdot 0\ \text{cm} - d\right) = a \cdot (b - d) = 12000\ \text{cm}^2$.

$A(c) = (a - c) \cdot \left(b + \frac{d}{c} \cdot c - d\right) = (a - c) \cdot b = 14400\ \text{cm}^2$.

Somit ist $x_{max} = c = 30$ cm. Die größtmögliche Glasplatte erhält man, wenn man die Breite b = 120 cm beibehält und die Länge um 30 cm auf 120 cm kürzt.

Beispiel 5.25 : Maximale Kolbengeschwindigkeit beim Schubkurbeltrieb

Bei dem Kurbeltrieb in Abb. 5.57 ist s der vom äußersten linken Punkt T (Totpunkt) gemessene Weg des Kolbens. Gesucht ist die maximale Kolbengeschwindigkeit $v = \dot{s}$ bei einer gleichförmigen Drehbewegung der Kurbel mit der Winkelgeschwindigkeit ω.

Lösung

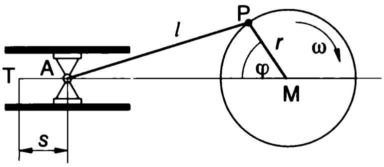


Abb. 5.57 Schubkurbeltrieb

In "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 137, wurde für den Kolbenweg s hergeleitet:

$$s = r\cdot(1 - \cos\varphi) + l\cdot\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}\right)$$

Wenn der Drehwinkel φ null ist, ist auch $s = 0$. Der Term für den Kolbenweg s lässt eine näherungsweise zutreffende Vereinfachung zu. Dazu betrachten wir die Linearisierung der Funktion $y = \sqrt{1 - x}$ an der Stelle $x = 0$, d.h. wir ersetzen den Graphen dieser Funktion durch seine Tangente:

$$y = (1 - x)^{\frac{1}{2}};\quad y' = \frac{1}{2}\cdot(1 - x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1) = \frac{-1}{2\sqrt{1 - x}};\quad y'(0) = -\frac{1}{2};$$

Tangente: $y = k\cdot x + d = y'(0)\cdot x + y(0) = -\frac{1}{2}\cdot x + 1.$

Für betragsmäßig kleine x gilt daher: $\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{x}{2}.$

Das "Schubstangenverhältnis" $\lambda = \frac{r}{l}$ ist meist kleiner als 1:4, sodass umsomehr $x = \lambda^2\cdot\sin^2\varphi \ll 1$ (das Symbol $\ll$ besagt "sehr viel kleiner als").

Es gilt daher $1 - \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi} \approx \frac{1}{2}\lambda^2\cdot\sin^2\varphi.$

Setzt man dafür in den Term für s ein, so ergibt sich nach kurzer Rechnung folgende viel verwendete einfache Näherungsformel für den Kolbenweg:

$$s = r\left(1 - \cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right).$$

Zwischen dem Drehwinkel φ (im Bogenmaß) und der Winkelgeschwindigkeit ω besteht der Zusammenhang $\varphi = \omega\cdot t$, weshalb man schreiben kann: $s = r\left(1 - \cos\omega t + \frac{\lambda}{2}\sin^2\omega t\right)$. Die Ableitung nach t ergibt die Kolbengeschwindigkeit v:

$$v = \dot{s} = r\left(\omega\sin\omega t + \frac{\lambda}{2}2\omega\sin\omega t\cdot\cos\omega t\right) = r\omega\left(\sin\omega t + \frac{\lambda}{2}\sin 2\omega t\right).$$

Dabei wurde die Beziehung $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ verwendet. Die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit t ist die Kolbenbeschleunigung a:

$$a = \dot{v} = \ddot{s} = r\omega\left(\omega\cos\omega t + \frac{\lambda}{2}\cdot 2\omega\cdot\cos 2\omega t\right) = r\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t).$$

Weiters ist $\ddot{v} = -r\omega^3(\sin\omega t + 2\lambda\sin 2\omega t).$

Die Extrema der Funktion $v = v(t)$ erhält man aus: $\dot{v} = a = 0$:

$$r\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t) = 0 \Rightarrow \cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t = 0.$$

Führt man wieder den anschaulicheren Drehwinkel φ ein, so ist die goniometrische Gleichung $\cos\varphi + \lambda \cdot \cos 2\varphi = \cos\varphi + \lambda \cdot \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = 0$ zu lösen. Setzt man $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ und $u = \cos\varphi$, so erhält man eine quadratische Gleichung in u:

$$2\lambda \cdot u^2 + u - \lambda = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\lambda^2}}{4\lambda},\ u_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 8\lambda^2}}{4\lambda}.$$

Da $u_2 < -1$, gibt es keinen Winkel, der die Gleichung $u = \cos\varphi$ erfüllt. Setzt man etwa $\lambda = 0{,}2$, so erhält man $u_1 = 0{,}186 = \cos\varphi$; daraus $\varphi_1 = 79°$ sowie $\varphi_2 = 360° - \varphi_1 = 281°$.

Wegen $\ddot{v}(\varphi_1) = -r \cdot \omega^3(\sin\varphi_1 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot \sin 2\varphi_1) = -1{,}13 \cdot r\omega^3 < 0$ und
$\ddot{v}(\varphi_2) = -r \cdot \omega^3(\sin\varphi_2 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot \sin 2\varphi_2) = 1{,}13 \cdot r\omega^3 > 0$

ist φ_1 eine Maximumsstelle und φ_2 eine Minimumsstelle. Die zugehörigen extremalen Geschwindigkeiten sind: $v(\varphi_1) = r \cdot \omega\left(\sin\varphi_1 + \frac{0{,}2}{2}\sin 2\varphi_1\right) = 1{,}02 \cdot r\omega$; $v(\varphi_2) = -v(\varphi_1)$.

$v_0 = r \cdot \omega$ ist die Bahngeschwindigkeit des Punktes P, also gleich der Umfangsgeschwindigkeit der Kurbel. Die extremalen Kolbengeschwindigkeiten sind somit bei kleinem λ betragsmäßig ungefähr gleich v_0.

Im Überblick: Extremwertaufgaben

Gesucht wird das **globale Maximum** oder **Minimum** einer sogenannten *Zielfunktion* $y = f(x)$; diese Suche beschränkt sich in der Regel auf ein aus sachlichen Gründen gegebenes Intervall für x. Mit Hilfe der Differentialrechnung wird zuerst (bei den hier zu besprechenden nichtlinearen Zielfunktionen) das lokale Maximum bzw. Minimum gesucht. Es kann jedoch vorkommen, dass das globale Extremum am Rand des Intervalls liegt und daher mit der Differentialrechnung nicht gefunden wird.

Die Zielfunktion ist oft eine Funktion von zwei oder mehr Variablen, zwischen denen Abhängigkeiten in Form von Gleichungen bestehen, die man als **Nebenbedingungen** bezeichnet. Mit Hilfe dieser Nebenbedingungen versucht man, die Zielfunktion nur mehr als Funktion $y = f(x)$ einer Variablen x darzustellen.

Vereinfachungenen der Zielfunktion ohne Änderung der Extremalstellen:

1. Ein konstanter *Faktor* kann weggelassen werden.
2. Man kann das Quadrat der Zielfunktion untersuchen.
3. Man kann den Kehrwert der Zielfunktion untersuchen (wobei sich die entgegengesetzten Extrema ergeben).

Aufgaben

5.62 Die Zahl 10 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass

a) ihr Produkt maximal,

b) die Summe ihrer Quadrate minimal wird.

Hinweis: $10 = x + (10 - x)$.

5.63 Welches Rechteck hat

a) bei gegebenem Flächeninhalt A den kleinsten Umfang?

b) bei gegebenem Umfang u den größten Flächeninhalt?

5.64 Ein rechteckiges Grundstück grenzt an einer Seite an eine Mauer. Es soll mit einem Zaun der Länge 100 m umgeben werden. Wie sind Länge und Breite zu wählen, damit sein Flächeninhalt möglichst groß wird?

5.65 Ein rechteckiges Grundstück möglichst großer Fläche soll eingezäunt werden. 40 m Zaun in gerader Linie sind bereits aufgestellt. Insgesamt steht noch Zaunmaterial für **a)** 160 m **b)** 100 m zur Verfügung. Wie soll die weitere Einzäunung erfolgen?

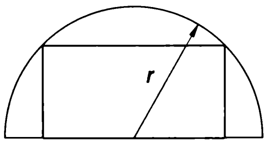


Abb. 5.58

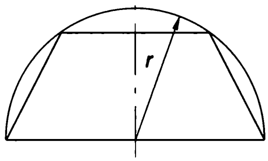


Abb. 5.59

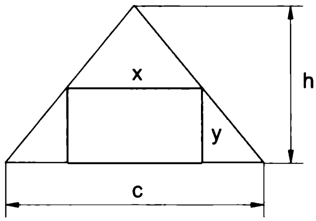


Abb. 5.60

5.66 Einem Halbkreis mit dem Radius r (Abb. 5.58) ist das Rechteck mit

a) größtmöglichem Inhalt; **b)** größtmöglichem Umfang einzuschreiben.

5.67 Einem Halbkreis mit dem Radius r (Abb. 5.59) ist das gleichschenklige Trapez

a) mit größtmöglichem Inhalt; **b)** mit größtmöglichem Umfang einzuschreiben.

5.68 Einem Kreis (Radius r) ist das Rechteck

a) mit dem größten Flächeninhalt; **b)** mit dem größten Umfang u einzuschreiben.

5.69 Einem gleichschenkligen Dreieck (Abb. 5.60) mit der Höhe h = 6,0 cm und der Basis c = 10,0 cm ist ein Rechteck so einzuschreiben, dass sein Flächeninhalt maximal ist.

5.70 Aus vier Stangen der Länge s = 3,0 m ist ein Zelt in Form einer quadratischen Pyramide mit möglichst großem Volumen zu bilden. Welche Höhe h besitzt das Zelt?

5.71 Ein Turm mit quadratischer Grundfläche soll ein pyramidenförmiges Dach mit einem Fassungsvermögen V = 120 m^3 bei minimaler Dachfläche erhalten. Berechne die Abmessungen des Daches sowie den Neigungswinkel der Dachflächen.

5.72 Einem geraden Kreiskegel ist ein Zylinder mit größtem Volumen einzuschreiben (Achsenschnitt wie in Abb. 5.60). Welcher Teil des Kegels wird dabei ausgefüllt?

5.73 Einer Kugel mit dem Radius R ist

a) der Kreiszylinder mit größtem Volumen,

b) der Kreiszylinder mit größter Oberfläche,

c) der Kegel mit größtem Volumen einzuschreiben.

5.74 Ein kreisförmiges Blechstück (Abb. 5.61) mit dem Radius r soll nach Herausschneiden eines Sektors zu einem kegelförmigen Trichter zusammengebogen werden. Bei welchem Mittenwinkel α des Sektors hat der Trichter maximales Fassungsvermögen?

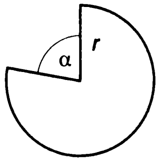


Abb. 5.61

5.75 Welche Abmessungen müssen für eine

a) geschlossene quadratische Dose
b) oben offene quadratische Dose
c) geschlossene zylindrische Dose
d) oben offene zylindrische Dose

mit dem Füllvolumen $V = 1\ l$ gewählt werden, damit die Oberfläche (Materialverbrauch!) geringstmöglich ist?

5.76 Welchen Neigungswinkel α zur Waagrechten muss eine Dachfläche haben, damit Wasser am schnellsten abrinnt (Abb. 5.62)?

Hinweis: Wird die an sich beliebig angenommene feste Länge b überdacht, so gilt für die gefragte Zeit t: $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ mit der Beschleunigung $a = g \sin\alpha$ und $s = \frac{b}{\cos\alpha}$.

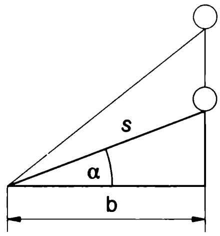


Abb. 5.62

5.77 Hydraulisch günstige Profile: Ein Kanal soll einen Querschnitt von $A = 1\ m^2$ haben. Wegen des Materialaufwandes und aus Reibungsgründen wird der kleinstmögliche benetzte Umfang gefordert. Wie ist der Querschnitt zu dimensionieren, wenn dieser die Form

a) eines oben offenen Rechtecks,
b) eines auf der Spitze stehenden oben offenen gleichschenkligen Dreiecks,
c) eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis (Abb. 5.63) haben soll?

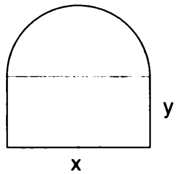


Abb. 5.63

5.78 Ein Körper wird unter dem Winkel α schräg nach oben geworfen. Die Parameterdarstellung der Wurfbahn ohne Berücksichtungung des Luftwiderstandes lautet:

$x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$, $y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2$. Bestimme jenen Winkel α, für den die Wurfweite w maximal ist. Wie groß ist in diesem Fall die Wurfweite?

5.79 Eine Lampe mit der Lichtstärke I befindet sich in einer Höhe h über dem Punkt A auf einem Tisch (Abb. 5.64). Auf dem Tisch liegt ein Buch, das möglichst gut beleuchtet werden soll. Die Beleuchtungsstärke E in einem Punkt P des Buches im Abstand $a = 50$ cm von A beträgt $E = I \cdot \frac{\sin\varphi}{r^2}$. Bestimme die optimale Lampenhöhe h!

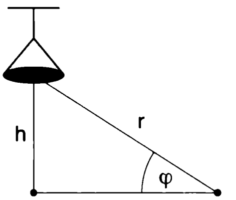


Abb. 5.64

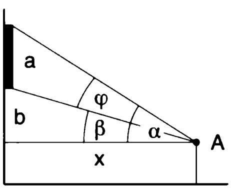


Abb. 5.65

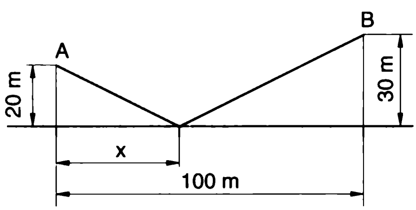


Abb. 5.66

5.80 Zwei Lichtquellen A und B der Stärke $I_A = 1\,000$ cd und $I_B = 2 \cdot I_A$ haben den Abstand $s = 20$ m voneinander. Bestimme den Abstand x des Punktes P von A zwischen den Lichtquellen mit der geringsten Beleuchtungsstärke E.

Hinweis: $E = \frac{I_A}{x^2} + \frac{I_B}{(s - x)^2}$

5.81 Welchen Abstand x muss ein Betrachter mit der Augenhöhe $a = 170$ cm von einem auf waagrechtem Boden stehenden Bild der Höhe $h = 40$ cm haben, damit er das Bild unter dem größten Sehwinkel φ sieht.

5.82 Ein Bild (Abb. 5.65) mit einer Höhe von $a = 1{,}20$ m hängt so an einer Wand, dass sich sein unterer Rand um $b = 1{,}40$ m höher als das Auge eines Betrachters befindet. In welchem Abstand x von der Wand sieht der Betrachter das Bild unter dem größten Winkel φ?

5.83 Ein Läufer (Abb. 5.66) soll in kürzester Zeit von einem Punkt A zu einem Punkt B laufen, wobei er dazwischen eine Wand berühren muss. Welchen Weg muss er wählen (Laufgeschwindigkeit c)? Zeige, dass sein Weg dem Reflexionsgesetz des Lichtes folgt.

5.84 Ein Läufer (Abb. 5.67) soll in kürzester Zeit von einem Punkt A auf einem Gelände mit festem Boden zu einem Punkt B auf einem Gelände mit tiefem Sandboden laufen. Seine Laufgeschwindigkeiten sind c_1 (auf festem Boden) und c_2 (auf Sandboden). Welchen Weg muss er wählen? Zeige, dass sein Weg dem Brechungsgesetz des Lichtes folgt.

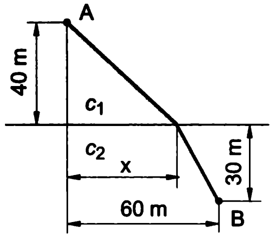


Abb. 5.67

5.85 Ein Balken (Abb. 5.68) soll in einem Gang der Breite a um eine Ecke getragen werden, ohne dass er nach oben gekippt wird. Wie lang darf der Balken höchstens sein?

Hinweis: Verwende den Winkel α zur Angabe der Balkenlänge x + y .

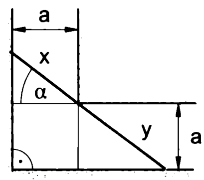


Abb. 5.68

5.86 Zwei PKW A_1 und A_2 fahren auf einander rechtwinklig schneidenden Straßen gleichförmig mit $v_1 = 60$ km/h bzw. $v_2 = 80$ km/h auf die Kreuzung zu. Am Beobachtungsanfang sind sie 1200 m bzw. 900 m von der Kreuzung entfernt. Wann ist ihre Entfernung am kleinsten?

5.87 Eine PKW-Kolonne (Abb. 5.69) bewegt sich mit der Geschwindigkeit v im Stau. Es sei d der stets gleiche Sicherheitsabstand zweier PKWs und l die durchschnittliche Länge eines PKWs. Ist T die Zeitdauer, in der beispielsweise die vorderen Enden zweier hintereinander fahrender PKW einen bestimmten Zählpunkt passieren, so gilt $d + l = v \cdot T$ und damit $T = \frac{d + l}{v}$. Angenommen, ein PKW macht eine Vollbremsung bis zum Stillstand mit der konstanten Bremsverzögerung $a^* > 0$, wofür er den Brems-

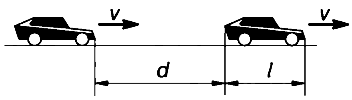


Abb. 5.69

weg $\frac{v^2}{2a^*}$ braucht. Bis zum Endpunkt dieser Strecke muss auch der Fahrer des nachfahrenden PKWs zum Stillstand kommen. Dessen Anhalteweg setzt sich aus dem Reaktionsweg $v \cdot t_R$ mit t_R als Reaktionszeit und dem Bremsweg $\frac{v^2}{2a}$ zusammen, wobei $a > 0$ die konstante Bremsverzögerung des nachfahrenden PKWs ist. Damit ergibt sich: $d = v \cdot t_R + \frac{v^2}{2a} - \frac{v^2}{2a^*}$. Für a^* muss sicherheitshalber eine hohe Bremsverzögerung angenommen werden, etwa $a^* = 9\ \text{m/s}^2$. Für welche Geschwindigkeit v ist T am geringsten, wenn $l = 5$ m, $t_R = 1$ s und $a = 6\ \text{m/s}^2$?

Anmerkung: Zum Unterschied zu Aufgabe 3.88, Seite 74, "Ingenieur-Mathematik 2", wird einfachheitshalber angenommen, dass die Bremsverzögerung sofort voll einsetzt.

5.88 Ein mit einer Flüssigkeit gefülltes Gefäß (Abb. 5.70) der Höhe H hat im Abstand h unter dem Flüssigkeitsspiegel ein kleines Loch, das so klein ist, dass der Flüssigkeitsspiegel beim Ausströmen kaum sinkt. Dann gilt für die Geschwindigkeit des austretenden Wassers das TORRICELLI'sche Ausflussgesetz: $v = \mu \cdot \sqrt{2gh}$. Dabei ist g die Fallbeschleunigung und μ die sogenannte Ausflusszahl (für Wasser bei scharfkantiger Ausflussöffnung gleich 0,59). In welchem Abstand h muss das Wasser austreten, damit die "Spritzweite" w größtmöglich ist?

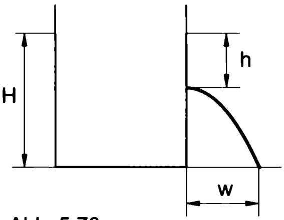


Abb. 5.70

Hinweis: Das Ausströmen des Wassers ist ein waagrechter Wurf mit der Wurfweite w.

5.89 Bei einer erzwungenen mechanischen Schwingung hängt die Amplitude $\hat{y}$ des Oszillators unter bestimmten Voraussetzungen von der Kreisfrequenz ω des Erregers nach $\hat{y} = \frac{\hat{F}}{m \cdot \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ ab (siehe Seite 89). Berechne jene Kreisfrequenz des Erregers, bei der die Amplitude des Oszillators maximal ist (Resonanzkreisfrequenz).

5.90 Von einem Ort A (Abb. 5.71) ist für die Verlegung einer Wasserleitung ein Graben zuerst längs einer geradlinig verlaufenden Straße und dann durch schwieriges Gelände zu einem Ort B zu legen. Die Grabungskosten im Gelände werden pro Laufmeter als doppelt so hoch wie längs der Straße veranschlagt. Wie lang soll längs der Straße gegraben werden?

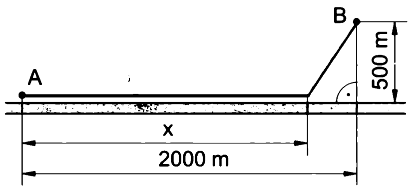


Abb. 5.71

5.91 Die Kosten für die Herstellung eines bestimmten elektronischen Bauteils betragen $K(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}023 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3300,\ 0 \leq x \leq 2000$ Stück.

a) Bei welcher Stückzahl x sind die Grenzkosten am geringsten?

b) Pro Bauteil kann ein Preis € 15,– erzielt werden. Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn am größten?

5.92 Ein Unternehmen stellt PKW-Anhänger her. Die Kosten betragen:

$K(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 2{,}5 \cdot x^2 + 25 \cdot x + 10, \quad 0 \leqslant x \leqslant 20$ (Geldeinheit = 100 €).

a) Bei welcher Stückzahl x sind die Grenzkosten am geringsten?

b) Auf Grund von Marktbeobachtungen wird festgestellt, dass die Anzahl x der wöchentlich verkauften Anhänger mit steigendem Preis p sinkt. Dabei wird der lineare Zusammenhang $x = 30 - 1{,}25\,p$ vermutet. Welche Anzahl x von Anhängern müsste das Unternehmen herstellen, um den Gewinn zu maximieren?

5.93 Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 14x^2 + 90x + 145$.

a) Bei welcher Stückzahl sind die Grenzkosten am geringsten?

b) Bei welcher Stückzahl ist der Erlös, bei welcher der Gewinn am größten, wenn zwischen Preis und abgesetzter Warenmenge x die Beziehung $p = 155 - 9x$ angenommen wird?

5.94 Ein Unternehmen stellte fest, dass die Anzahl x der verkauften Stück eines bestimmten Artikels linear mit steigendem Stückpreis sinkt. Im Besonderen wurden bei einem Stückpreis von € 10,– noch 4000 Stück verkauft, während es bei einem Stückpreis von € 15,– nur noch 3000 Stück waren. Bei welcher Stückzahl ist der Erlös größtmöglich?

5.95 Aus einem Baumstamm (Abb. 5.72) mit kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser *d*) soll ein Balken mit der Breite *b* und der Höhe *h* so herausgeschnitten werden, dass seine Tragfähigkeit maximal ist. Dies ist der Fall, wenn das Widerstandsmoment $W = \frac{1}{6} b\, h^2$ größtmöglich ist. In welchem Verhältnis stehen dabei b und h zueinander?

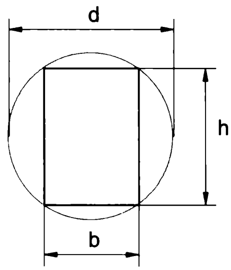


Abb. 5.72

5.96 Die PELTON-Turbine besitzt ein Laufrad, an dessen Umfang becherartige Schaufeln angebracht sind. Ein durch eine Düse austretender Wasserstrahl trifft mit der Geschwindigkeit *w* auf diese Schaufeln und gibt dabei seine kinetische Energie an das Laufrad ab. Das Laufrad hat im Schaufelbereich eine Umfangsgeschwindigkeit *u*. Für die abgegebene Leistung *P* des Wasserstrahls gilt: $P = \rho A\,(1 - \cos\alpha)\, w\,(w - u)\, u$. Dabei ist ρ die Dichte des Wassers, *A* der Austrittsquerschnitt der Düse und α der Umlenkungswinkel des Wasserstrahls. Für welche Umfangsgeschwindigkeit *u* ist *P* am größten?

5.97 An welcher Stelle $x \in [0, L]$ ist das Biegemoment $M(x)$ eines Balkens mit zwei Stützen im Abstand *L* am größten (gefährdeter Querschnitt), wenn

a) $M(x) = \frac{q}{2} \cdot (L - x) \cdot x$ (konstante Streckenlast *q*),

b) $M(x) = \frac{q}{6} \cdot x \cdot \left(L - \frac{x^2}{L}\right)$ (Dreieckslast, die von 0 auf den Wert *q* linear ansteigt).

Dabei ist x der Abstand vom linken Auflager.

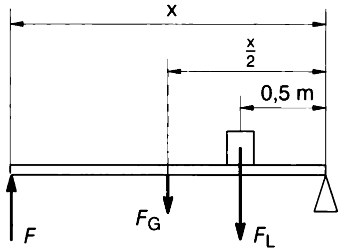


Abb. 5.73

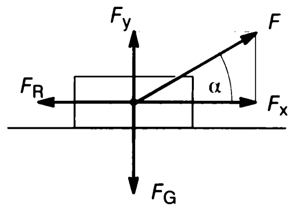


Abb. 5.74

5.98 Eine Last $F_L = 3000$ N liegt auf einem Träger mit 200 N Gewicht pro m (Abb. 5.73). Wie lange sollte der Träger sein, um mit minimalem Kraftaufwand F die Last zu heben?

5.99 Ein Körper der Masse m (Abb. 5.74) wird auf einer waagrechten Fläche mit der Gleitreibungszahl $\mu = 0{,}3$ mit der Zugkraft F gleichförmig fortbewegt. Welchen Winkel α muss die Kraft F mit der waagrechten Fläche einschließen, damit F kleinstmöglich ist?
Hinweis: Es muss gelten: $F_x = -F_R$ mit $F_R = \mu \cdot (F_G - F_y)$, wobei F_x und F_y durch F ausgedrückt werden. $F_G = m \cdot g$.

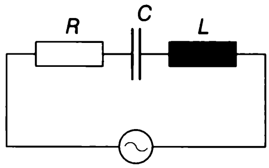


Abb. 5.75

5.100 In einem Wechselstromkreis (Abb. 5.75) sind ein OHM'scher Widerstand R, eine Induktivität L und eine Kapazität C in Serie geschaltet. Beim Anlegen einer sinusförmigen Wechselspannung mit dem Effektivwert U und der Kreisfrequenz ω fließt ein Wechselstrom mit dem Effektivwert $I = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$. Bei welcher Kreisfrequenz ω ist I am größten? Löse

a) mit Hilfe der Differentialrechung (*Hinweis:* Überlege eine Vereinfachung der Zielfunktion),

b) durch eine Überlegung, für welches ω der Nenner am kleinsten und daher der Bruch am größten ist.

5.101 Der Wirkungsgrad eines Transformators ist durch $\varphi = \dfrac{P}{250\text{W} + P + 6 \cdot 10^{-5}\text{W}^{-1} \cdot P^2}$ gegeben, wobei $P \geqslant 0$ W die vom Tranformator abgegebene Leistung ist. Bei welcher Leistung ist der Wirkungsgrad am größten?

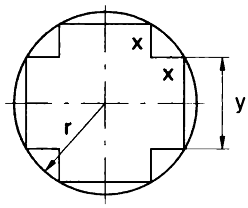


Abb. 5.76

5.102 Eine Transformatorspule (Abb. 5.76) besitzt einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius r. Dieser soll durch einen kreuzförmigen Eisenkern weitestgehend ausgefüllt werden. Wie viel Prozent der Kreisfläche können erreicht werden?

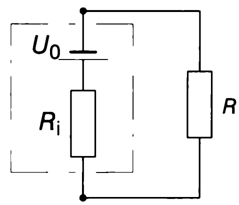


Abb. 5.77

5.103 An einer Gleichspannungsquelle (Abb. 5.77) mit der Quellenspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i wird ein Verbraucher mit dem Widerstand R angelegt. Seine Leistungsaufnahme beträgt $P(R) = U_0^2 \dfrac{R}{(R + R_i)^2}$. Ermittle jenen Wert R, bei dem die größtmögliche Leistung aufgenommen wird.

6 Integralrechnung

Die Berechnung von Bogenlängen, Schwerpunkten und Trägheitsmomenten, der Arbeit und des Effektivwertes eines elektrischen Wechselstromes, der Bahnkurven von Satelliten, des Zeitverhaltens von Schwingungen oder der Zuverlässigkeit von Bauteilen kann mit Hilfe der Integralrechnung erfolgen. Alle diese Fragestellungen lassen sich auf eine Grundaufgabe zurückführen: *die Bestimmung des Flächeninhaltes von krummlinig begrenzten Flächen*. Dabei zeigt sich die überraschende Tatsache, dass die Integralrechnung direkt auf die Umkehrung des Differenzierens führt.

6.1 Bestimmtes Integral als Flächeninhalt

Beispiel 6.1 : Einführendes Beispiel

Ein anfänglich leerer Behälter wird durch einen Zufluss, dessen Stärke beliebig geändert werden kann, mit Wasser gefüllt. Der Behälter besitzt ferner eine Abflussmöglichkeit von gleichbleibend 100 l pro Minute.

a) Der Zufluss hat 5 Minuten lang die konstante Stärke $i = 200\ l/\text{min}$. Danach wird der Zufluss beendet und der Abfluss für 5 Minuten geöffnet.

b) Die Zuflussstärke $i(t)$ wird von 0 l/min nach der Beziehung $i(t) = 20 \cdot t^2$ gesteigert, wobei t die Zeit in Minuten ist. Nach 5 Minuten wird der Zufluss eingestellt und der Abfluss wieder für 5 Minuten geöffnet.

Wie groß ist danach die Wassermenge im Behälter?

Lösung

Wir treffen die Vereinbarung, dass ein zufließender Wasserstrom positiv, ein abfließender Wasserstrom negativ genommen wird.

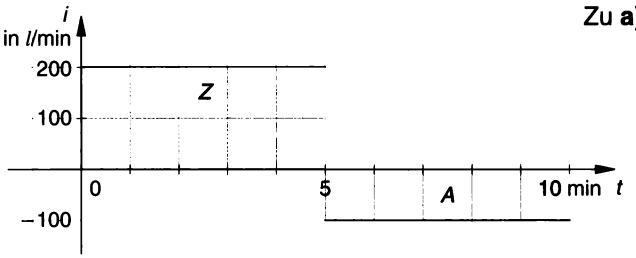


Abb. 6.1 Zu- und Abflussmenge als Flächen

Zu **a)** Zufließende Wassermenge:

$Z = 200\ \frac{l}{\text{min}} \cdot 5\ \text{min} = 1000\ l$

(Inhalt der rot markierten Fläche).

Abfließende Wassermenge:

$A = -100\ \frac{l}{\text{min}} \cdot 5\ \text{min} = -500\ l$

($|A|$ ist der Inhalt der blau markierten Fläche).

Danach beträgt die Wassermenge im Behälter: $V = Z + A = 1000\ l + (-500\ l) = 500\ l$.

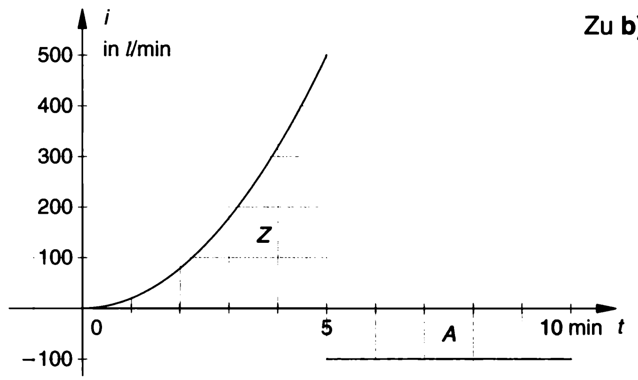


Abb. 6.2 Zu- und Abflussmenge als Flächen bei steigendem Zufluss

Zu **b)** Die Berechnung von Z ist mit den uns bisher bekannten Möglichkeiten nicht mehr genau möglich. Der entsprechende Flächeninhalt kann jedoch näherungsweise berechnet werden, wenn man die rot markierte Fläche durch Rechtecke (Abb. 6.3) ersetzt. Als ihre Breite wählen wir 1 min; ihre Höhen sollen mit dem jeweiligen Funktionswert im Mittelpunkt der Rechtecksbreite übereinstimmen.

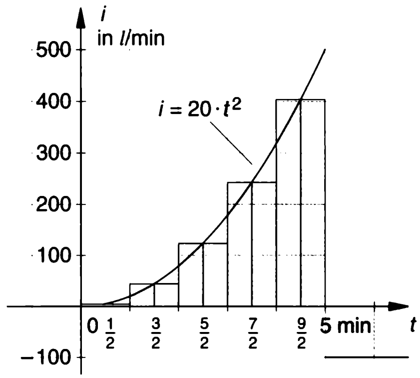


Abb. 6.3 Näherung durch Rechteckflächen

Wir könnten genauso gut Rechtecke wählen, deren Höhen mit dem jeweiligen Funktionswert am linken Randpunkt oder auch am rechten Randpunkt der unteren Rechtecksseite übereinstimmen. Ebenso könnte man zur Näherung statt der Rechtecke Trapeze verwenden.

Dadurch ergibt sich näherungsweise für die Zuflussmenge Z (in Liter):

$$Z \approx 1 \cdot 20\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot 20\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 \cdot 20\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 \cdot 20\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1 \cdot 20\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{20}{4} \cdot (1 + 9 + 25 + 49 + 81) = 825$$

Die Berechnung der Zuflussmenge Z wird umso genauer, je kleiner die Breite der Rechtecke ist.

Damit beträgt die Wassermenge im Becken nach 10 Minuten:
$V = Z + A \approx 825\ l + (-500\ l) = 325\ l.$

Flächeninhalte sind nichtnegative Größen. Es kann jedoch zweckmäßig sein, Flächeninhalten ein Vorzeichen zu geben: Flächeninhalte von Flächen oberhalb der x-Achse werden mit einem *positiven* und unterhalb der x-Achse mit einem *negativen* Vorzeichen versehen. Tut man dies, so spricht man von **orientierten** Flächeninhalten.

Für das Beispiel 6.1 bringt dies eine einfachere Sprechweise. Man kann nun sagen, dass die in 5 min abgeflossene Wassermenge A gleich einem orientierten Flächeninhalt ist, nämlich gleich $-500\ l$ und dass weiterhin die gesamte Wassermenge gleich der Summe der orientierten Flächeninhalte A und Z ist.

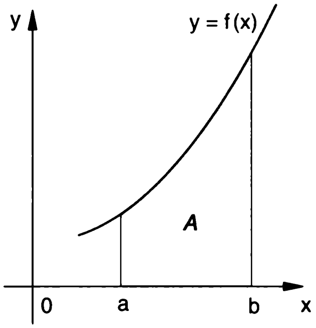


Abb. 6.4 Flächeninhalt A unter einem Funktionsgraphen

Wir betrachten nun die Aufgabe der Flächeninhaltsberechnung allgemeiner. Dazu setzen wir vorerst eine im Intervall $[a, b]$ *monoton steigende* stetige Funktion $y = f(x)$ mit positiven Funktionswerten voraus. Gesucht ist der Inhalt A der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse zwischen a und b.

Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle gleicher Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Die dadurch entstehenden Randpunkte der Teilintervalle sind $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$. Über den Teilintervallen werden Rechtecke nach Abb. 6.5 und Abb. 6.6 gebildet. Man erhält auf diese Weise Rechtecke, die den Flächenstreifen über den Teilintervallen *eingeschrieben* bzw. *umgeschrieben* sind. Der Flächeninhalt aller eingeschriebenen Rechtecke über dem Intervall $[a, b]$ ist eine untere Schranke des gesuchten Flächeninhaltes und heißt daher **Untersumme** U_n der Funktion $y = f(x)$ bezüglich der gegebenen Intervallzerlegung. Entsprechend ist der Flächeninhalt aller umgeschriebenen Rechtecke eine obere Schranke des gesuchten Flächeninhaltes, die **Obersumme** O_n genannt wird.

Für die Untersumme U_n (Abb. 6.5) gilt: Die Höhen der Rechtecke sind gleich den Funktionswerten am linken Rand der jeweiligen Teilintervalle.

$$U_n = \Delta x \cdot [f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})] = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

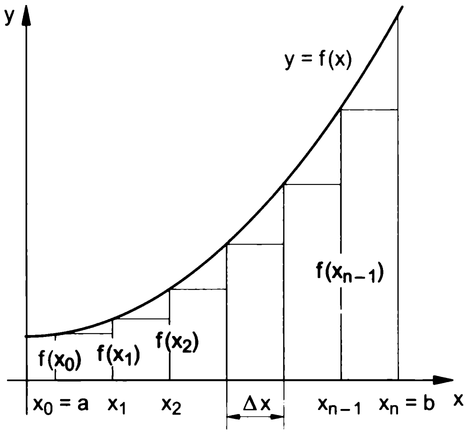


Abb. 6.5 Untersumme

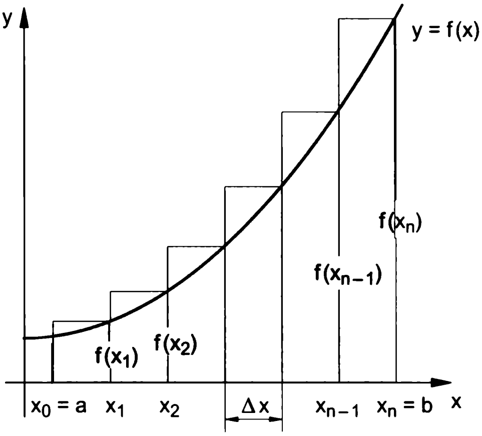


Abb. 6.6 Obersumme

Für die Obersumme O_n (Abb. 6.6) gilt: Die Höhen der Rechtecke sind gleich den Funktionswerten am rechten Rand der jeweiligen Teilintervalle.

$$O_n = \Delta x \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Es gilt: $U_n \leqslant A \leqslant O_n$.

Beispiel 6.2 : Unter- und Obersumme

Ermittle die Unter- und Obersumme der Funktion $y = \frac{1}{2}x^2$ im Intervall $[0, 2]$ für eine Zerlegung des Intervalles in $n = 4$ gleichbreite Teilintervalle.

Lösung

Breite der Teilintervalle: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$.

Untersumme $U_n = \Delta x \cdot [f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})] = \frac{1}{2}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right] =$

$= \frac{1}{2}[0{,}5 \cdot 0^2 + 0{,}5 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}5 \cdot 1^2 + 0{,}5 \cdot 1{,}5^2] = 0{,}875.$

Obersumme $O_n = \Delta x \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right] =$

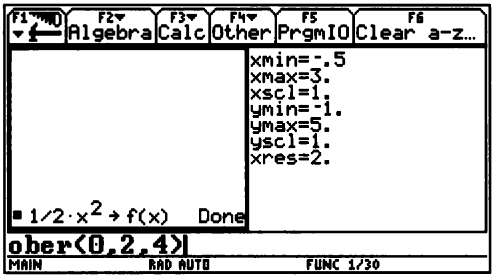
$= \frac{1}{2}[0{,}5 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}5 \cdot 1^2 + 0{,}5 \cdot 1{,}5^2 + 0{,}5 \cdot 2^2] = 1{,}875.$

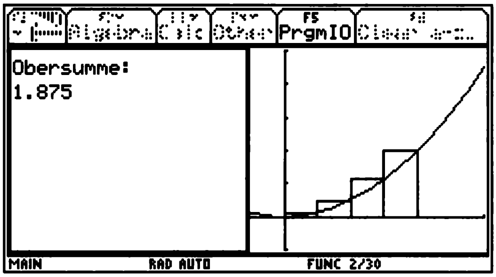
Bestimme die Untersumme und Obersumme auch für $n = 2$ und $n = 8$. Man erhält:
$U_2 = 0{,}500$ und $O_2 = 2{,}500$ bzw. $U_8 = 1{,}094$ und $O_8 = 1{,}594$.
Wächst die Anzahl n der Teilintervalle über alle Schranken (d.h. $\Delta x \to 0$), so werden sich die Unter- und die Obersummen erwartungsgemäß dem gesuchten Flächeninhalt A beliebig nähern.

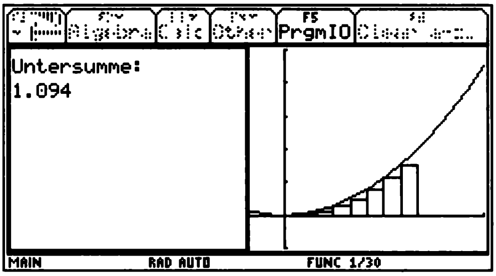
Voyage 200

Das folgende einfache Programm zeichnet für eine monoton steigende Funktion die Rechtecke einer Obersumme und berechnet diese. Die Funktion $y = 1/2x^2$ wird unter f(x) abgespeichert: 1/2*x^2 → f(x). Der Bildschirm wird geteilt (im MODE-Menü: **F2** Split Screen LEFT-RIGHT) und der Zeichenbereich festgelegt.

Mit *ober (0, 2, 4)* **ENTER** wird das Programm gestartet. Mit **F5** kann zwischen dem Ausgangsbildschirm und dem Programm-IO-Bildschirm gewechselt werden.








```
Ober(a,b,n)
Prgm
ClrIO
ClrGraph
Local d,i,sn
(b-a)/n→d
Graph f(x)
0→sn
For i, 0, n-1
   Line a+i*d,0,a+i*d,f(a+(i+1)*d)
   Line a+(i+1)*d, 0, a+(i+1)*d,f(a+(i+1)*d)
   Line a+i*d,f(a+(i+1)*d), a+(i+1)*d, f(a+(i+1)*d)
   sn+d*f(a+(i+1)*d) →sn
EndFor
Disp "Obersumme:"
Disp sn
EndPrgm
```

Für ein Programm zur Berechnung der Untersumme braucht nur f(a+(i+1)*d) überall durch f(a+i*d) ersetzt werden. Ist die Funktion y = f(x) monoton fallend, so berechnet das Programm "ober" die Untersumme und das Programm "unter" die Obersumme.

Bestimmtes Integral

Es sei $y = f(x)$ eine Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert und beschränkt ist. Man zerlegt nun das Intervall $[a, b]$ in n gleich breite Teilintervalle und bildet für diese Zerlegung die Obersumme O_n und die Untersumme U_n. Existiert dann für $n \to \infty$ sowohl der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ der Folge der Untersummen als auch der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} O_n$ der Folge der Obersummen *und* stimmen diese Grenzwerte überein, so heißt die Funktion $y = f(x)$ **integrierbar** auf $[a, b]$. Der gemeinsame Grenzwert wird **bestimmtes Integral** von $y = f(x)$ auf $[a, b]$ genannt.

Man schreibt: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} U_n \quad (= \lim\limits_{n\to\infty} O_n).$

Bezeichnungen: f(x) .... **Integrand**
x .... **Integrationsvariable**
a, b .... **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**
[a, b] .... **Integrationsintervall**

Anmerkungen:

(1) **Integrierbar** sind, was nicht weiter begründet wird, vor allem die **stetigen Funktionen** und auch die stückweise stetigen Funktionen. Für die Integrierbarkeit einer Funktion bestehen weniger strenge Forderungen als für die Differenzierbarkeit.

(2) *Geometrische Deutung:* Das **bestimmte Integral** von $y = f(x)$ auf $[a, b]$ ist der orientierte **Flächeninhalt** der Fläche zwischen dem Graphen von $y = f(x)$ und der x-Achse von $x = a$ bis $x = b$.

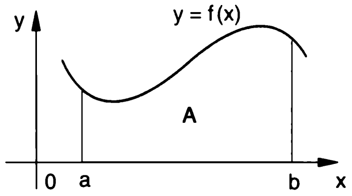


Abb. 6.7

Ist $f(x) \geqslant 0$ in $[a, b]$, so ist $\int\limits_a^b f(x)\, dx = A$; das Integral ist gleich dem Flächeninhalt A (Abb. 6.7). Ist $f(x) \leqslant 0$ in $[a, b]$, so ist das Integral negativ, sein absoluter Wert jedoch gleich dem Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse.

(3) Ist eine Funktion $y = f(x)$ integrierbar, kann nach einer Zerlegung des Integrationsintervalles in n Teilintervalle *jeder* Funktionswert in einem Teilintervall als Höhe eines Rechtecks genommen werden: stets erhält man im Grenzfall $n \to \infty$ als Grenzwert $\int\limits_a^b f(x)\, dx$. So wurden im Beispiel 6.1 die Funktionswerte in der Mitte der Teilintervalle genommen.

(4) In der Formulierung als Grenzwert der Untersummen gilt: $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)\, \Delta x.$

Daraus leitet sich historisch die Schreibung eines bestimmten Integrals her. Das Integralzeichen $\int$ ist ein in die Länge gezogenes S; es erinnert, dass das Integral der Grenzwert einer Summe ist.

(5) Die Integrationsvariable kann beliebig bezeichnet werden:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b f(t)\, dt = \int\limits_a^b f(u)\, du = \ldots$$

(6) Das bestimmte Integral ist als *Grenzwert einer Produktsumme* definiert (woraus sich die geometrische Deutung als Flächeninhalt ergibt). Viele physikalische Größen werden als solche Grenzwerte und damit als Integrale definiert.

(7) Das besprochene Integral, das sogenannte RIEMANN[11]-Integral, ist der einfachste, aber für die Anwendungen wichtigste Integralbegriff. Es gibt noch andere Integralbegriffe.

[11] Bernhard RIEMANN, 1826 – 1866, deutscher Mathematiker

Beispiel 6.3 : Stückweise Integration

Ermittle das bestimmte Integral auf [1, 8] der in der Abb. 6.8 dargestellten Funktion.

Lösung

Wir führen die Berechnung des Flächeninhaltes in 2 Schritten aus: im Intervall [1, 4] und im Intervall [4, 8].

$$A_1 = \frac{4-1}{2} \cdot (6+2) = 12;$$

$$A_2 = (8-4) \cdot 4 = 16;$$

$$\int_1^8 f(x)\ dx = A_1 + A_2 = 28.$$

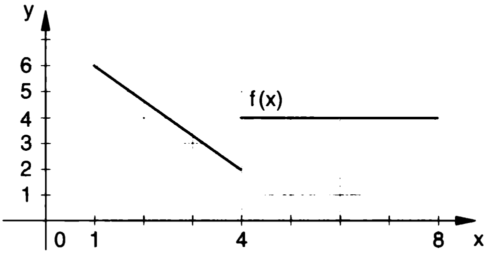


Abb. 6.8 Stückweise Integration

In Beispiel 6.3 wurde die Integration nach einer Zerlegung des Integrationsintervalles vorgenommen. Allgemein gilt:

Stückweise Integration nach Zerlegung des Integrationsintervalls:

Für $a < c < b$ gilt: $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$

Beispiel 6.4 : Bestimmtes Integral als Summe von orientierten Flächeninhalten

Bestimme das Integral $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\ dx$ der in Abb. 6.9 dargestellten Funktion.

Lösung

Wir zerlegen das Integrationsintervall [−2, 4] in drei Intervalle und berechnen auf diesen Intervallen elementargeometrisch die orientierten Inhalte der Dreiecksflächen.

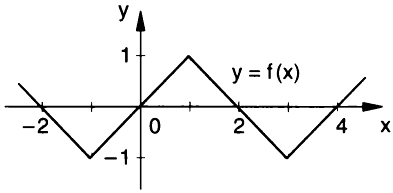


Abb. 6.9 Orientierte Flächeninhalte

$$\int_{-2}^{4} f(x)\ dx = \int_{-2}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{2} f(x)\ dx + \int_{2}^{4} f(x)\ dx = -1 + 1 - 1 = -1.$$

Noch zwei naheliegende Definitionen:

1) $\displaystyle\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$ Vertauschen der Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel.

2) $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0$

Beispiel 6.5 : Integral als Grenzwert der Unter- bzw. Obersummen

Berechne das bestimmte Integral $\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx$ als Grenzwert der Untersummen sowie der Obersummen der Funktion.

Lösung

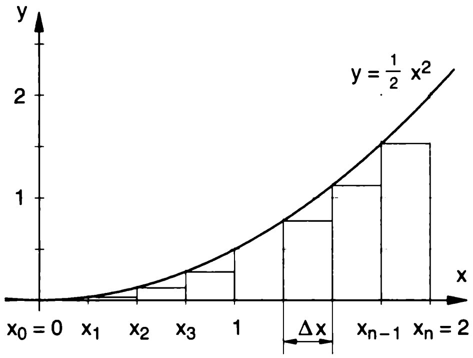


Abb. 6.10 Untersumme

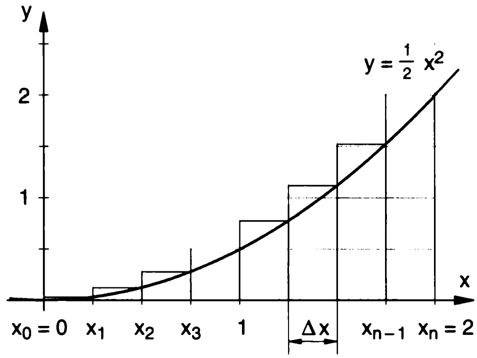


Abb. 6.11 Obersumme

Das Intervall $[0, 2]$ wird in n gleich breite Streifen mit der Breite $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ zerlegt. Die Teilungspunkte lauten:

$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{2}{n},\ x_2 = 2 \cdot \frac{2}{n},\ x_3 = 3 \cdot \frac{2}{n},\ \ldots,\ x_{n-1} = (n-1) \cdot \frac{2}{n},\ x_n = 2$

Für eine *Untersumme* U_n einer monoton steigenden Funktion sind die Rechteckshöhen die Funktionswerte am linken Rand der Teilintervalle.

$$\begin{aligned}
U_n &= f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x = \\
&= \Delta x\,[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})] = \\
&= \Delta x \left[\frac{1}{2} \cdot x_0^2 + \frac{1}{2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot x_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} \cdot x_{n-1}^2\right] = \\
&= \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[0^2 + 1^2 \cdot \frac{4}{n^2} + 2^2 \cdot \frac{4}{n^2} + 3^2 \cdot \frac{4}{n^2} + \ldots + (n-1)^2 \cdot \frac{4}{n^2}\right] = \\
&= \frac{4}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right].
\end{aligned}$$

Für die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis $(n-1)$ lässt sich ein "geschlossener" Term angeben: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$.

Dies entnimmt man einer Formelsammlung oder führt die Summierung mit dem TI-92 (TI-89) aus. Man erhält damit:

$$U_n = \frac{4}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3} = \frac{2}{3} \cdot \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Schließlich erhält man: $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{3} \cdot \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{4}{3}.$

Für eine *Obersumme* O_n einer monoton steigenden Funktion sind die Rechteckshöhen die Funktionswerte am rechten Rand der Teilintervalle.

$O_n = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x + f(x_n)\cdot\Delta x = \Delta x\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]$.

Die weitere Berechnung ist wie bei der Berechnung der Untersumme U_n. Man erhält:

$\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[1^2\cdot\frac{4}{n^2} + 2^2\cdot\frac{4}{n^2} + 3^2\cdot\frac{4}{n^2} + \ldots + (n-1)^2\cdot\frac{4}{n^2} + n^2\cdot\frac{4}{n^2}\right] = \frac{4}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right]$.

Wegen $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ erhält man schließlich:

$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{4}{3}$.

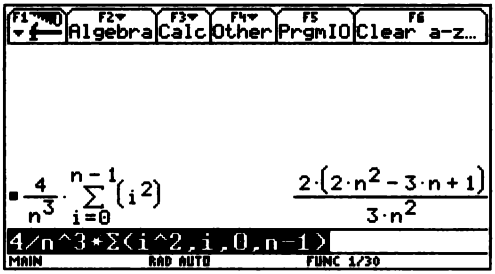
Erwartungsgemäß sind die beiden Grenzwerte gleich, da dies durch die Stetigkeit der Funktion $y = \frac{1}{2}\cdot x^2$ gesichert ist (siehe Anmerkung (1), Seite 192). Aus diesem Grund hätte die Berechnung eines der beiden Grenzwerte genügt. Somit: $\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{4}{3}$.

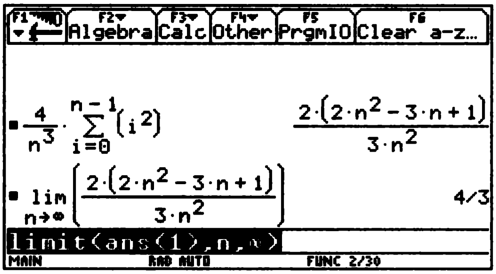
Man sieht an diesem Beispiel, dass die Berechnung bestimmter Integrale als Grenzwert der Unter- oder Obersummen aufwendig ist. Es wird daher ein Ziel sein, einen Weg zu finden, wie man Integrale einfacher bestimmen kann.

Voyage 200

Die Eingabe einer Reihe erfolgt durch: Σ (Ausdruck, Laufvariable, Anfang, Ende).Das Σ-Zeichen kann über 4 (4: Σ(sum), über das Math-Menü oder über den Catalog eingegeben werden, beim Voyage 200 auch mit 4 . Anschließend wird der Grenzwert ermittelt.

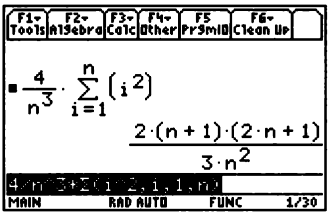
Grenzwert der Untersummen:

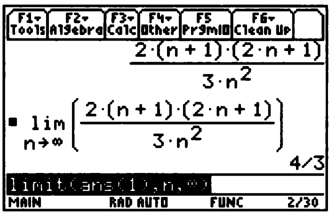




Grenzwert der Obersummen:

TI 89





Im Überblick: Bestimmtes Integral als Flächeninhalt

Es sei U_n die Untersumme und O_n die Obersumme einer Funktion $y = f(x)$ für eine Zerlegung des Intervalls [a, b] in n gleich breite Teilintervalle. Existieren dann die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} O_n$ *und* stimmen sie überein, so heißt die Funktion **integrierbar**. Der gemeinsame Grenzwert wird **bestimmtes Integral** von $y = f(x)$ auf dem Intervall [a, b] genannt.

$y = f(x)$ heißt *Integrand*, x *Integrationsvariable*, a und b sind die *Integrationsgrenzen*.

Geometrische Deutung: Das **bestimmte Integral** ist gleich dem (orientierten) **Flächeninhalt** der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse.

Stetige oder **stückweise stetige Funktionen** sind integrierbar.

Stückweise Integration bei einer Zerlegung des Integrationsintervalles [a, b]:

Ist $a < c < b$, so gilt: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$

Vereinbarungen: $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$ sowie $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

Aufgaben

6.1 Berechne die Untersumme und die Obersumme der Funktion für eine Zerlegung des Intervalls [a, b] in n Teilintervalle.

a) $y = \frac{1}{2}x + 2;\ a = 0,\ b = 2;\ n = 4$ **b)** $y = -2x + 15;\ a = 2,\ b = 5;\ n = 6$

c) $y = x^2;\ a = -3,\ b = 0;\ n = 5$ **d)** $y = x^3;\ a = 0,\ b = 2;\ n = 4$

6.2 Ermittle das bestimmte Integral (fertige eine Skizze an!):

a) $\int\limits_{-1}^{3}(2x - 1)\,dx$ **b)** $\int\limits_{-3}^{0}\left(-\frac{2}{3}x + 4\right)dx$ **c)** $\int\limits_{2}^{3}\left(\frac{4}{3}x - 1\right)dx$ **d)** $\int\limits_{1}^{3}\left(-\frac{2}{3}x - 1\right)dx$

6.3 Die Funktion $y = f(x)$ ist abschnittsweise definiert. Zeichne die Funktion $y = f(x)$ und ermittle das bestimmte Integral im gesamten Definitionsbereich:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } -2 \leq x < 0 \\ 4 & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ -x - 4 & \text{für } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

6.4 Berechne das Integral als Grenzwert der Untersummen:

a) $\int\limits_0^2 2x^2\,dx$ **b)** $\int\limits_0^2 \left(1 + x^2\right)dx$ **c)** $\int\limits_0^2 \left(x + x^2\right)dx$ **d)** $\int\limits_0^2 x^3\,dx$

Hinweis zu d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 \cdot n^2}{4}$

6.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

6.2.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Es sei $f(x)$ eine auf einem Intervall I gegebene Funktion. Unter einer **Stammfunktion** von $f(x)$ versteht man eine Funktion $F(x)$ auf I, für die $F'(x) = f(x)$.
Das Aufsuchen einer Stammfunktion heißt **Integrieren**.

Beispiel 6.6 : Ermitteln einer Stammfunktion

Ermittle eine Stammfunktion von $f(x) = x^2 + 1$.

Lösung

Gesucht ist eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung $F'(x) = x^2 + 1$ ist. Da $\left(\frac{x^3}{3} + x\right)' = x^2 + 1$, ist $F_1(x) = \frac{x^3}{3} + x$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Aber auch $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + x + 4$ oder $F_3(x) = \frac{x^3}{3} + x - 1$ sind Stammfunktionen von $f(x)$, da auch $F_2'(x) = x^2 + 1$ und $F_3'(x) = x^2 + 1$ ist.

$$y = x^2 + 1 \;\underset{\text{differenzieren}}{\overset{\text{integrieren}}{\rightleftarrows}}\; y = \frac{x^3}{3} + x + C$$

(C beliebige Konstante)

Abb. 6.12 Integrieren als Umkehrung des Differenzierens

Ist von einer Funktion $F(x)$ die Ableitung $F'(x) = f(x)$ bekannt, so ist das Integrieren[12] das Wiederherstellen der "unversehrten", noch nicht abgeleiteten Funktion $F(x)$. **Integrieren ist also die Umkehraufgabe des Differenzierens.**

Wie viele Stammfunktionen besitzt eine Funktion? Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $G(x) = F(x) + C$ mit einer beliebigen Konstanten C eine Stammfunktion von $f(x)$. Denn: $G'(x) = (F(x) + C)'$. Es gibt also unendlich viele Stammfunktionen zu einer Funktion $f(x)$, die sich von einer speziellen Stammfunktion nur durch Addition einer Konstanten unterscheiden.

Darüber hinaus gibt es allerdings keine weiteren Stammfunktionen, denn es gilt der folgende Satz:

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist *jede* weitere Stammfunktion $G(x)$ von $f(x)$ in der Form $G(x) = F(x) + C$ darstellbar.

Denn sind $G(x)$ und $F(x)$ zwei beliebige Stammfunktionen von $f(x)$, so gilt:

$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$

für alle x des betrachteten Intervalls. Die Ableitung einer konstanten Funktion ist null. Es gilt aber auch, was nicht näher begründet wird, die Umkehrung: Aus $(G(x) - F(x))'$ ist identisch null folgt, dass $G(x) - F(x)$ konstant ist, also $G(x) = F(x) + C$ ist.

[12] integer (lat.), ganz, unversehrt

Unbestimmtes Integral

Ist F(x) irgendeine Stammfunktion von f(x), so bezeichnet man die Menge *aller* Stammfunktionen von f(x) als das **unbestimmte Integral** der Funktion f(x).

Man schreibt: $\int f(x)\, dx = F(x) + C$.

f(x) heißt **Integrand**, x die **Integrationsvariable** und C die **Integrationskonstante**.

Anmerkungen:

(1) Im Gegensatz zum unbestimmten Integral $\int f(x)\, dx$, also einer *Menge von Funktionen*, ist das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ eine *Zahl*.

(2) Die Integrationskonstante darf nicht weggelassen werden, wenn das unbestimmte Integral verlangt wird! Gibt man C einen speziellen Wert, so erhält man die zu dieser Konstante gehörige Stammfunktion. Diese wird bei Anwendungsaufgaben oft auch *partikuläres Integral* genannt.

(3) *Probe* für die unbestimmte Integration: $\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x)$.

Beispiel 6.7 : Graphische Darstellung eines unbestimmten Integrals

a) Stelle Stammfunktionen von f(x) = x graphisch dar.

b) Bestimme die Gleichung jener Kurve, die durch den Punkt P(2/3) geht.

Lösung

Zu **a)** $F(x) = \frac{x^2}{2}$ ist eine Stammfunktion von f(x) = x, da F'(x) = x. Daher können wir schreiben: $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$

Graphisch ist dies eine Schar von unendlich vielen Parabeln, die sich in ihren Funktionsgleichungen durch Addition einer Konstanten unterscheiden. In Abb. 6.13 sind einige Parabeln gezeichnet. Alle Parabeln sind kongruent und gehen durch Schiebung in y-Richtung ineinander über.

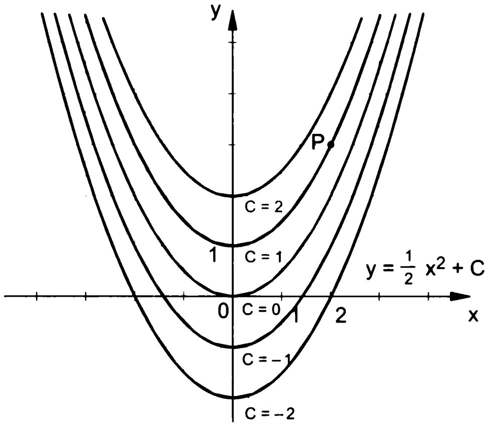
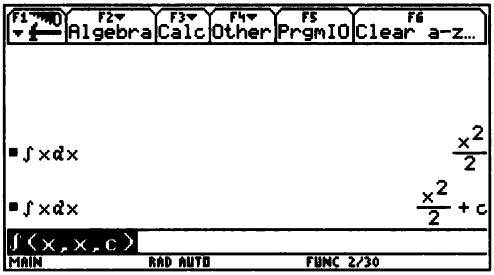
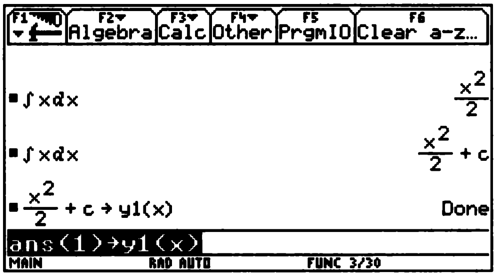


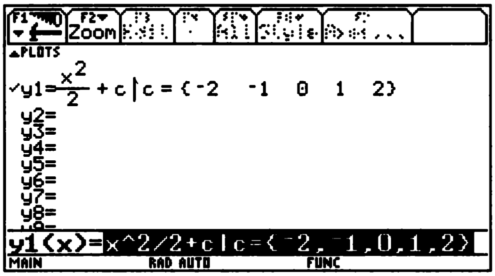
Abb. 6.13 Auswahl einer speziellen Stammfunktion durch eine Anfangsbedingung

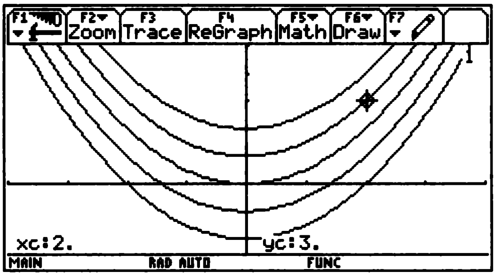
Zu **b)** Die Forderung, dass der Graph einer speziellen Stammfunktion $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + C$ durch einen vorgegebenen Punkt gehen soll, lässt sich durch eine spezielle Wahl der Konstanten C erfüllen: $F_1(2) = \frac{2^2}{2} + C = 3 \Rightarrow C = 1$. Somit lautet die gesuchte Stammfunktion: $y = F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1$. Man kann auch sagen, dass man dadurch eine Kurve aus der unendlichen Kurvenschar auswählt.

Durch 2ND 7 oder mit F3 2 (2: ∫(integrate) wird die Integration eingeleitet. Es folgt der Integrand und die Integrationsvariable. Gibt man noch eine Konstante dazu, so wird diese als Integrationskonstante hinzugefügt.









Eine Situation wie in Beispiel 6.7 b tritt bei der Lösung vieler Aufgaben ein. Dabei wird eine *einzige* Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion gesucht (etwa der zurückgelegte Weg s, wenn dessen Ableitung, die Geschwindigkeit $\dot{s}$, gegeben ist). Aus der Vielzahl der möglichen Lösungen, die sich im Wert der Integrationskonstanten unterscheiden, lässt sich nur dann eine spezielle Lösung ermitteln, wenn eine zusätzliche Bedingung vorliegt. Eine solche Bedingung heißt **Anfangsbedingung**.

Graphisch wird ein **unbestimmtes Integral** durch eine **Kurvenschar** dargestellt. Bei Wahl eines speziellen Wertes für die Integrationskonstante C wird daraus eine Kurve als Graph einer speziellen Stammfunktion (eines partikulären Integrals) ausgewählt. Die Bedingung, mit der diese Auswahl erfolgt, heißt **Anfangsbedingung**.

Beispiel 6.8 : Bedeutung der Integrationskonstanten

Ein kleiner Körper wird zum Zeitpunkt $t = 0$ s senkrecht mit der Geschwindigkeit $v_0 = 30{,}0$ m/s nach oben geworfen. Berechne die Geschwindigkeit v des Körpers 2 s nach dem Abwurf.

Lösung

Der Körper unterliegt der konstanten Fallbeschleunigung g. Da die Beschleunigung gleich $\dot{v}$, der Ableitung der Geschwindigkeit v nach der Zeit t ist, gilt für $t \geqslant 0$ s: $\dot{v} = -g$.

Das negative Vorzeichen kommt daher, dass die Geschwindigkeit v bei der Aufwärtsbewegung abnimmt, die Ableitung $\dot{v}$ also negativ sein muss. Gesucht ist eine spezielle Stammfunktion $v = v(t)$ mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$.

$v = \int (-g)\, dt = -gt + C$, da ja $(-gt + C)' = -g$ ist.

Aus dem unbestimmten Integral, der Gesamtheit aller Stammfunktionen, wird nun ein partikuläres Integral durch Festlegung der Integrationskonstante C mit Hilfe der Anfangsbedingung ausgewählt:

$v(0) = -g \cdot 0 + C = v_0 \;\Rightarrow\; C = v_0$.

Damit bekommt die Integrationskonstante C eine anschauliche Bedeutung als Anfangsgeschwindigkeit v_0. Die gesuchte spezielle Lösung lautet also: $v = v_0 - gt$. Mit den angegeben konkreten Werten und $g \approx 10\,\mathrm{m s^{-2}}$ ist für $t = 2$ s die Geschwindigkeit

$v = 30\,\mathrm{m s^{-1}} - 10\,\mathrm{m s^{-2}} \cdot 2\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m s^{-1}}$.

6.2.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Bisher wurde es als selbstverständlich angenommen, dass es zu einer Funktion f(x) eine Stammfunktion F(x) gibt. Diese Annahme soll nun für stetige Funktionen f(x) gerechtfertigt werden, indem wir eine Stammfunktion von f(x) allein aus der Voraussetzung der Stetigkeit bilden. Dazu betrachten wir das schon im Abschnitt 6.1 besprochene Problem der Flächeninhaltsbestimmung zwischen a und x bei einer stetigen Funktion. Die obere Grenze soll nun variabel sein, weshalb sie mit x bezeichnet wird. Aus diesem Grund wird die Integrationsvariable nicht mehr mit x, sondern mit t bezeichnet (Abb. 6.14).

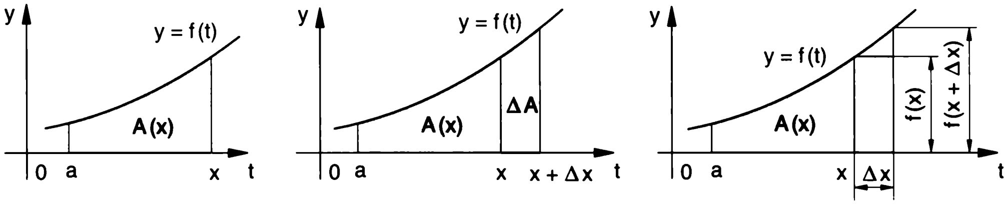


Abb. 6.14 Flächenfunktion   Abb. 6.15 Flächenzuwachs   Abb. 6.16 Abschätzung des Flächenzuwachses

$A(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ ist geometrisch gedeutet, der (orientierte) Flächeninhalt zwischen den Grenzen a und x, der nun eine Funktion der oberen Grenze x ist. Wir nennen diese Funktion **Flächenfunktion** oder **Integralfunktion** A(x). Vergrößert man die obere Grenze x um Δx (Abb. 6.15), so ändert sich A(x) um ΔA. Aus Abb. 6.16 entnimmt man eine Abschätzung von ΔA durch die Flächeninhalte zweier Rechtecke:

$f(x) \cdot \Delta x \leqslant \Delta A \leqslant f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$.

Dividiert man durch Δx, so erhält man $f(x) \leqslant \frac{\Delta A}{\Delta x} \leqslant f(x + \Delta x)$.

In dieser Ungleichung wird nun der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ausgeführt:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \leqslant \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} \leqslant \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x)$.

Wegen $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = A'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$ und $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$ folgt:

$f(x) \leqslant A'(x) \leqslant f(x)$, was bedeutet, dass $A'(x) = f(x)$ ist.

Das heißt aber gerade, dass die Flächenfunktion $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist! Da Flächenfunktionen bei stetigen Funktionen $y = f(t)$ sinnvoll gebildet werden können (siehe Anmerkung (1), Seite 192), besitzt jedenfalls eine auf einem Intervall stetige Funktion eine Stammfunktion.

Daraus folgt weiters eine elegante Möglichkeit der Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(t)\,dt$. Ist nämlich $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion einer stetigen Funktion $f(t)$, so unterscheidet sie sich nach dem Satz auf Seite 197 von der besonderen Stammfunktion $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ nur durch Addition einer Konstanten: $F(x) = A(x) + C$. Daraus folgt:

$$F(b) - F(a) = A(b) + C - [A(a) + C] = A(b) - A(a) = \int_a^b f(t)\,dt,$$

da $A(a) = \int_a^a f(t)\,dt$ gleich null ist.

Die bisherigen Überlegungen fasst der folgende fundamentale Satz zusammen:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es sei $f(t)$ eine auf einem Intervall I stetige Funktion.

a) Die Funktion $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $(a, x \in I)$ ist eine Stammfunktion von $f(t)$, d.h. $A'(x) = f(x)$.

b) Ist $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(t)$, so gilt für beliebige $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Anmerkungen:

(1) Dieser Satz verknüpft die Differential- und Integralrechnung: Jede Flächenfunktion $A(x)$ ist eine Stammfunktion und kann als solche durch "umgekehrtes Differenzieren" ermittelt werden.

(2) Existiert keine Stammfunktion von $f(x)$, was bei nicht stetigen Funktionen vorkommen kann, oder kann diese nicht ermittelt werden, so verwendet man zur Berechnung des bestimmten Integrals numerische Methoden.

Berechnung eines bestimmten Integrals unter Verwendung einer Stammfunktion

1. Bestimmung *irgendeiner* Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.
2. Mit dieser Stammfunktion berechnet man $F(a)$ und $F(b)$ und bildet die Differenz $F(b) - F(a)$, für die man abkürzend $\left[F(x)\right]_a^b$ schreibt.

Die beiden Schritte kann man bei einiger Übung auch gemeinsam durchführen.

Beispiel 6.9 : Berechnung eines bestimmten Integrals mit einer Stammfunktion

Berechne: **a)** $\int_1^3 x\,dx$ **b)** $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$

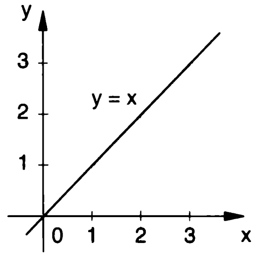


Abb. 6.17

Lösung

Zu **a)** Man überzeugt sich sofort durch Ableiten, dass $F(x) = \frac{x^2}{2}$ eine Stammfunktion von $f(x) = x$ ist.

$$\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4.$$

Es empfiehlt sich, das bestimmte Integral als Flächeninhalt (Abb. 6.17) zu deuten. Dadurch lässt sich die Rechnung kontrollieren.

Zu **b)** Als Stammfunktion $F(x)$ von $f(x) = x^2 + 1$ wählen wir $F(x) = \frac{x^3}{3} + x$ (siehe Beispiel 6.6, Seite 197).

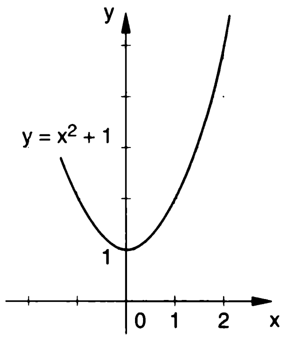


Abb. 6.18

$$\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 2\right) - \left(\frac{0^2}{3} + 0\right) = \frac{8}{3} + 2 =$$

$$= \frac{14}{3} \approx 4{,}67.$$

Abb. 6.18 zeigt die geometrische Veranschaulichung des bestimmten Integrals als Flächeninhalt, wodurch wieder eine Rechenkontrolle möglich wird.

6.2.3 Grundintegrale

Im Abschnitt 4.2 sind die Ableitungen elementarer Funktionen zusammengestellt. Durch Ableiten bestätigt man sofort die Richtigkeit der *Grundintegrale*, die in der Tabelle auf Seite 203 zusammengestellt sind. Obwohl man damit kaum eine Integrationsaufgabe unmittelbar lösen kann, bilden sie doch den Ausgangspunkt für das praktische Rechnen.

Beispiel 6.10 : Integration unter Verwendung der Grundintegrale

a) Ermittle das unbestimmte Integral $\int \sqrt{x}\,dx$ und bestätige das Ergebnis durch eine Probe.

b) Berechne das bestimmte Integral $\int_0^\pi \sin x\,dx$ und veranschauliche es geometrisch.

Lösung

Zu **a)** $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot x\sqrt{x} + C.$

Probe: $\left(\frac{2}{3} \cdot x\sqrt{x}\right)' = \left(\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$

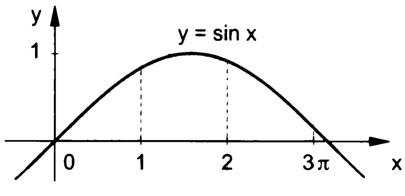


Abb. 6.19

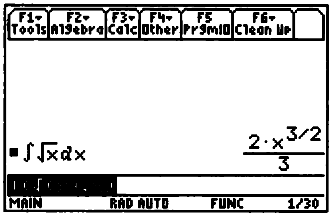
Zu **b)** Da $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$, wählen wir als Stammfunktion einfachheitshalber jene mit $C = 0$, also $F(x) = -\cos x$. Damit rechnet man:

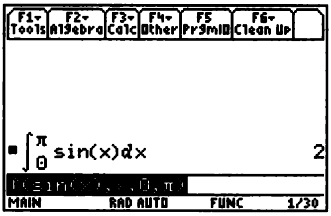
$$\int_0^\pi \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) =$$

$$= -(-1) + 1 = 2.$$

Abb. 6.19 zeigt die geometrische Veranschaulichung.

TI 89





Die Integration wird durch 2nd 7 oder mit F3 2 (2: ∫(integrate) eingeleitet. Bei der *bestimmten* Integration folgen auf die Integrationsvariable die untere sowie die obere Grenze.

Grundintegrale

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$ $\qquad$ $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \quad (x \neq 0)$

$\int e^x \, dx = e^x + C$ $\qquad$ $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ $\qquad$ $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$ $\qquad$ $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$

$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$

$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad (|x| \neq 1)$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad (|x| < 1)$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \ln \left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \quad (|x| > 1)$

Im Überblick: Hauptsatz der Differential- und Intergralrechnung

F(x) heißt **Stammfunktion** von f(x), wenn F'(x) = f(x). Das Aufsuchen einer Stammfunktion heißt **Integrieren**. Integrieren ist daher die **Umkehraufgabe** des Differenzierens. Sind F(x) und G(x) zwei beliebige Stammfunktionen von f(x), so gilt: G(x) = F(x) + C.

Die Menge *aller* Stammfunktionen von f(x) heißt **unbestimmtes Integral** von f(x). Ist F(x) eine beliebige Stammfunktion von f(x), so schreibt man: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

f(x) heißt **Integrand**, x die **Integrationsvariable** und C die **Integrationskonstante**.

Graphisch wird ein **unbestimmtes Integral** durch eine **Kurvenschar** dargestellt. Aus dieser wird durch eine **Anfangsbedingung** eine Kurve als Graph einer speziellen Stammfunktion ausgewählt.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Für eine stetige Funktion f(t) gilt:

(a) Die Funktion $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f(t).

(b) Ist F(x) eine beliebige Stammfunktion von f(t), so gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Aufgaben

6.5 Zwei verschiedene Computeralgebra-Systeme zeigen bei der unbestimmten Integration *derselben* Funktion folgende Ergebnisse an (Konstante werden hier oft weggelassen):

a) $\int f(x)\,dx = \frac{x}{x-1}$ bzw. $\int f(x)\,dx = \frac{1}{x-1}$

b) $\int f(x)\,dx = \sin^2 x$ bzw. $\int f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\cos 2x.$

Beurteile die unterschiedlichen Anzeigen.

6.6 Ermittle das unbestimmte Integral (mit Probe)

a) $\int x^3\,dx$ **b)** $\int x^5\,dx$ **c)** $\int x\,dx$ **d)** $\int 1\,dx$ **e)** $\int 0\,dx$

f) $\int \frac{1}{x}\,dx$ **g)** $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ **h)** $\int x^{-3}\,dx$ **i)** $\int x\cdot x^3\,dx$ **j)** $\int x^{-4}\cdot x^3\,dx$

6.7 Ermittle das unbestimmte Integral (mit Probe)

a) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ **c)** $\int \sqrt{\frac{1}{x}}\,dx$ **d)** $\int x\cdot\sqrt{x}\,dx$

e) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$ **f)** $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ **g)** $\int \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\,dx$ **h)** $\int x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{x}\,dx$

6.8 Ermittle das unbestimmte Integral (mit Probe)

a) $\int \sin x\,dx$ **b)** $\int \cos x\,dx$ **c)** $\int e^x\,dx$ **d)** $\int 2^x\,dx$ **e)** $\int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx$

f) $\int 4^{-x}\,dx$ **g)** $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ **h)** $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$ **i)** $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ **j)** $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

6.9 Suche jene spezielle Stammfunktion von f(x), deren Graph durch den Punkt P geht:

a) $f(x) = x^2$, P(3/10) **b)** $f(x) = \frac{1}{x^3}$, P(1/2) **c)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, P(4/5) **d)** $f(x) = e^x$, P(0/3)

e) $f(x) = \frac{1}{x}$, P(e/4) **f)** $f(x) = 2^x$, P(1/3) **g)** $f(x) = \sin x$, P(π/2) **h)** $f(x) = \sinh x$, P(−1/2)

6.10 Berechne das bestimmte Integral und veranschauliche es geometrisch:

a) $\int_1^3 x^2\,dx$ **b)** $\int_{-2}^2 x^2\,dx$ **c)** $\int_{-2}^2 t^3\,dt$ **d)** $\int_{-2}^0 x^3\,dx$ **e)** $\int_1^2 1\,dx$ **f)** $\int_1^2 x^{-3}\,dx$

g) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ **h)** $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{u}\,du$ **i)** $\int_{0,5}^1 \frac{1}{t^2}\,dt$ **j)** $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{v}}\,dv$ **k)** $\int_{0,5}^1 \sqrt[3]{t}\,dt$ **l)** $\int_{0,5}^1 \sqrt{\frac{1}{t}}\,dt$

6.11 Berechne das bestimmte Integral und veranschauliche es geometrisch:

a) $\int_{-2}^1 e^x\,dx$ **b)** $\int_1^3 2^x\,dx$ **c)** $\int_0^1 \left(\frac{1}{3}\right)^x dx$ **d)** $\int_{-1}^0 4^{-x}\,dx$

e) $\int_{-1}^0 e^{-x}\,dx$ **f)** $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ **g)** $\int_0^{2\pi} \sin t\,dt$ **h)** $\int_\pi^{2\pi} \sin t\,dt$

i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\,dt$ **j)** $\int_0^{2\pi} \cos t\,dt$ **k)** $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ **l)** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

m) $\int_0^1 \sinh x\,dx$ **n)** $\int_{-1}^1 \cosh x\,dx$ **o)** $\int_0^3 \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx$ **p)** $\int_1^2 \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx$

6.12 Berechne das bestimmte Integral und veranschauliche es geometrisch:

a) $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ **b)** $\int_0^{0,5} \frac{1}{1-x^2}\,dx$ **c)** $\int_2^3 \frac{1}{1-u^2}\,du$ **d)** $\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

e) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ **f)** $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$ **g)** $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}\,ds$ **h)** $\int_{-2}^{-4} \frac{1}{\sqrt{h^2-1}}\,dh$

6.3 Integrationsmethoden

Ziel dieses Abschnitts ist es, wichtige Methoden zur Berechnung unbestimmter Integrale kennenzulernen. Mit ihrer Hilfe ist es oft möglich, in Anwendungen auftretende Integrale auf die im vorigen Abschnitt besprochenen Grundintegrale zurückzuführen. Komplizierte Integrale werden mit algebrafähigen Taschenrechnern, Computer-Algebra-Systemen oder auch Integrationstafeln bestimmt.

Da das Integrieren stetiger Funktionen, also das Aufsuchen von Stammfunktionen, die Umkehrung des Differenzierens ist, lassen sich manche Differentiationsregeln unmittelbar in Integrationsregeln umwandeln.

6.3.1 Faktor- und Summenregel

Faktorregel: $\int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$

Ein konstanter Faktor a kann vor das Integralzeichen gesetzt werden.

Summenregel: $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Eine endliche Summe (Differenz) von Funktionen kann gliedweise integriert werden.

Die Richtigkeit dieser beiden Regeln ergibt sich sofort aus jenen der Differentialrechnung und der Definition des unbestimmten Integrals.

Beispiel 6.11 : Faktor- und Summenregel

Bestimme: **a)** $\int 2x\,dx$ **b)** $\int_1^2 \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx$ **c)** $\int (\sin x + \cos x - 1)\,dx$ **d)** $\int \frac{x^2 - x + 1}{2x}\,dx$

Lösung

Zu **a)** $\int 2x\,dx = 2 \cdot \int x\,dx = 2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + \overline{C}\right) = x^2 + C$ mit $C = 2 \cdot \overline{C}$.

Zu **b)** $\int_1^2 \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 3 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 3 \cdot \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 3 \cdot \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = 3 \cdot \left[2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}\right] =$
$= 6 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = 2{,}49.$

Hier wurden die beiden Schritte bei der Bestimmung eines bestimmten Integrals, Aufsuchen einer Stammfunktion und Bilden der Differenz der Stammfunktionswerte an der oberen und unteren Grenze, zusammengezogen.

Zu **c)** $\int (\sin x + \cos x - 1)\,dx = \int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx - \int 1\,dx =$
$= (-\cos x + C_1) + (\sin x + C_2) - (x + C_3) = -\cos x + \sin x - x + C$

Hier ist $C = C_1 + C_2 - C_3$; es genügt daher, die Integrationskonstante am Schluss der Rechnung und nicht bei jeder einzelnen Integration zu setzen.

Zu **d)** $\int \frac{x^2 - x + 1}{2x}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\int x\,dx - \int x^0\,dx + \int x^{-1}\,dx\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x|\right) + C.$

Aufgaben

Berechne die Integrale:

6.13 **a)** $\int a \cdot e^x\,dx$ **b)** $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx$ **c)** $\int 5x^0\,dx$ **d)** $\int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

e) $\int \frac{\frac{5}{3}\cos x}{2a}\,dx$ **f)** $\int \frac{1}{2x}\,dx$ **g)** $\int \frac{1}{3u^2}\,du$ **h)** $\int x \cdot \ln 2\,dx$

i) $\int x^2\sqrt{x}\,dx$ **j)** $\int \frac{b}{\cos^2 x}\,dx$ **k)** $\int \frac{1}{2s \cdot \sin^2 x}\,dx$ **l)** $\int \frac{1}{2s \cdot \sin^2 x}\,ds$

6.14 **a)** $\int (2x^3 - 4x + 5)\,dx$ **b)** $\int \left(\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}\right)dx$ **c)** $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$ **d)** $\int \frac{2t-1}{2}\,dt$

e) $\int \frac{x+3}{x}\,dx$ **f)** $\int x \cdot (x^2+1)\,dx$ **g)** $\int (t + 2e^2)\,dt$ **h)** $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx$

6.15 **a)** $\int \frac{2-x}{\sqrt{x}}\,dx$ **b)** $\int \frac{(2x+3)^2}{2x}\,dx$ **c)** $\int (1+\sqrt{x}) \cdot (x+\sqrt{x})\,dx$ **d)** $\int \frac{3}{2+2x^2}\,dx$

6.16 **a)** $\int (2u + x)\,dx$ **b)** $\int (2u + x)\,du$ **c)** $\int \frac{2x}{b+1}\,dx$ **d)** $\int \frac{2+s}{x}\,dx$

e) $\int \frac{(u+2) \cdot e^t}{1-a}\,dt$ **f)** $\int \frac{(u+2) \cdot e^t}{1-a}\,du$ **g)** $\int \left(1 - \frac{2t}{1+r^2}\right)dt$ **h)** $\int \left(1 - \frac{2t}{1+r^2}\right)dr$

6.17 **a)** $\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ **b)** $\int \left(2\frac{3}{\cos^2 x} + 1\right)dx$ **c)** $\int \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **d)** $\int \frac{1}{3\sqrt{x^2-1}}\,dx$

6.18 **a)** $\int \sqrt{2x}\,dx$ **b)** $\int \sqrt{\frac{x}{2}}\,dx$ **c)** $\int \frac{1}{\sqrt{2+2x^2}}\,dx$ **d)** $\int e^{x+1}\,dx$

e) $\int \left(\frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$ **f)** $\int \frac{\sin 2t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\,dt$ **g)** $\int \frac{\sin 2t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,dt$ **h)** $\int (1 + \tan^2 x)\,dx$

i) $\int (1 + \cot^2 t)\,dt$ **j)** $\int \frac{\cos 2t}{\cos^2 t}\,dt$ **k)** $\int \sin(t+1)\,dt$ **l)** $\int \cos(t-1)\,dt$

Hinweis zu 6.18: Forme den Integranden vorher so um, dass die Faktorregel oder die Summenregel angewendet werden kann.

6.19 Ermittle das bestimmte Integral und deute es geometrisch:

a) $\int_0^2 (2x+1)\,dx$ **b)** $\int_0^4 (4-2x)\,dx$ **c)** $\int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)dx$ **d)** $\int_1^2 \left(\frac{x+1}{x}\right)dx$

e) $\int_{-2}^{-1} 2e^x\,dx$ **f)** $\int_0^{\pi} (1 + \sin t)\,dt$ **g)** $\int_0^{\pi} (1 - \cos t)\,dt$ **h)** $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \cos x)\,dx$

6.20 Gegeben ist die Steigung einer Kurve durch **a)** $y' = 2x - 1$ **b)** $y' = x^2 + x$. Ermittle die Gleichung der Kurve mit der Anfangsbedingung $y(1) = 2$, die also durch den Punkt $P(1/2)$ geht.

6.21 Ein kleiner Körper wird zur Zeit $t = 0$ s mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 30{,}0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ aus einer Höhe $h = 10{,}0$ m senkrecht nach oben geworfen. Dann ist seine Geschwindigkeit $\dot{s} = v_0 - g \cdot t$ für Zeit $t \geqslant 0$ s, wenn $g \approx 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ die Fallbeschleunigung ist.

a) Berechne seine Höhe s zur Zeit t.

b) Bestimme seine größte Flughöhe sowie den Zeitpunkt des Auftreffens am Boden.

6.3.2 Integration durch Substitution

In den Anwendungen lassen sich manche Integrale durch Substitution (Ersetzung) eines Terms durch eine Hilfsvariable wesentlich vereinfachen, sodass sie sich danach durch Anwendung der Faktorregel oder Summenregel auf ein Grundintegral zurückführen lassen. Im Finden einer geeigneten Substitution besteht die Kunst der Integration. Wir besprechen die Substitution nur bei drei häufig auftretenden Integraltypen.

Integraltyp (Substitution u = u(x))	**Beispiele**
$\int f(ax+b)\,dx$, wobei $u = a \cdot x + b$ Lineare Substitution	$\int \frac{2}{\sqrt{3x+2}}\,dx$, $\int \sin 3t\,dt$, $\int (x+2)^6\,dx$
$\int u(x) \cdot u'(x)\,dx$ Funktion u(x) mal Ableitung u'(x)	$\int \sin x \cdot \cos x\,dx$, $\int (x^3+x)\cdot(3x^2+1)\,dx$
$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$ Zähler ist Ableitung des Nenners	$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$, $\int \frac{(-\cos x)}{\sin x}\,dx$, $\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$
$\int f[u(x)] \cdot u'(x)\,dx$ Zusammengesetzte Funktion mal innere Ableitung	$\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx$, $\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x\,dx$

Beispiel 6.12 : Integration durch Substitution

Bestimme: **a)** $\int \frac{2}{\sqrt{3x+2}}\,dx$ **b)** $\int (x^3+x)\cdot(3x^2+1)\,dx$ **c)** $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ **d)** $\int \cos^3 x\,dx$

Lösung

Zu **a)** $u(x) = 3x + 2.$

Zusätzlich ist auch das Differential dx durch das neue Differential du auszudrücken!

$u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{1}{3}\,du.$

Somit: $\int \frac{2}{\sqrt{3x+2}}\,dx = \int \frac{2}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{3}\,du = \frac{2}{3} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{2}{3} \cdot \int u^{-\frac{1}{2}}\,du.$

Damit ist der Zweck der Substitution, letztendlich ein Grundintegral zu erhalten, erreicht.

$\frac{2}{3} \cdot \int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{3}\sqrt{3x+2} + C.$

Anmerkung: Die eben durchgeführte Vorgangsweise bei einer Integration durch Substitution kann nur als gute Merkregel und nicht als strenge Begründung dienen.

Zu **b)** $u(x) = x^3 + x$; $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2+1}\,du$

$$\int u \cdot \left(3x^2 + 1\right) \cdot \frac{1}{3x^2+1}\,du = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} \cdot \left(x^3 + x\right)^2 + C.$$

Diese Aufgabe hätte man auch durch Ausmultiplizieren lösen können.

Zu **c)** Schreibt man $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$, so liegt ein Integrand in Bruchform vor, dessen Zähler die Ableitung des Nenners ist. Daher: $u(x) = x^2 + 1$.

$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}\,du.$

$$\frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{u} \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \cdot \ln|u| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|x^2 + 1\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2 + 1\right) + C.$$

Hier konnten zuletzt die Betragsstriche weggelassen werden, da der Term $x^2 + 1$ nicht negativ sein kann.

Zu **d)** Wir führen zuerst eine Umformung des Integranden durch:

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \cdot \cos x\,dx =$$
$$= \int \cos x\,dx - \int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx.$$

Da $(\sin x)' = \cos x$, liegt im 2. Integral der Typ $\int f\left[u(x)\right] \cdot u'(x)\,dx$ mit $u(x) = \sin x$ vor:

$u'(x) = \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x}\,du.$

$$\int \cos x\,dx - \int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx = \sin x - \int u^2 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}\,du = \sin x - \frac{u^3}{3} + C =$$
$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

Beispiel 6.13 : Substitution bei einem bestimmten Integral

Bestimme: $\displaystyle\int_2^4 \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) dt.$

Lösung

Zwei Wege führen zum Ziel:

(1) Die Substitution wird am bestimmten Integral vorgenommen, weshalb auch die Integrationsgrenzen geändert werden müssen:

$u(t) = -\frac{t}{2}$, $u'(t) = \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dt = -2\,du.$

Untere Grenze: $t = 2 \Rightarrow u = -\frac{2}{2} = -1$; obere Grenze: $t = 4 \Rightarrow u = -\frac{4}{2} = -2.$

$$\int_2^4 \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) dt = \int_{-1}^{-2} \left(1 - e^u\right) \cdot (-2)\,du = -2 \int_{-1}^{-2} \left(1 - e^u\right) du = -2 \cdot \left[u - e^u\right]_{-1}^{-2} =$$
$$= -2 \cdot \left[\left(-2 - e^{-2}\right) - \left(-1 - e^{-1}\right)\right] = 2 \cdot \left[2 + e^{-2} - 1 - e^{-1}\right] = 1{,}53.$$

(2) Es wird zunächst unbestimmt integriert und dabei die Substitution $u(t) = -\frac{t}{2}$ vorgenommen; die Grenzen bleiben unberücksichtigt. Erst im zweiten Schritt wird das bestimmte Integral berechnet.

$$\int\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) dt = \int(1 - e^u)(-2)\, du = -2 \cdot (u - e^u) + C = -2 \cdot \left(-\frac{t}{2} - e^{-\frac{t}{2}}\right) + C =$$
$$= \left(t + 2 \cdot e^{-\frac{t}{2}}\right) + C$$

$$\int_2^4\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) dt = \left[t + 2 \cdot e^{-\frac{t}{2}}\right]_2^4 = \left(4 + 2 \cdot e^{-2}\right) - \left(2 + 2 \cdot e^{-1}\right) = 1{,}53.$$

Aufgaben

Berechne die Integrale:

Lineare Substitutionen

6.22 **a)** $\int(1 - 3x)^3\, dx$ **b)** $\int(3 + 2x)^4\, dx$ **c)** $\int\sqrt{1 - x}\, dx$ **d)** $\int\frac{1}{\sqrt{1 - x}}\, dx$

6.23 **a)** $\int\frac{2}{2 + x}\, dx$ **b)** $\int\frac{1}{2x - t}\, dx$ **c)** $\int\frac{1}{2x - t}\, dt$ **d)** $\int\frac{2a}{a + 2x}\, dx$

6.24 **a)** $\int\frac{4}{(x - 1)^2}\, dx$ **b)** $\int\frac{1}{(2x - a)^2}\, dx$ **c)** $\int\frac{5}{\sqrt{3 + 5x}}\, dx$ **d)** $\int\frac{2}{\sqrt[3]{4x - 1}}\, dx$

6.25 **a)** $\int e^{2x+3}\, dx$ **b)** $\int e^{-x}\, dx$ **c)** $\int(e^x)^3\, dx$ **d)** $\int\left(e^{3x} - e^{-3x}\right) dx$

6.26 **a)** $\int 2 \cdot \frac{10^{x+2}}{10^{-x}}\, dx$ **b)** $\int 2a^t(a^t + 1)\ln a\, dt$ **c)** $\int\frac{1 + e^{-x}}{e^{-x}}\, dx$ **d)** $\int\sin 3t\, dt$

6.27 **a)** $\int\sin(2t - 1)\, dt$ **b)** $\int\cos(10t + \varphi)\, dt$ **c)** $\int\sin(\omega \cdot t + \varphi)\, dt$ **d)** $\int(1 - \cos 2t)\, dt$

6.28 **a)** $\int\frac{2}{\cos^2(2x + 4)}\, dx$ **b)** $\int\sinh 2t\, dt$ **c)** $\int\cosh 3t\, dt$ **d)** $\int\frac{1}{1 + 4x^2}\, dx$

6.29 **a)** $\int\frac{1}{3 + 2x^2}\, dx$ **b)** $\int\frac{3}{1 - 4x^2}\, dx$ **c)** $\int\frac{3}{3 - 8x^2}\, dx$ **d)** $\int\frac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}}\, dx$

6.30 **a)** $\int\frac{1}{\sqrt{3 - 8x^2}}\, dx$ **b)** $\int\frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}\, dx$ **c)** $\int\frac{1}{\sqrt{2 + 5x^2}}\, dx$ **d)** $\int\frac{1}{\sqrt{5x^2 - 2}}\, dx$

6.31 **a)** $\int\sin^2 x\, dx$ **b)** $\int\sin^2(5t + 1)\, dt$ **c)** $\int\cos^2 x\, dx$ **d)** $\int\cos^2(10t + 3)\, dt$

Hinweis:

Benütze die Beziehung $\sin^2\alpha = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha)$ bzw. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha)$.

6.32 **a)** $\int_0^4 \left(\frac{x}{3} - 3\right)^2 dx$ **b)** $\int_{-2,5}^1 (5 + 4x)^3 dx$ **c)** $\int_0^1 \left(\frac{2}{3} + \frac{x}{4}\right) dx$ **d)** $\int_{-3}^{-1} 2\left(\frac{x}{4} + 5\right)^3 dx$

6.33 **a)** $\int_0^4 \sqrt[3]{2 + x}\, dx$ **b)** $\int_1^2 2 \cdot \frac{1}{3 - x} dx$ **c)** $\int_{-4}^4 \frac{3}{(10 + x)^2} dx$ **d)** $\int_{-1}^{-0,5} \frac{1}{\sqrt{3 - 4x}} dx$

6.34 **a)** $\int_2^4 e^{4x-2} dx$ **b)** $\int_0^4 3^{2x-2} dx$ **c)** $\int_0^4 \sin(2x)\, dx$ **d)** $\int_0^\pi \left(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right) dt$

Weitere Substitutionen

6.35 **a)** $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$ **b)** $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$ **c)** $\int x \cdot \sqrt{1 + x^2}\, dx$ **d)** $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1 + x^2}} dx$

6.36 **a)** $\int \frac{2 \cdot e^x}{1 + e^x} dx$ **b)** $\int x \cdot e^{x^2} dx$ **c)** $\int \sin t \cdot \cos t\, dt$ **d)** $\int \sin^3 t \cdot \cos t\, dt$

6.37 **a)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$ **b)** $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ **c)** $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$ **d)** $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

6.38 **a)** $\int \sin^3 t\, dt$ **b)** $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ **c)** $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ **d)** $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx$

6.39 **a)** $\int \frac{\ln x}{x} dx$ **b)** $\int \frac{\ln 2x}{x} dx$ **c)** $\int_1^4 \frac{\ln\sqrt{x}}{x} dx$ **d)** $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

6.40 **a)** $\int_1^3 \frac{x}{3 + 2x^2} dx$ **b)** $\int \frac{2x}{3 - 8x^2} dx$ **c)** $\int \tan 3t\, dt$ **d)** $\int \tanh 3t\, dt$

6.41 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ist die Funktion, deren Graph die "obere" Kreislinie eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius 1 ist. $A = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ ist daher der Flächeninhalt eines Halbkreises mit dem Radius 1. Ermittle A mit Hilfe der Substitution $x = \sin u$.

6.3.3 Partielle Integration

Lässt sich der Integrand als Produkt schreiben, so kann die Methode der "partiellen Integration" zum Ziel führen. Wir gehen von der Produktregel der Differentialrechnung aus:

$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) \cdot v'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' - u'(x) \cdot v(x).$

Integration dieser Gleichung führt zu:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = \int [u(x) \cdot v(x)]'\,dx - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx.$$

Da $\int [u(x) \cdot v(x)]'\,dx = u(x) \cdot v(x)$ – die Integrationskonstante kann hier weggelassen werden –, ergibt sich folgende Formel:

Partielle Integration oder **Produktintegration:**

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

Kurz: $\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$

Da die Integration nicht vollständig ausgeführt wird, sondern noch ein Integral auf der rechten Seite stehen bleibt, spricht man von einer teilweisen oder partiellen Integration.

Vorgangsweise: Der Integrand f(x) des Integrals $\int f(x)\,dx$ wird in zwei Faktoren zerlegt: $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$. Dabei kann man sich von folgender Richtlinie leiten lassen: *Als u(x) wählt man den Faktor, der beim Differenzieren "einfacher" wird, als v'(x) den Faktor, der beim Integrieren nicht viel "komplizierter" wird.*

Auf diese Weise kann man hoffen, dass das verbleibende Integral $\int u' \cdot v\,dx$ einfacher als das Ausgangsintegral $\int u \cdot v'\,dx$ wird.

Beispiel 6.14 : Partielle Integration (Produktintegration)

Berechne: **a)** $\int x \cdot e^{-x}\,dx$ **b)** $\int x^2 \cdot e^{-x}\,dx$ **c)** $\int \sin^2 x\,dx$ **d)** $\int \ln x\,dx$

Lösung

Zu **a)** Wir wählen $u(x) = x$, da dieser Faktor beim Differenzieren einfacher wird: $u' = 1$.
$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$, v(x) ist nicht komplizierter geworden.

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'}\,dx = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{v}\,dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx =$$
$$= -x \cdot e^{-x} + (-e^{-x}) + C = -(x+1) \cdot e^{-x} + C.$$

Wählt man umgekehrt $u(x) = e^{-x}$ und $v' = x$, so erhält man: $u' = -e^{-x}$; $v = \frac{x^2}{2}$:

$$\int \underbrace{e^{-x}}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v'}\,dx = \underbrace{e^{-x}}_{u} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} - \int \underbrace{(-e^{-x})}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x} + \frac{1}{2}\int x^2 e^{-x}\,dx.$$

Das verbleibende Integral ist komplizierter als das Ausgangsintegral, der eingeschlagene Weg war somit nicht zielführend.

Zu **b)** $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x;\;\; v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'}\, dx = \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\left(-e^{-x}\right)}_{v} - \int \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{\left(-e^{-x}\right)}_{v}\, dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot \int x \cdot e^{-x}\, dx.$$

Das verbleibende Integral ist einfacher als das Ausgangsintegral. Zu seiner Berechnung ist eine *nochmalige* partielle Integration notwendig. Wir können dazu das Ergebnis aus a) benützen:

$$\int x^2 \cdot e^{-x}\, dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot \int x \cdot e^{-x}\, dx =$$

$$= -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot \left[-(x+1) \cdot e^{-x}\right] + C = -\left(x^2 + 2x + 2\right) \cdot e^{-x} + C.$$

Zu **c)** $\int \sin^2 x\, dx = \int \sin x \cdot \sin x\, dx.$

$u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x;\;\; v' = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$

$$\int \sin x \cdot \sin x\, dx = \sin x\,(-\cos x) - \int \cos x \cdot \left(-\cos x\right) dx =$$

$$= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x\, dx.$$

Zwar ist hier das rechts verbleibende Integral nicht einfacher als das Ausgangsintegral. Setzt man jedoch $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, so kann man noch einmal das Ausgangsintegral erhalten:

$$\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right) dx =$$

$$= -\sin x \cdot \cos x + \int 1\, dx - \int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x\, dx$$

Man erhält also schließlich die Gleichung $\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x\, dx.$

Addiert man auf beiden Seiten $\int \sin^2 x\, dx$, so ergibt sich nach Division durch 2 das

Ergebnis: $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \sin x \cdot \cos x\right) + C = \frac{1}{4} \cdot \left(2x - \sin 2x\right) + C.$

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung von $\int \sin^2 x\, dx$ ist in Aufgabe 6.31, Seite 210, angegeben.

Zu **d)** Hier wird ein Produkt gewissermaßen künstlich erzeugt:

$$\int \ln x\, dx = \int (\ln x) \cdot 1\, dx = (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx = x \cdot \ln x - \int 1\, dx =$$

$$= x \cdot \ln x - x + C = x \cdot \left(\ln x - 1\right) + C.$$

Aufgaben

Berechne:

6.42 **a)** $\int x \cdot \cos x\, dx$ **b)** $\int x \cdot \sin x\, dx$ **c)** $\int t \cdot \sin 2t\, dt$ **d)** $\int t \cdot \cos \frac{t}{5}\, dt$

6.43 **a)** $\int x \cdot e^x\, dx$ **b)** $\int_0^2 x \cdot 2^x\, dx$ **c)** $\int x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$ **d)** $\int t \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$

6.44 **a)** $\int_{-1}^{1}(3-x)e^{-2x}\,dx$ **b)** $\int_{0}^{2}\left(5-\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}\,dx$ **c)** $\int(3t+1)\,e^{t+1}\,dt$ **d)** $\int_{-1}^{1}(t+2)\,e^{-2(t+1)}\,dt$

6.45 **a)** $\int e^{2t}\sin t\,dt$ **b)** $\int e^{-4x}\cdot\sin(4x)\,dx$ **c)** $\int\frac{\cos x}{e^x}\,dx$ **d)** $\int\frac{\cos 3t}{2^t}\,dt$

6.46 **a)** $\int_{1}^{3}x\cdot\ln x\,dx$ **b)** $\int x^2\cdot\ln\sqrt{x}\,dx$ **c)** $\int x^3\cdot\lg x\,dx$ **d)** $\int\frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

6.47 **a)** $\int x^2\cdot\cos x\,dx$ **b)** $\int\frac{1}{2}x^2\cdot e^x\,dx$ **c)** $\int\left(\frac{x}{b}\right)^2\sin(ax)\,dx$ **d)** $\int_{1}^{2}x^2\cdot 2^{-x}\,dx$

6.48 **a)** $\int_{0}^{4}x^2\cdot e^{-3x}\,dx$ **b)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}x^2\cdot\sin x\,dx$ **c)** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t^2\cdot\cos\frac{t}{2}\,dt$ **d)** $\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{3}\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$

6.49 **a)** $\int\cos^2 x\,dx$ **b)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{t}{2}\,dt$ **c)** $\int_{0}^{\pi}\sin^2(\omega t+\varphi)\,dt$ **d)** $\int_{0}^{2\pi}\sin t\cdot\sin(t+1)\,dt$

Hinweis zu d) Forme sin (t + 1) mit Hilfe des 1. Summensatzes um.

6.50 **a)** $\int\arctan x\,dx$ **b)** $\int\arcsin x\,dx$ **c)** $\int\ln\frac{1}{x}\,dx$ **d)** $\int_{1}^{4}\ln\sqrt{x}\,dx$

6.3.4 Partialbruchzerlegung (Teilbruchzerlegung)

Mit dieser Methode können *echt gebrochenrationale* Funktionen integriert werden. Außerdem wird die Partialbruchzerlegung auch bei der LAPLACE-Transformation (siehe "Ingenieur-Mathematik 4") benötigt.

Was ist eine Partialbruchzerlegung? Dazu bringen wir die folgenden Brüche auf einen gemeinsamen Bruchstrich:

$$\underbrace{\frac{1}{x+3}}_{\text{Partialbruch}}+\underbrace{\frac{2}{x-2}}_{\text{Partialbruch}}=\frac{x-2+2(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\frac{3x+4}{x^2+x-6}=\frac{Z(x)}{N(x)}.$$

Den umgekehrten Vorgang bezeichnet man als Partialbruchzerlegung. Die beiden Partialbrüche (Teilbrüche) besitzen die Nenner $x+3$ und $x-2$. Dies sind die Faktoren des Nenners $N(x)$. Es kommt also darauf an, die Faktorisierung des Nenners $N(x)$ zu finden, was durch Lösung der Gleichung $N(x)=0$ erfolgt. Nach erfolgter Partialbruchzerlegung können die Summanden einzeln integriert werden.

Folgende Rechenschritte sind also notwendig:

(1) Durchführung einer Polynomdivision, wenn der rationale Integrand nicht echt gebrochen ist. Eine rationale Funktion ist echt gebrochen, wenn der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners ist.

(2) Nullstellen des Nenners bestimmen. Es ist dabei günstig, vorher den Koeffizienten der höchsten Potenz des Nennerpolynoms $N(x)$ herauszuheben.

(3) Zerlegung in Partialbrüche. Die Methode wird an einigen Beispielen gezeigt. Dass dies immer in eindeutiger Weise möglich ist, kann nicht näher begründet werden.

(4) Bestimmung der Koeffizienten der Partialbrüche.
(5) Integration der Summe der Partialbrüche.

Beispiel 6.15 : Das Nennerpolynom besitzt nur einfache reelle Nullstellen

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x-6}\,dx = ?$$

Lösung

Der Grad des Zählerpolynoms ist 1, der Grad des Nennerpolynoms ist 2; der Integrand ist daher echt gebrochenrational.

$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_{12} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2}$, $x_1 = -3$; $x_2 = 2$;

$x^2 + x - 6 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x + 3) \cdot (x - 2)$.

Ansatz für die Partialbruchzerlegung: $\dfrac{3x+4}{x^2+x-6} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-2}$.

Zur Vereinfachung wird die Gleichung mit $(x + 3) \cdot (x - 2)$ multipliziert:

$$3x + 4 = A \cdot (x - 2) + B \cdot (x + 3) \qquad (*)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten A und B gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) Die Gleichung (*) bleibt richtig, wenn man für x eine beliebige Zahl einsetzt, am besten die Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$:

$3 \cdot (-3) + 4 = A \cdot (-3 - 2) + B \cdot (-3 + 3) \quad \Rightarrow \quad A = 1$

$3 \cdot 2 + 4 \quad = A \cdot (2 - 2) + B \cdot (2 + 3) \quad \Rightarrow \quad B = 2$

(2) Die zweite Möglichkeit besteht im Koeffizientenvergleich der Polynome auf beiden Seiten der Gleichung (*):

$3 \cdot x + 4 = A \cdot x - 2A + B \cdot x + 3B$ oder $3x + 4 = (A + B) \cdot x - 2A + 3B$.

Daraus: $3 = A + B$

$4 = -2A + 3B$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist $A = 1$ und $B = 2$.

Der letzte Schritt ist die Integration:

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x-6}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-2}\right) dx = \ln|x+3| + 2\ln|x-2| + C.$$

Beispiel 6.16: Das Nennerpolynom besitzt mehrfache reelle Nullstellen

$$\int \frac{2x^2 - 13x + 27}{x^3 - 6x^2 + 9x}\,dx = ?$$

Lösung

Der Grad des Zählerpolynoms ist 2, der Grad des Nennerpolynoms ist 3; der Integrand ist daher echt gebrochenrational.

$x^3 - 6x^2 + 9x = x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0$. Daher ist $x_1 = 0$ eine Nullstelle.

$(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = 3$; 3 ist daher eine zweifache Nullstelle.

$x^3 - 6x^2 + 9x = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = x \cdot (x - 3)^2$.

Da 3 eine zweifache Nullstelle ist, lautet nun der Ansatz:

$$\frac{2x^2 - 13x + 27}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

Multiplikation mit $x \cdot (x-3)^2$ ergibt:

$$2x^2 - 13x + 27 = A \cdot (x-3)^2 + B \cdot x \cdot (x-3) + C \cdot x \qquad (*)$$

Einsetzen der Nullstellen 0 und 3 sowie eines beliebigen weiteren Wertes, etwa 1, ergibt:

$$2 \cdot 0^2 - 13 \cdot 0 + 27 = A \cdot (0-3)^2 + B \cdot 0 \cdot (0-3) + C \cdot 0 \quad \Rightarrow A = 3$$
$$2 \cdot 3^2 - 13 \cdot 3 + 27 = A \cdot (3-3)^2 + B \cdot 3 \cdot (3-3) + C \cdot 3 \quad \Rightarrow C = 2$$
$$2 \cdot 1^2 - 13 \cdot 1 + 27 = 3 \cdot (1-3)^2 + B \cdot 1 \cdot (1-3) + 2 \cdot 1 \quad \Rightarrow B = -1.$$

Damit:

$$\int \frac{2x^2 - 13x + 27}{x^3 - 6x^2 + 9x}\,dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2}\right) dx = 3\ln|x| - \ln|x-3| - \frac{2}{x-3} + C.$$

Beispiel 6.17 : Der Integrand ist nicht echt gebrochenrational

$$\int \frac{x^4 + x^3 - 7x^2 + x + 20}{x^3 + 3x^2 - x - 3}\,dx = ?$$

Lösung

Der Grad des Zahlerpolynoms ist 4, der Grad des Nennerpolynoms ist 3; der Integrand ist daher nicht echt gebrochenrational. Wir führen daher eine Polynomdivision durch:

$$(x^4 + x^3 - 7x^2 + x + 20) : (x^3 + 3x^2 - x - 3) = x - 2 + \frac{2x + 14}{x^3 + 3x^2 - x - 3}.$$

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0.$

Die Nullstelle $x_1 = 1$ kann leicht erraten werden: $1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 3 = 0$. Daher kann der Fakor $x - x_1 = x - 1$ abgespaltet werden:

$$(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x-1) = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow (x^3 + 3x^2 - x - 3) = (x-1) \cdot (x^2 + 4x + 3).$$

Zur weiteren Faktorisierung wird die quadratische Gleichung $x^2 + 4x + 3 = 0$ gelöst: Es ergibt sich: $x_2 = -3$ und $x_3 = -1$.

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet:

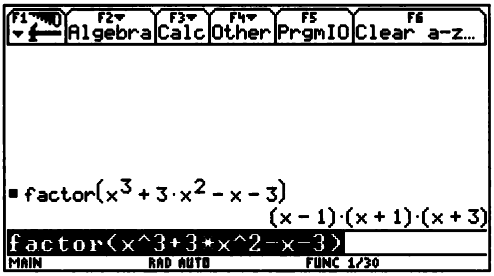
$$\frac{2x + 14}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{2x + 14}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Multiplikation der Gleichung mit $(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+3)$ ergibt:

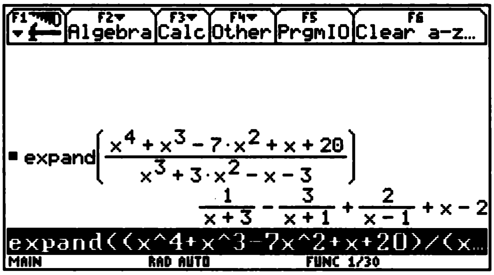
$$2x + 14 = A \cdot (x+1) \cdot (x-1) + B \cdot (x+3) \cdot (x-1) + C \cdot (x+3) \cdot (x+1).$$

Setzt man hier der Reihe nach die Nullstellen $-3, -1$ und 1 ein, so erhält man sofort: $A = 1$, $B = -3$ und $C = 2$. Damit ergibt sich schließlich:

$$\int \frac{x^4 + x^3 - 7x^2 + x + 20}{x^3 + 3x^2 - x - 3}\,dx = \int \left(x - 2 + \frac{1}{x+3} - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1}\right) dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x+3| - 3\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C$$



Aufruf durch F2 2 (2:factor). Dadurch wird eine Zerlegung eines Polynoms in reelle Polynome 1. bzw. 2. Grades erreicht (letzteres bei komplexen Nullstellen).



Aufruf durch F2 3 (3: expand).

Beispiel 6.18 : Das Nennerpolynom hat komplexe Nullstellen

$$\int \frac{5x^2 - 13x + 15}{2x^3 - 8x^2 + 10x}\, dx = ?$$

Lösung

Der Integrand ist echt gebrochenrational. $N(x) = 2 \cdot (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2 \cdot x \cdot (x^2 - 4x + 5)$.

Da $x^2 - 4x + 5$ komplexe Nullstellen hat, wird der Ansatz zur Partialbruchzerlegung wie folgt vorgenommen:

$$\frac{5x^2 - 13x + 15}{x^3 - 4x^2 + 5x} = \frac{A}{x} + \frac{B \cdot x + C}{x^2 - 4x + 5}$$ (der Faktor 2 des Nenners kann vorerst wegbleiben).

Ist der Nenner eines Partialbruches ein quadratisches Polynom, so wird für den Zähler ein Polynom 1. Grades, hier $B \cdot x + C$ angesetzt. Multiplikation der Gleichung mit $x \cdot (x^2 - 4x + 5)$ ergibt:

$5x^2 - 13x + 15 = A \cdot (x^2 - 4x + 5) + (B \cdot x + C) \cdot x$.

Einsetzen spezieller Werte für x oder hier einfacher ein Koeffizientenvergleich der Polynome auf beiden Seiten der Gleichung ergibt: $A = 3$, $B = 2$ und $C = -1$.

$$\int \frac{5x^2 - 13x + 15}{2x^3 - 8x^2 + 10x}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{3}{x}\, dx + \int \frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 5}\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 \ln|x| + \ln|x^2 - 4x + 5| + 3 \cdot \arctan(x - 2)\right) + C$$

Das zweite Integral wurde einer Integraltafel (Formelsammlung für Integrale) entnommen.

Statt $\ln|x^2 - 4x + 5|$ kann auch $\ln(x^2 - 4x + 5)$ geschrieben werden, da $x^2 - 4x + 5$ in $\mathbb{R}$ stets positiv ist.

Aufgaben

Führe die Partialbruchzerlegung durch:

6.51 **a)** $\frac{5x-1}{x^2-1}$ **b)** $\frac{4x-5}{x^2-x-2}$ **c)** $\frac{-x+8}{x^2-x-6}$ **d)** $\frac{3x-10}{2x^2+5x-12}$

6.52 **a)** $\frac{3x^2+6x+2}{x^3+3x^2+2x}$ **b)** $\frac{x^2+6x+12}{x^3+5x^2+6x}$ **c)** $\frac{x^2+4x-6}{x^3+3x^2}$ **d)** $\frac{x^2-8x-11}{x^3+6x^2+11x+6}$

6.53 **a)** $\frac{3x^2+8x+8}{x^3+4x^2+4x}$ **b)** $\frac{-2x^3+10x+12}{x^4+5x^3+6x^2}$ **c)** $\frac{x^3-7x-2}{x^4-2x^2+1}$ **d)** $\frac{4x^3-50x+60}{(x+2)\cdot(x-2)^3}$

6.54 **a)** $\frac{2x^2-x+2}{x^3-2x^2+2x}$ **b)** $\frac{6x^2+3x+13}{x^3-x^2+3x+5}$ **c)** $\frac{2x^3-18x+35}{x^4-4x^3+5x^2}$ **d)** $\frac{x^2-2x-4}{x^4+x^3-2x}$

Berechne die Integrale nach Zerlegung in Partialbrüche:

6.55 **a)** $\int \frac{x+12}{x^2-x-6}\,dx$ **b)** $\int \frac{7x-2}{2x^2+x-1}\,dx$ **c)** $\int \frac{3x^2-2x+1}{x^3-x}\,dx$

6.56 **a)** $\int \frac{4x^2-7x+2}{x^3-2x^2}\,dx$ **b)** $\int \frac{4x^2-16x+15}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx$ **c)** $\int \frac{3x^2-9x+2}{(x-2)^2\cdot(x+2)}\,dx$

6.57 **a)** $\int \frac{3x^3+5x^2+2}{x^2+2x}\,dx$ **b)** $\int \frac{4x^3-13x-15}{x^2-x-2}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^4-x^3+x-4}{x^3+x^2-2x}\,dx$

6.58 **a)** $\int \frac{x^4+2x^3+x-4}{x^3-x^2-2x}\,dx$ **b)** $\int \frac{2x^3-4x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^4-8x^3+66x-74}{(x-2)^2\cdot(x+3)}\,dx$

6.59 **a)** $\int \frac{4x^2+6x-9}{4x^3+9x}\,dx$ **b)** $\int \frac{12x^2+6x+4}{3x^3+2x}\,dx$ **c)** $\int \frac{-2x-1}{2x^4+x^2}\,dx$

6.60 **a)** $\int \frac{8x^2+26}{x^3-6x^2+13x}\,dx$ **b)** $\int \frac{2x^3-2x^2-16x+32}{x^4-4x^3+8x^2}\,dx$ **c)** $\int \frac{4x^3+49x-55}{(x+2)^2\cdot(x^2-8x+17)}\,dx$

Hinweis: Löse mit Hilfe einer Integraltafel.

Vermischte Aufgaben:

6.61 **a)** $\int \cos^4 x \cdot \frac{\sin x}{3}\,dx$ **b)** $\int_{-1}^{0} 3e^{-4x} \cdot \cos 2x\,dx$ **c)** $\int_{1}^{2} \frac{2x+4}{x^2+4}\,dx$ **d)** $\int_{-1}^{1} x^2 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}\,dx$

6.62 **a)** $\int_{1}^{2} x\sqrt{3x+1}\,dx$ **b)** $\int x^2 \cdot e^{-x}\,dx$ **c)** $\int_{-2}^{0} \frac{e^x}{e^x+3}\,dx$ **d)** $\int_{0}^{2} (3\tanh x + 2)\,dx$

Hinweis zu a) $3x + 1 = u$, $x = \frac{u-1}{3}$.

6.63 **a)** $\int \ln^2 x\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}}\,dx$ **c)** $\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx$ **d)** $\int 3x \cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx$

Hinweis zu a) partielle Integration, b) Zähler und Nenner mit $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$ multiplizieren, c) Setze $u = \sqrt{x+1}$.

Im Überblick: Integrationsmethoden

Faktorregel: $\int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$

Summenregel: $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Integration durch Substitution: Vereinfachung eines Integrals durch Substitution (Ersetzung) eines Terms durch eine Hilfsvariable mit dem Ziel, die Integration auf ein Grundintegral zurückzuführen. Von besonderer Bedeutung ist die *lineare Substitution*.

Partielle Integration oder **Produktintegration:** $\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$

Integration nach Partialbruchzerlegung: Damit kann *jede* echt gebrochenrationale Funktion integriert werden. Unecht gebrochenrationale Funktionen werden zuerst durch eine Polynomdivision in eine Summe einer Polynomfunktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion zerlegt.

6.4 Numerische Integration

Viele Funktionen besitzen Stammfunktionen, die nicht durch *elementare* Funktionen ausdrückbar sind. Beispiele dafür sind $\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$ oder $\int_1^2 \frac{1}{\sin x}\,dx$. Man sagt, dass diese Integrale nicht "geschlossen" darstellbar sind. Oft ist die Integration zwar in geschlossener Form möglich, aber zu aufwendig. In diesen Fällen verwendet man *numerische Integrationsverfahren*. Sie liefern in den angeführten Situationen den Wert des Integrals zwar im Allgemeinen nur näherungsweise, dafür aber, wenn gewünscht, beliebig genau. Eine weitere Anwendung liegt vor, wenn der Integrand nur in Form einer Wertetabelle oder als Funktionsgraph gegeben ist.

Wir nehmen im Folgenden an, dass der Funktionsgraph im betrachteten Intervall $[a, b]$ zur Gänze oberhalb der x-Achse verläuft. Weiters wird vorausgesetzt, dass das Integrationsintervall $[a, b]$ in n Teilintervalle der Breite ("Schrittweite") $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ zerlegt wird.

Statt einer gleichabständigen Stützstellenverteilung gibt es auch Verfahren, bei denen eine Stützstellenverteilung nach bestimmten Kriterien vorgenommen wird.

6.4.1 Rechtecksformeln

Die Untersumme U_n oder die Obersumme O_n zu einer Intervallzerlegung sind bereits "Rechtecksformeln" zur näherungsweisen Integration. Vorteilhafter geht man vor, wenn man, wie im Beispiel 6.1, Seite 188, Rechtecke verwendet, deren Höhe mit dem Funktionswert *in der Mitte* der Teilintervalle übereinstimmt (Abb. 6. 20).

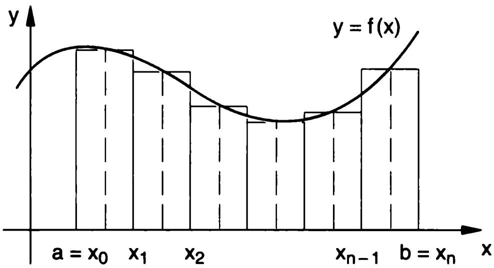


Abb. 6.20 Mittelpunktsformel

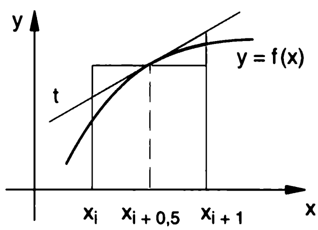


Abb. 6.21 Zum Namen "Tangentenformel"

In diesem Fall gilt: $A = \int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+0,5})$.

Dabei soll $x_{i+0,5}$ den x-Wert in der Mitte zwischen x_i und x_{i+1} bezeichnen. Diese Rechtecksformel wird als *Mittelpunktsformel* bezeichnet. Die Mittelpunktsformel heißt auch *Tangentenformel* (auch Tangententrapezformel). Den Grund zeigt Abb. 6.21: Ersetzt man den Graphen in einem Teilintervall durch die Tangente an der Stelle $x_{i+0,5}$, so ist das entstehende Trapez flächengleich dem bei der Mittelpunktsformel verwendeten Rechteck.

Mittelpunkts- oder Tangentenformel: $\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+0,5})$

Beispiel 6.19 : Rechtecksformeln

Berechne mit Hilfe der **a)** Untersumme **b)** Mittelpunktsformel einen Näherungswert für das Integral $\int_0^2 x^2\,dx$, wenn das Integrationsintervall in n = 4 gleich breite Teilintervalle zerlegt wird.

Lösung

$$A = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \approx 2{,}667;\ \Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2};\ x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1{,}5,\ x_4 = 2.$$

Zu **a)** $U_n = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{1}{2} \cdot \left(0^2 + 0{,}5^2 + 1^2 + 1{,}5^2\right) = 1{,}75.$

Zu **b)** Die Intervallmitten sind: 0,25; 0,75; 1,25; 1,75.

$$M_n = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+0,5}) = \frac{1}{2} \cdot \left(0{,}25^2 + 0{,}75^2 + 1{,}25^2 + 1{,}75^2\right) = 2{,}625.$$

Erwartungsgemäß gibt hier die Berechnung über die Mittelpunktsformel den besseren Näherungswert.

6.4.2 Trapezformel

Man nähert den gesuchten Flächeninhalt durch eine Summe von Trapezflächeninhalten an (Abb. 6.22). Die Höhe der Trapeze ist die Schrittweite $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Die Parallelseiten sind die Funktionswerte an der linken und rechten Grenze der Teilintervalle. Dann gilt:

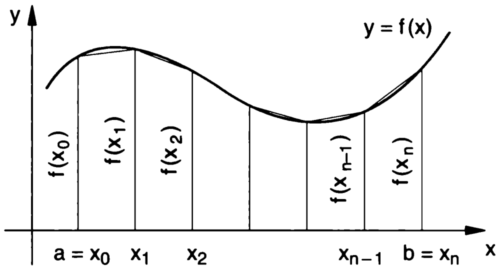


Abb. 6.22 Trapezregel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{\Delta x}{2} \cdot [f(x_1) + f(x_2)] + \ldots + \frac{\Delta x}{2} \cdot [f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Daraus ergibt sich:

Trapezformel: $\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2} \cdot [f(x_0) + 2\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + \ldots + 2\,f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

Beispiel 6.20 : Trapezformel

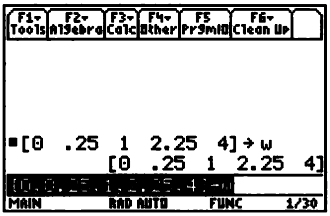
Berechne mit Hilfe der Trapezformel einen Näherungswert für das Integral $\int_0^2 x^2\,dx$, wenn das Integrationsintervall in n = 4 gleich breite Teilintervalle zerlegt wird.

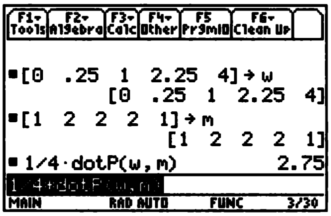
Lösung

$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$; $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1{,}5$, $x_4 = 2$.

$$T_4 = \frac{\Delta x}{2} \cdot \left[f(x_0) + 2\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + \ldots + 2\,f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left[0^2 + 2 \cdot 0{,}5^2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1{,}5^2 + 2^2\right] = 2{,}75.$$

TI 89

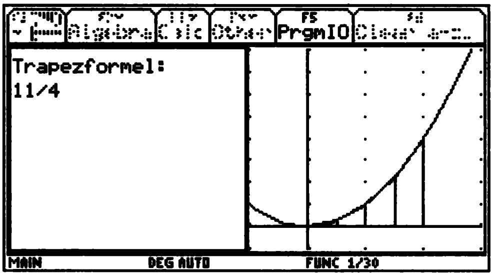




Man gibt die Funktionswerte $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 0{,}25$, $f(x_2) = 1$, $f(x_3) = 2{,}25$ und $f(x_4) = 4$ und die Multiplikatoren 1, 2, 2, 2, 1 als Zeilenvektoren ein und speichert sie auf w bzw. m ab. Dann berechnet man das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren, das man noch mit dem Faktor $\frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{4}$ multiplizieren muss.

Voyage 200

Das folgende einfache Programm zeichnet die Trapeze zur Trapezformel und berechnet sie. Es wird vorausgesetzt, dass die Funktion f(x) im Home-Bereich gespeichert und das Ansichtfenster (Window) entsprechend festgelegt wurde. Bei Wunsch kann der Bildschirm im MODE-Menü aufgespalten (LEFT-RIGHT) werden. a und b sind die Integrationsgrenzen, n die Anzahl der Teilintervalle.




```
trapez(a,b,n)
Prgm
Local d,i,sn
ClrGraph :ClrIO
Graph f(x)
(b-a)/n→d
```

For i,0,n-1
  Line a+i*d,0,a+i*d,f(a+i*d)
  Line a+(i+1)*d,0,a+(i+1)*d,f(a+(i+1)*d)
  Line a+i*d,f(a+i*d),a+(i+1)*d,f(a+(i+1)*d)
EndFor
	Zeichnen der Trapeze

f(a)+f(b) → sn For i,1,n-1 sn + 2*f(a+i*d) → sn EndFor d*sn/2 → sn	Berechnung nach der Trapezformel

```
Disp "Trapezformel:",sn
EndPrgm
```

Man kann den Fehler ("Verfahrensfehler") abschätzen, der durch die Näherung eines bestimmten Integrals durch die **Mittelpunktsformel** bzw. die **Trapezformel** entsteht. Dabei zeigt sich, dass die Fehlerschranken in beiden Fällen mit dem Quadrat der Schrittweite Δx gegen null gehen. Eine Halbierung der Schrittweite Δx reduziert daher die Fehlerschranke auf ein Viertel. Dagegen nehmen die Rundungsfehler bei abnehmender Schrittweite zu. Der Gesamtfehler kann daher nicht beliebig klein gemacht werden, wenn *numerisch*, d.h. mit Zahlen begrenzter Genauigkeit, gerechnet wird.

Die Trapezformel (wie auch die Tangentenformel) ist deutlich ungenauer als die folgende SIMPSON-Formel. Sie ist jedoch von grundsätzlichem Interesse, da sie den Ausgangspunkt für das sogenannte ROMBERG-Verfahren bildet, einem Standardverfahren der numerischen Integration.

6.4.3 KEPLER-Formel

Der Graph einer Funktion $y = f(x)$ wird im Intervall $[a, b]$ durch eine *Parabel* (2. Ordnung) mit der Gleichung $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ angenähert. Sie ist dadurch bestimmt, dass durch die drei Punkte $P(a/f(a))$, $Q(m/f(m))$ und $R(b/f(b))$ geht, wobei $m = \frac{a+b}{2}$ die Mitte des Intervalls $[a, b]$ angibt (Abb. 6.23).

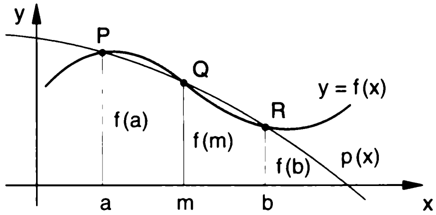


Abb. 6.23 Keplerformel

Berechnet man nun die Koeffizienten a, b und c, so ergibt sich schließlich:

$$\int_a^b p(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4 \cdot f(m) + f(b)\right].$$

Die Näherung des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ durch $\int_a^b p(x)\,dx$ wird als *KEPLER-Formel*[13] bezeichnet.

$$\textbf{Keplerformel:} \quad \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Johannes Kepler wurde gefragt, ob man den Inhalt V eines Weinfasses nicht einfacher bestimmen könnte, als es zuerst mit Wasser zu füllen und danach mühsam die Wassermenge durch Ausleeren festzustellen. Seine Antwort war die "Kepler'sche Fassregel": $V = \frac{h}{6}\left(G_1 + 4 \cdot G_m + G_2\right)$. Dabei sind h die Fasshöhe, G_1, G_2 und G_m die Querschnittsflächen des Fasses unten, oben und in der Mitte (siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 309). Dieser Tatsache verdankt die Keplerformel in der numerischen Integration ihren Namen.

Beispiel 6.21 : Keplerformel

Berechne mit Hilfe der Keplerformel

a) $\int_0^3 \left(x^3 - 4x^2 + 4x + 1\right) dx$ **b)** $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$

[12] Johannes KEPLER (1571 – 1630), deutscher Astronom ("Kepler'sche Gesetze") und Mathematiker

Lösung

Zu a) $f(0) = 1;\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{11}{8},\ f(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 = 4;$

$$\int_0^3 f(x)\,dx \approx \frac{3-0}{6}\left[1 + 4 \cdot \frac{11}{8} + 4\right] = \frac{21}{4} = 5{,}25.$$

Genaue Berechnung: $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx \approx \left[\frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_0^3 =$

$$= \frac{3^4}{4} - 4 \cdot \frac{3^3}{3} + 4 \cdot \frac{3^2}{2} + 3 = \frac{21}{4}.$$

Die Übereinstimmung der Ergebnisse ist kein Zufall! Die Kepler'sche Formel gilt nicht nur exakt, wenn $y = f(x)$ eine quadratische Funktion, sondern auch – wie sich zeigen lässt – eine *kubische* Funktion ist.

Zu b) $f(0) = 1;\ f(0{,}5) = \sqrt{1 - 0{,}5^2} = 0{,}8660,\ f(1) = 0$

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx \approx \frac{1-0}{6}[1 + 4 \cdot 0{,}8660 + 0] = 0{,}7440$$

Das genaue Ergebnis, der Flächeninhalt eines Viertelkreises (Abb. 6.24) mit dem Radius 1, ist $\frac{\pi}{4} = 0{,}7854$;

der relative Fehler ist $\dfrac{0{,}7440 - \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = -5{,}3\,\%$.

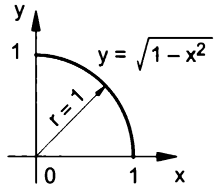
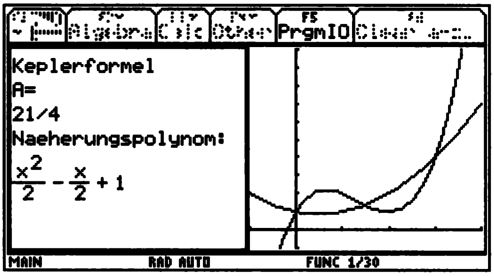


Abb. 6.24 Viertelkreis

Voyage 200

Das folgende Programm berechnet ein bestimmtes Integral mit der Keplerformel. Es wird vorausgesetzt, dass die Funktion f(x) im Home-Bereich gespeichert und das Ansichtfenster (Window) entsprechend festgelegt wurde. Bei Wunsch kann der Bildschirm im MODE-Menü aufgespalten (LEFT-RIGHT) werden.



loes ist der Vektor der Koeffizienten des Näherungspolynoms p. Er ergibt sich als Lösung eines linearen Gleichungssystems.

```
kepler(a,b)
Prgm
Local m,loes,k
ClrIO:ClrGraph
(a+b)/2 → m
simult([[a^2,a,1][m^2,m,1][b^2,b,1]],[[f(a)][f(m)][f(b)]]) → loes
dotP(loes,[[x^2][x][1]]) → p
Graph f(x)
Graph p
(b-a)/6*(f(a)+4*f(m)+f(b)) → k
Disp "Keplerformel"
Disp "A=",k
Disp "Naeherungspolynom:"
Disp p
EndPrgm
```

6.4.4 SIMPSON-Formel

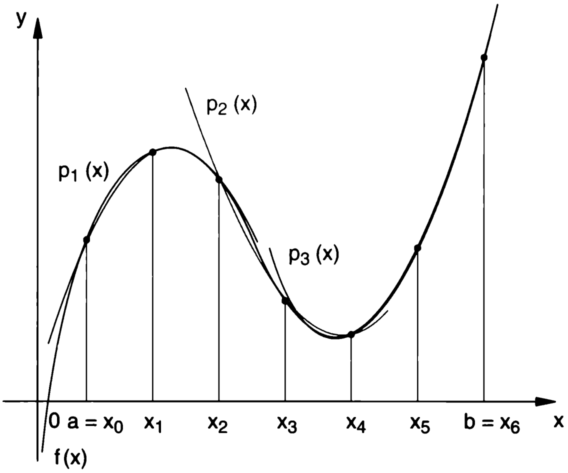


Abb. 6.25 Simpsonformel

Naheliegend ist eine mehrfache Anwendung der Keplerformel, wodurch man die *SIMPSON-Formel*[14] erhält. Dazu wird das Integrationsintervall $[a, b]$ in $2n$ gleich breite Teilintervalle zerlegt. Dann lässt sich n-mal die Keplerformel anwenden, indem immer zwei Teilintervalle zu einem "Doppelintervall" zusammengefasst werden.

In Abb. 6.25 wird die Keplerformel in $n = 3$ Doppelintervallen angewendet. In $[x_0, x_2]$ wird der Graph von $y = f(x)$ durch die Parabel $y = p_1(x)$, in $[x_2, x_4]$ durch die Parabel $y = p_2(x)$ und in $[x_4, x_6]$ durch die Parabel $y = p_3(x)$ ersetzt. Man erhält:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{x_2 - x_0}{6}\left[f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)\right] +$$

$$+ \frac{x_4 - x_2}{6}\left[f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + f(x_4)\right] + \frac{x_6 - x_4}{6}\left[f(x_4) + 4 \cdot f(x_5) + f(x_6)\right]$$

Da $x_2 - x_0 = x_4 - x_2 = x_6 - x_4 = \frac{b - a}{3}$, erhält man durch Zusammenfassen:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b - a}{6 \cdot 3}\left[f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + 2 \cdot f(x_4) + 4 \cdot f(x_5) + f(x_6)\right].$$

Für n Doppelintervalle gilt:

Simpsonformel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b - a}{6 \cdot n}\left[f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + \ldots + 4 \cdot f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right]$$

Anmerkungen:

(1) Beachte, dass hier n nicht die Anzahl aller Intervalle, sondern jene der Doppelintervalle ist. Die Simpsonformel erfordert deswegen die Funktionswerte an einer ungeraden Anzahl von gleichabständigen Stützstellen: $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$.

(2) Summiert man in der Formel die *Faktoren* aller Funktionswerte ($f(x_0)$ und $f(x_n)$ haben jeweils den Faktor 1), so ergibt sich $6n$: $1 + 4 + 2 + \ldots + 2 + 4 + 1 = 6n$. Dies kann als einfache Kontrolle dienen.

[14] Thomas SIMPSON (1710 –1761), englischer Mathematiker

(3) Man kann abschätzen, dass die **Fehlerschranke** bei der Näherung des Integrals durch die Simpsonformel mit der *vierten* Potenz (!) der Schrittweite (Stützstellenabstände) $\Delta x = \frac{(b-a)}{2n}$ gegen null geht. Deswegen liefert die Simpsonformel sehr gute Ergebnisse und gilt besonders in Anbetracht ihrer leichten Anwendbarkeit als eine der besten Formeln der numerischen Integration.

Beispiel 6.22 : Simpsonformel

Berechne mit Hilfe der Simpsonformel für n = 2 und 4 Doppelintervalle:

a) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (Viertelkreisflächeninhalt) **b)** $\int\limits_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

Lösung

Zu **a)**

n = 2 Doppelintervalle: $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 0{,}75$; $x_4 = 1$.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \approx \frac{1-0}{6\cdot 2}\left[f(x_0) + 4\cdot f(x_1) + 2\cdot f(x_2) + 4\cdot f(x_3) + f(x_4)\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\left[1 + 4\cdot 0{,}9682 + 2\cdot 0{,}8660 + 4\cdot 0{,}6614 + 0\right] = 0{,}7709.$$

Der relative Fehler zum genauen Wert $\frac{\pi}{4} = 0{,}7854$ beträgt $-1{,}8\,\%$.

Kontrolle der *Faktoren*summe: 1 + 4 + 2 + 4 + 1 = 12.

n = 4 Doppelintervalle: $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}125$; $x_2 = 0{,}25$; $x_3 = 0{,}375$; $x_4 = 0{,}5$,
$x_5 = 0{,}625$; $x_6 = 0{,}75$; $x_7 = 0{,}875$; $x_8 = 1$.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \approx \frac{1-0}{6\cdot 4}\left[f(x_0) + 4\cdot f(x_1) + 2\cdot f(x_2) + 4\cdot f(x_3) + \ldots + 4\cdot f(x_7) + f(x_8)\right] =$$

$$= 0{,}7803.$$

Der relative Fehler beträgt noch $-0{,}6\,\%$, was die Schwierigkeit dieser Integration zeigt.

Zu **b)**

Integrationen dieser Art sind in der Statistik von großer Bedeutung. Man kann zeigen, dass die vorliegende Integrationsaufgabe nicht mehr in geschlossener Form lösbar ist.

n = 2 Doppelintervalle: $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1{,}5$; $x_4 = 2$.

$$\int\limits_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \approx \frac{2-0}{6\cdot 2}\left[f(x_0) + 4\cdot f(x_1) + 2\cdot f(x_2) + 4\cdot f(x_3) + f(x_4)\right] =$$

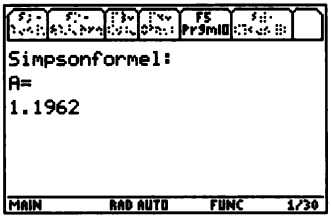
$$= \frac{1}{6}\cdot\left[1 + 4\cdot 0{,}8825 + 2\cdot 0{,}6065 + 4\cdot 0{,}3247 + 0{,}1353\right] = 1{,}1962.$$

n = 4 Doppelintervalle: $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 0{,}75$; $x_4 = 1$,
$x_5 = 1{,}25$; $x_6 = 1{,}5$; $x_7 = 1{,}75$; $x_8 = 2$.

$$\int\limits_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \approx \frac{2-0}{6\cdot 4}\left[f(x_0) + 4\cdot f(x_1) + 2\cdot f(x_2) + 4\cdot f(x_3) + \ldots + 4\cdot f(x_7) + f(x_8)\right] = 1{,}1963.$$

Eine höhere Anzahl von Doppelintervallen ändert die Genauigkeit auf 4 Nachkommastellen nicht mehr. Dieser Wert wird auch schon bei n = 3 erreicht.

TI 89



Das folgende Programm berechnet ein bestimmtes Integral mit der Simpsonformel. Es wird vorausgesetzt, dass die Funktion f(x) im Home-Bereich gespeichert wurde; z.B.: e^(-x^2/2) → f(x).
a und b sind die Integrationsgrenzen, n die Anzahl der Doppelintervalle.

Durch approx(s) wird s, der Näherungswert nach der Simpsonformel, nach symbolischer Rechnung als Kommazahl ausgegeben. Aufruf durch z.B. simpson(0,2,2). Man erreicht kürzere Laufzeiten, wenn man nicht symbolisch rechnet. Dazu kann man eine Eingabegröße als Kommazahl eingeben, wozu der Dezimalpunkt genügt, also etwa simpson(0.,2,2).

```
simpson(a,b,n)
Prgm
Local d,i, sn1, sn2
ClrIO
(b-a)/(2*n) → d
0→sn1
For i,1,2*n-1,2
  sn1+f(a+i*d) → sn1
EndFor
0 → sn2
For i,2,2*n-2,2
  sn2+f(a+i*d) → sn2
EndFor
d/3*(f(a)+4*sn1+2*sn2+f(b)) → s
Disp "Simpsonformel"
Disp "A:",approx(s)
EndPrgm
```

Beispiel 6.23 : Integration einer Funktion, die durch eine Wertetabelle gegeben ist

In der Praxis kann es vorkommen, dass man von einer Funktion nicht die Funktionsgleichung y = f(x) kennt. Für eine näherungsweise Integration genügt durchaus die Kenntnis der Funktion an gleichabständigen Stellen x_i.

Berechne $\int_0^8 f(x)\,dx$ mit Hilfe der **a)** Trapezformel, **b)** Simpsonformel, wenn die Funktion durch die folgende Wertetabelle gegeben ist.

x	0	2	4	6	8
f(x)	1	1	17	97	289

Lösung

Zu **a)** Das Integrationsintervall [0, 8] ist durch die 5 gleichabständigen Stützstellen in n = 4 Teilintervalle der Breite $\Delta x = 2$ zerlegt.

$$\int_0^8 f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 2 \cdot f(x_3) + f(x_4)\right] =$$

$$= \frac{2}{2} \cdot \left[1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 97 + 289\right] = 520.$$

Zu **b)** Die vier Teilintervalle bilden für die Anwendung der Simpsonformel zwei Doppelintervalle; d.h. es ist n = 2 in der Simpsonformel.

$$\int_0^8 f(x)\,dx \approx \frac{8-0}{6 \cdot 2}\left[f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + f(x_4)\right] =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left[1 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 17 + 4 \cdot 97 + 289\right] = 477{,}3.$$

Liegt eine ungerade Anzahl von Teilintervallen vor, so fasst man die ersten drei Teilintervalle zu einem "Dreifachintervall" und die restlichen zu Doppelintervallen zusammen. Auf letztere wird die Simpsonformel angewendet. Auf das Dreifachintervall kann man die "3/8-Regel" von Newton anwenden, auf die aber nicht mehr eingegangen werden kann.

Im Überblick: Numerische Integration

Eine **numerische Integration** wird durchgeführt, wenn die Integration in geschlossener Form nicht oder nur aufwendig lösbar ist oder der Integrand in Form einer Wertetabelle oder Kurve gegeben ist. Alle behandelten Formeln setzen voraus, dass die Stützstellen x_i gleichabständig im Integrationsintervall [a, b] liegen. Ist n die Anzahl der Teilintervalle, so wird $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{(b-a)}{n}$ auch Schrittweite genannt.

Die **Mittelpunkts-** oder **Tangentenformel** ist die wichtigste Rechtecksregel; dabei werden Rechtecke verwendet, deren Höhe mit dem Funktionswert *in der Mitte* der Teilintervalle übereinstimmt.

Bei der **Trapezformel** nähert man den gesuchten Flächeninhalt durch Trapezflächen an, deren Höhe Δx und deren Parallelseiten die Funktionswerte an der linken und rechten Grenze der Teilintervalle sind.

Bei der **Keplerformel** wird der Graph einer Funktion $y = f(x)$ im Intervall [a, b] durch eine *Parabel* (2. Ordnung) angenähert. Sie ist dadurch bestimmt, dass sie durch die drei Punkte geht, deren x-Koordinaten a, b und die Intervallmitte sind. Die **Simpsonformel** entsteht durch mehrfache Anwendung der Keplerformel. Zu beachten ist, dass hier n die Anzahl der "Doppelintervalle" ist, Δx daher gleich $\frac{(b-a)}{2n}$ ist.

Die **Fehlerschranke** (Schranke für den Fehler, der bei der Näherung des Integrals entsteht) geht bei der Mittelpunkts- und Trapezformel mit dem Quadrat, bei Simpsonformel jedoch mit der vierten Potenz der Schrittweite gegen null.

Aufgaben

6.64 Berechne den genauen Wert und danach die Näherung des Integrals mit der Mittelpunkts- und der Trapezformel für n = 2 sowie n = 4 Teilintervalle:

a) $\int_2^4 x^2\,dx$ **b)** $\int_0^2 x^3\,dx$ **c)** $\int_0^2 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$ **d)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,dt$

e) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ **f)** $\int_0^3 (1-e^{-x})\,dx$ **g)** $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ **h)** $\int_1^2 \ln x\,dx$

6.65 Berechne folgende Integrale mit der Keplerformel sowie mit der Simpsonformel mit dem angegebenen Wert n der Doppelintervalle:

a) $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$, n = 2 **b)** $\int_1^5 \frac{x^2}{1+e^x}\,dx$, n = 4 **c)** $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x}\,dx$, n = 4

d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$, n = 4 **e)** $\int_2^3 \frac{1}{\ln x}\,dx$, n = 6 **f)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2\varphi}\,d\varphi$, n = 5

g) $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^4}$, n = 4 **h)** $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$, n = 3 **i)** $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$; n = 4

6.66 Berechne das Integral (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$ (2) $\int_0^1 \frac{1}{\sin x + \cos x}\,dx$

mit der **a)** Mittelpunktsformel (n = 4) **b)** Trapezformel (n = 4)
c) Keplerformel **d)** Simpsonformel (n = 2)

6.67 Berechne $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ mit der Keplerformel und der Simpsonformel mit n = 6.

6.68 Von einer Funktion ist eine Wertetabelle gegeben. Berechne $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der

(1) Trapezregel, (2) Simpsonformel.

a)

x	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	1,0	1,1	1,5	2,4	3,8

b)

x	3	5	7	9	11
f(x)	1,099	1,609	1,946	2,197	2,398

c)

x	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	1	0,25	0,111	0,063	0,040	0,028	0,020

6.5 Uneigentliche Integrale

Voraussetzung der Integration war bisher, dass das Integrationsintervall und auch der Integrand beschränkt sind. Man kann die Integration aber auch auf unbeschränkte Intervalle oder unbeschränkte Funktionen ausdehnen. Man spricht dann von **uneigentlichen Integralen**. Definiert werden diese Integrale als Grenzwerte, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 6.24 : Unbeschränktes Integrationsintervall

Gegeben sind die Funktionen **a)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und **b)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Kann jeweils der Inhalt der Fläche berechnet werden, die der Graph und die x-Achse im Intervall $[1, \infty[$ einschließen?

Lösung

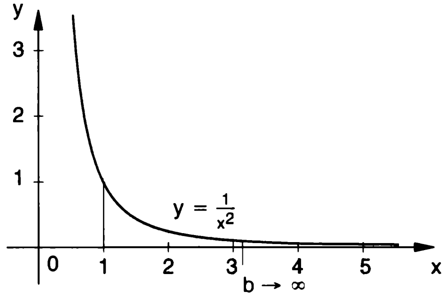


Abb. 6.26 Der Flächeninhalt bleibt endlich

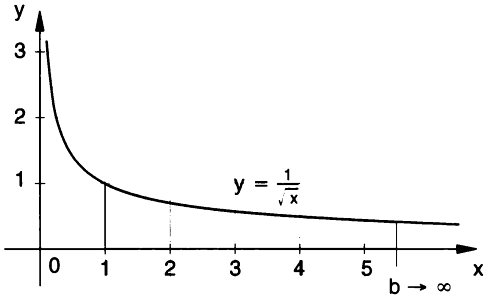


Abb. 6.27 Der Flächeninhalt geht gegen unendlich

Beide Flächen "reichen ins Unendliche". Man berechnet die Fläche daher als Grenzwert.

Zu **a)** Abb. 6.26: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = 1.$

Häufig schreibt man kurz: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1.$

Zu **b)** Abb. 6.27: $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left[2\,x^{\frac{1}{2}}\right]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \left[2\sqrt{b} - 2\right] = \infty.$

Der Flächeninhalt wächst über alle Schranken, ein endlicher Grenzwert existiert also nicht.

Beispiel 6.25 : Fluchtgeschwindigkeit

Mit welcher Mindestgeschwindigkeit v muss ein Körper von der Erdoberfläche abgeschossen werden, damit er das Schwerefeld der Erde verlassen kann?

Lösung

Nach dem NEWTON'schen Gravitationsgesetz ist die Anziehung zwischen der Erde (Masse $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg) und einem Körper der Masse m: $F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$.
Dabei ist $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$ die Gravitationskonstante. Die Hubarbeit von der Erdoberfläche $r = R = 6370$ km bis ins "Unendliche" ist:

$$W = \int_R^\infty F_G \, dr = \lim_{b \to \infty} \int_R^b G \cdot \frac{mM}{r^2} \, dr = GmM \cdot \lim_{b \to \infty} \int_R^b \frac{1}{r^2} \, dr =$$

$$= GmM \cdot \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^b = GmM \cdot \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{R} \right) \right] = G \cdot \frac{mM}{R}.$$

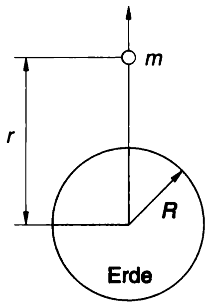


Abb. 6.28

Die kinetische Energie des abgeschossenen Körpers muss so groß sein, dass diese Hubarbeit verrichtet werden kann:

$$\frac{m v^2}{2} = G \cdot \frac{mM}{R} \quad \Rightarrow v = \sqrt{2 G \frac{M}{R}} = 11{,}2 \ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Die gefragte Mindestgeschwindigkeit beträgt daher, unabhängig von der Körpermasse m, 11,2 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Sie wird als *Fluchtgeschwindigkeit* oder als *2. kosmische Geschwindigkeit* bezeichnet.

Beispiel 6.26 : Der Integrand ist unbeschränkt

Gegeben sind die Funktionen **a)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ und **b)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Kann jeweils der Inhalt der Fläche berechnet werden, die der Graph und die x-Achse im Intervall $[0, 1[$ einschließen?

Lösung

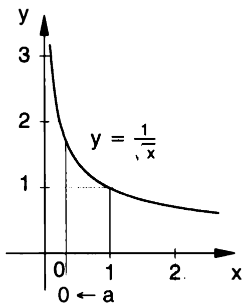


Abb. 6.29 Der Flächeninhalt bleibt endlich

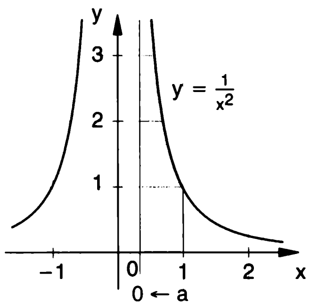


Abb. 6.30 Der Flächeninhalt geht gegen unendlich

Auch hier reichen die Flächen "ins Unendliche", weil der Integrand im Integrationsintervall unbeschränkt ist. Wieder ist daher ein Grenzwert zu berechnen.

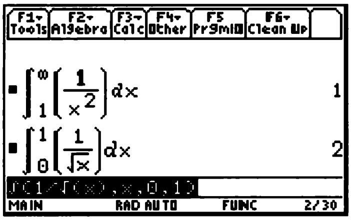
Zu **a)** Abb. 6.29: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{a \to 0+} \left[2 x^{\frac{1}{2}} \right]_a^1 = \lim_{a \to 0+} \left[2 - 2\sqrt{a} \right] = 2.$

Kurz schreibt man: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \left[2 x^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 2 - 2\sqrt{0} = 2.$

Zu **b)** Abb. 6.30: $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{a \to 0} \left[-x^{-1} \right]_a^1 = \lim_{a \to 0} \left[-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{a} \right) \right] = \lim_{a \to 0} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) = \infty.$

Der Inhalt der Fläche wächst über alle Grenzen, ein endlicher Grenzwert existiert also nicht.

TI
89



Im Überblick: Uneigentliche Integrale

Eine Integrationsaufgabe mit unbeschränktem Integrationsintervall oder unbeschränktem Integranden ist als Grenzwertaufgabe anzusehen. Existiert der entsprechende Grenzwert, so spricht man von einem **uneigentlichen Integral**. Man sagt auch, dass das uneigentliche Integral *konvergiert*.

Aufgaben

6.69 Berechne, falls möglich

a) $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ **b)** $\int_1^{\infty} \frac{2}{x^4}\,dx$ **c)** $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ **d)** $\int_1^{\infty} \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx$

e) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ **f)** $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$ **g)** $\int_0^{\infty} e^{-4x}\,dx$ **h)** $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2}\,dx$

i) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ **j)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx$ **k)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$ **l)** $\int_0^{\infty} \sin x\,dx$

m) $\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \sin x\,dx$ **n)** $\int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot \cos x\,dx$ **o)** $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \cdot (1+x^2)}\,dx$ **p)** $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 \cdot (1+x)}\,dx$

6.70 Berechne, falls möglich

a) $\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$ **b)** $\int_0^{1} \frac{2}{x^3}\,dx$ **c)** $\int_0^{2} \frac{2}{x^2}\,dx$ **d)** $\int_1^{2} \frac{x}{x^2-1}\,dx$ **e)** $\int_1^{3} \frac{1}{x-1}\,dx$

f) $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **g)** $\int_2^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ **h)** $\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ **i)** $\int_0^{1} \ln x\,dx$ **j)** $\int_0^{1} x \cdot \ln x\,dx$

6.71 Die Gammafunktion $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\,dt$ gehört zu den wichtigsten nichtelementaren Funktionen. Es gilt: $n! = \Gamma(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Berechne **a)** $\Gamma(1)$ **b)** $\Gamma(2)$ **c)** $\Gamma(3)$.

6.72 Ist f(t) eine auf $[0, \infty[$ definierte Funktion, so nennt man $F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-s \cdot t}\,dt$ die Laplace-Transformierte von f(t). Berechne die Laplace-Transformierte von

a) $f(t) = t$ **b)** $f(t) = e^{-3t}$ **c)** $f(t) = \sin t$ **d)** $f(t) = \cos 2t$

6.73 Die mittlere Lebensdauer μ gleichartiger Bauteile berechnet sich bei Vorliegen einer Exponentialverteilung (spezielle Lebendauerverteilung) nach $\mu = \int\limits_0^\infty t \cdot \lambda\, e^{-\lambda t}\,dt$. Berechne μ, wenn $\lambda = 0{,}0002\ h^{-1}$.

6.74 $g(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ ist die Dichteverteilung der sogenannten t-Verteilung mit einem Freiheitsgrad. Zeige, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1$.

6.75 g(x) ist eine für $x \geqslant 0$ definierte Dichtefunktion einer Testverteilung (im Folgenden eine F- oder eine χ^2-Verteilung) der beurteilenden Statistik. Zeige, dass $\int\limits_0^\infty g(x)\,dx = 1$, wenn

a) $g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ **b)** $g(x) = \frac{1}{(1+2x)^{3/2}}$ **c)** $g(x) = \frac{6x}{(1+x)^4}$

d) $g(x) = \frac{8x}{(1+2x)^3}$ **e)** $g(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1+x) \cdot \sqrt{x}}$ **f)** $g(x) = \frac{1}{4}\, x\, e^{-x/2}$

Substitutionshinweise: c) $u = 1 + x$ d) $u = 1 + 2x$ e) $u = \sqrt{x}$

6.76 Ein Kondensator (Abb. 6.31) mit der Kapazität C wird auf die Spannung U_0 aufgeladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ s beginnt die Entladung des Kondensators. Für die Entladestromstärke gilt: $i = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-t/R \cdot C}$, $t \geqslant 0$ s. Zeige, dass die gesamte abfließende Ladung gleich der Anfangsladung $Q = C \cdot U_0$ ist, d.h. dass $\int\limits_0^\infty i\,dt = Q$ ist.

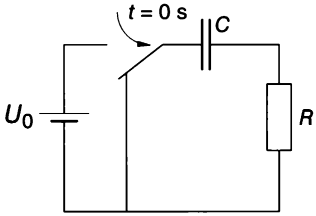


Abb. 6.31

7 Anwendungen der Integralrechnung

7.1 Flächeninhalt, Volumen, Bogenlänge

7.1.1 Berechnung von Flächeninhalten

Ist $f(x) \geqslant 0$ in $[a, b]$, so ist das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gleich dem Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen, der x-Achse sowie den Senkrechten $x = a$ und $x = b$. Ist $f(x) \leqslant 0$, so ist der *absolute* Wert dieses Integrals gleich dem Inhalt dieser Fläche.

Beispiel 7.1 : Berechnung eines Flächeninhaltes

Berechne den Flächeninhalt A, der vom Graphen der Funktion $f(x) = -0{,}25x^2 + 3$, der x-Achse und den Senkrechten $x = -1$ und $x = 3$ eingeschlossen wird.

Lösung

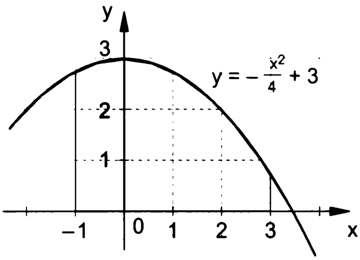


Abb. 7.1 Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen

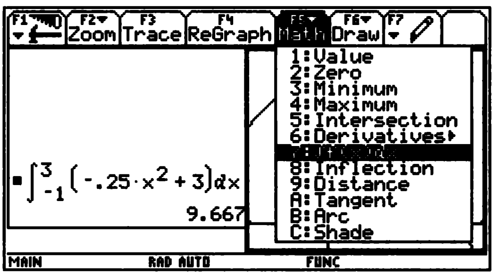
Da $f(x) \geqslant 0$ in $[-1, 3]$, ist A gleich dem bestimmten Integral:

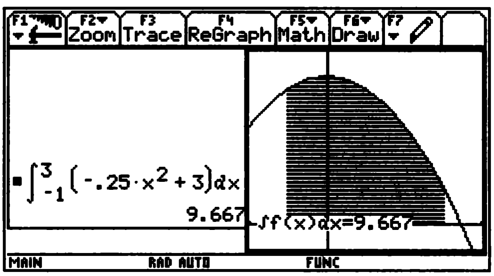
$$A = \int_{-1}^{3}\left(-\frac{1}{4}x^2 + 3\right)dx = \left[-\frac{1}{12}x^3 + 3x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= -\frac{27}{12} + 9 - \left(\frac{1}{12} - 3\right) = \frac{29}{3} = 9{,}67.$$

Der Inhalt der Fläche beträgt also 9,67 Flächeneinheiten.

Voyage 200





Die Ermittlung des Flächeninhaltes kann auf 2 Arten erfolgen. Im ersten Fenster erfolgt die Berechnung in der üblichen Weise, im zweiten Fenster aus der Graphik.

Beispiel 7.2 : Die Funktion ist sowohl positiv als auch negativ

Berechne den Flächeninhalt zwischen dem Funktionsgraphen von $y = \frac{x^4}{2} - 2x^2$ und der x-Achse im Intervall $[-2{,}5;\ 2{,}5]$.

Lösung

Die Funktion ist zwischen −2 und +2 negativ oder null, außerhalb positiv (Abb. 7.2). Dies bedeutet, dass das bestimmte Integral im Teilintervall $[-2, 2]$ *negativ* ist und dort für den Flächeninhalt der Betrag dieses Integrals genommen werden muss. Man hat also zur Bestimmung des verlangten Flächeninhaltes die Integration schrittweise zu führen. Da die Funktion gerade ist (symmetrisch zur y-Achse), braucht man zunächst nur A_1 und A_2, die Inhalte der Flächen zwischen Graph und x-Achse in $[0; 2]$ bzw. in $[2; 2{,}5]$ berechnen. Das Ergebnis wird mit 2 multipliziert.

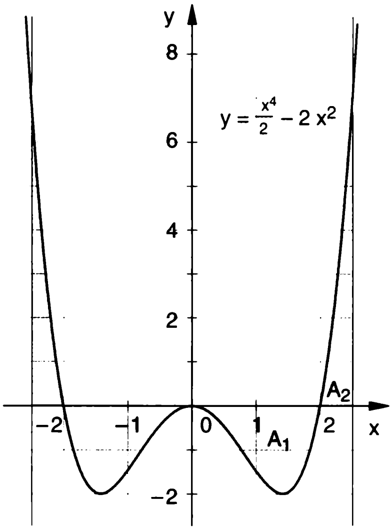


Abb. 7.2

$$A_1 = \left| \int_0^2 \left(\frac{x^4}{2} - 2x^2\right) dx \right| = \left|-\frac{32}{15}\right| = \frac{32}{15} = 2{,}133;$$

$$A_2 = \int_2^{2{,}5} \left(\frac{x^4}{2} - 2x^2\right) dx = 1{,}482;$$

Gesamtflächeninhalt: $A = 2 \cdot (A_1 + A_2) = 7{,}231$.

Die Deutung eines bestimmen Integrals als (orientierten) Flächeninhalt legt folgenden Satz nahe, der bei Integrationsaufgaben oft gute Dienste leistet.

Für eine **gerade Funktion** (d.h. $f(x) = f(-x)$) gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Für eine **ungerade Funktion** (d.h. $f(x) = -f(-x)$) gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Beispiel 7.3 : Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen

Berechne den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 4$ und $g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$.

Lösung

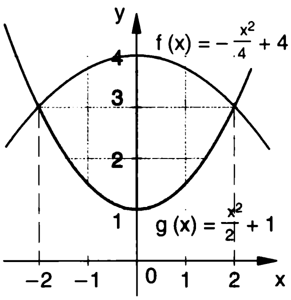


Abb. 7.3 Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

Man bestimmt zuerst durch Gleichsetzen von f(x) und g(x) die Schnittstellen der beiden Graphen:

$\frac{x^2}{2} + 1 = -\frac{x^2}{4} + 4.$

Die beiden Lösungen lauten: $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

Aus Abb. 7.3 ist ersichtlich, dass der gesuchte Flächeninhalt gleich der Differenz zweier bestimmter Integrale ist:

$$A = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx - \int_{-2}^{2} g(x)\,dx.$$

Auf Grund der Summenregel folgt:

$$A = \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{2}\left[-\frac{x^2}{4} + 4 - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)\right] dx = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{3x^2}{4} + 3\right) dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{2}\left(-\frac{3x^2}{4} + 3\right) dx = 8.$$

Anmerkungen

(1) Die eben gewählte Vorgangsweise setzt voraus, dass der Graph von f(x) im Integrationsintervall *oberhalb* des Graphen von g(x) verläuft. Ist dies nicht der Fall, so muss abschnittsweise vorgegangen werden.

(2) Ohne Bedeutung ist es dagegen, ob dabei die Graphen die x-Achse schneiden oder einer oder beide unterhalb der x-Achse liegen. Denn durch Addition einer Konstanten c zu beiden Funktionen kann man stets erreichen, dass die Graphen von f(x) + c und g(x) + c oberhalb der x-Achse liegen.

Flächeninhalt zwischen zwei Graphen:
Ist $f(x) \geqslant g(x)$ in [a, b], so gilt für den Flächeninhalt A der von beiden Graphen über dem Integrationsintervall eingeschlossenen Fläche: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

Flächeninhalt bei einer Kurve in Parameterdarstellung
$x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \dot{x}(t)\,dt.$$

Dabei gilt: $x(t_1) = a$ und $x(t_2) = b$.

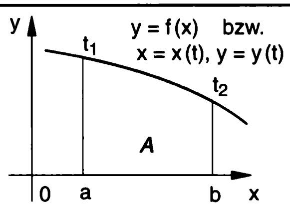


Abb. 7.4

Begründung: Mit der Substitutionsvariablen t (bisher in der Regel u genannt) folgt mit $dx = \dot{x}\,dt$:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t)) \cdot \dot{x}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \dot{x}(t)\,dt$$

Beispiel 7.4 : Flächeninhalt eines Kreises

$x(t) = r \cdot \cos t$, $y(t) = r \cdot \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$, ist eine Parameterdarstellung eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und dem Radius r. Berechne seinen Flächeninhalt.

Lösung

Wir berechnen zuerst den Inhalt A_1 des Viertelkreises (Abb. 7.5):

Integrationsgrenzen:

$t_1 = \frac{\pi}{2}$, weil $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $t_2 = 0$, weil $x(0) = \cos 0 = 1$.

$$A_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r \cdot \sin t \cdot (-r \cdot \sin t)\, dt = -r^2 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\, dt = r^2 \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt.$$

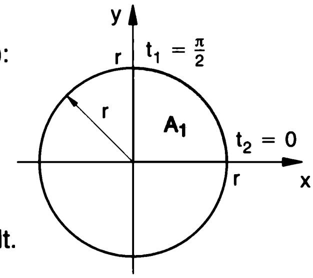


Abb. 7.5 Kreisflächeninhalt

Dabei wurde verwendet, dass sich bei einer Vertauschung der Integrationsgrenzen das Vorzeichen eines Integrals ändert.

Wegen $\int \sin^2 t\, dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}$ (siehe Beispiel 6.14 c, Seite 212) folgt:

$$r^2 \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = r^2 \cdot \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \cdot \frac{\pi}{4} \text{ und schließlich } A = 4 \cdot A_1 = \pi \cdot r^2.$$

7.1.2 Volumen von Rotationskörpern

Rotationskörper entstehen, wenn ein Kurvenstück um eine Achse, die beide in der selben Ebene liegen, gedreht wird.

Rotation um die x-Achse

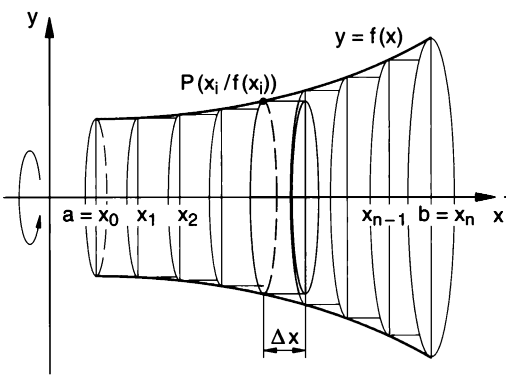


Abb. 7.6 Zerlegung eines Rotationskörpers

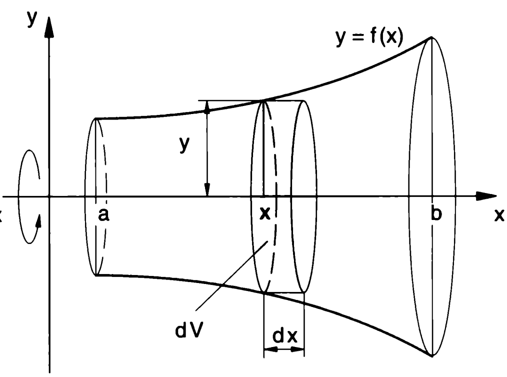


Abb. 7.7 Ein Volumselement des Rotationskörpers

Über einem Intervall [a, b] ist eine stetige Funktion f(x) gegeben. Der Graph der Funktion erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper. Diesen kann man, wie in Abb. 7.6 gezeigt, näherungsweise durch endlich viele Zylinderscheiben der Breite Δx ersetzen. Bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung geht dieser "Treppenkörper" in den Rotationskörper über.

Die Radien der Zylinderscheiben sind $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$. Für das Volumen der i-ten Scheibe gilt: $\Delta V_i = \Delta x \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \pi$.

$\sum\limits_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \pi$ ist (bei einer monoton steigenden Funktion f(x)) gerade eine *Untersumme* U_n der Funktion $[f(x)]^2 \cdot \pi$. Für $n \to \infty$ ergibt sich daher, weil mit f(x) auch $[f(x)]^2 \cdot \pi$ integrierbar ist, als Grenzwert $V = \int_a^b [f(x)]^2 \pi \, dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$, kurz $V = \pi \cdot \int_a^b y^2 \, dx$, das Volumen des Rotationskörpers. Das Ergebnis gibt den Zahlenwert zur gewählten Volumseinheit an.

Volumselemente

Weit verbreitet in den Anwendungen ist eine *formale* Vorgangsweise. Die Zylinderscheiben der Stärke $\Delta x = dx$, in die der Rotationskörper zerlegt wird, werden *Volumselemente* des Körpers genannt (Abb. 7.7). Das Volumen eines solchen an einer beliebigen Stelle x herausgegriffenen Volumselementes wird mit dV bezeichnet; es beträgt $dV = y^2 \cdot \pi \cdot dx = [f(x)]^2 \cdot \pi \cdot dx$. *Integration* über alle Volumselemente bedeutet, dass man für unbegrenzt feiner werdende Zerlegungen den Grenzwert der Summen der Rauminhalte aller Zylinderscheiben bildet. Dieser Grenzwert ist gleich dem gesuchten Volumen: $V = \int_V dV = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$. Man spricht daher bei dieser Integration auch vom *Aufsummieren* der Volumselemente.

Rotation um die y-Achse

Rotiert ein Kurvenstück $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, um die y-Achse (Abb. 7.8), so gilt für ein beliebiges Volumselement $dV = [g(y)]^2 \cdot \pi \cdot dy$. Durch Integrieren über die Volumselemente erhält man:

$$V = \int_V dV = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2 \, dy = \pi \cdot \int_c^d x^2 \, dy.$$

Anmerkung: In der Regel ist das rotierende Kurvenstück in der Form $y = f(x)$ gegeben: Es muss dann nach x aufgelöst werden.

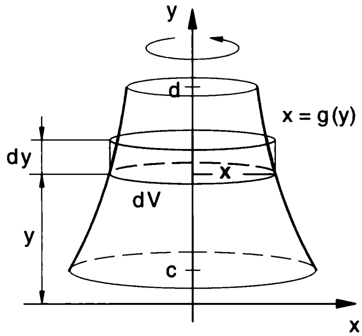


Abb. 7.8 Rotation um die y-Achse

Rotationsvolumen bei Drehung einer Kurve um die

x-Achse: $V = \pi \cdot \int_a^b y^2 \, dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$ **y-Achse:** $V = \pi \cdot \int_c^d x^2 \, dy = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2 \, dy$

Beispiel 7.5 : Volumen eines Drehkegels

Berechne das Volumen eines Drehkegels (Radius *r*, Höhe *h*) als Rotationskörper bei Drehung eines Geradenstücks um die x-Achse.

Lösung

Wir legen das Koordinatensystem wie in Abb. 7.9 angegeben. Dann entsteht der Kegel mit der Erzeugenden $y = \frac{r}{h} \cdot x$. Einsetzen in die Volumsformel ergibt:

$$V = \pi \cdot \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 \, dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

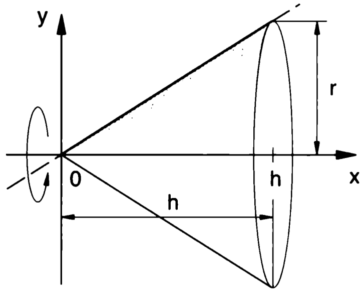


Abb. 7.9 Volumen eines Drehkegels

Beispiel 7.6 : Volumen einer Kugel

Berechne das Volumen einer Kugel mit dem Radius *r* als Rotationskörper bei Drehung eines Halbkreises um die y-Achse.

Lösung

Wir legen das Koordinatensystem so, dass der Kreis ein Ursprungskreis ist (Abb. 7.10). Dann lautet die Kreisgleichung: $x^2 + y^2 = r^2$. Die Kugel entsteht durch Rotation eines Halbkreises um die y-Achse. Es genügt, die Rotation eines Viertelkreises zu betrachten und das Volumen der dabei entstehenden Halbkugel zu verdoppeln:

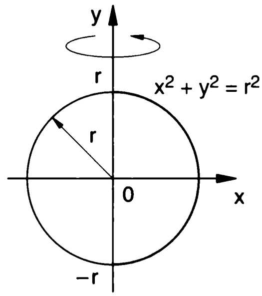


Abb. 7.10 Volumen einer Kugel

$$V = 2\pi \cdot \int_0^r x^2 \, dy = 2\pi \cdot \int_0^r \left(r^2 - y^2\right) dy = 2\pi \cdot \left[r^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^r = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

Man hätte das Kugelvolumen natürlich auch durch Rotation eines Halbkreises um die x-Achse herleiten können.

7.1.3 Bogenlänge einer ebenen Kurve

Gesucht ist die Länge ("Bogenlänge") des Graphen einer Funktion $y = f(x)$ im Intervall $[a, b]$. Formal kann man dabei wie bei der Herleitung der Volumsformel für einen Rotationskörper vorgehen. Die Länge eines beliebig herausgegriffenen kleinen Kurvenstücks zwischen P und Q (Abb. 7.11) kann durch das *Linienelement* ds ersetzt werden, wobei ds die entsprechende Länge der Strecke auf der *Tangente* im Punkt P ist.

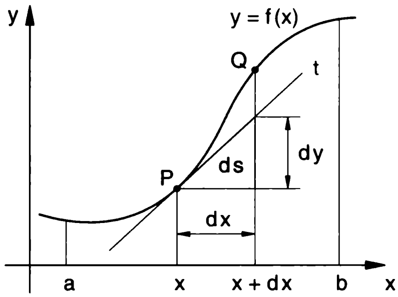


Abb. 7.11 Bogenlänge

Dann gilt nach dem pythagoräischen Lehrsatz:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left[1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right] \cdot (dx)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \cdot (dx)^2 = \left[1 + (y')^2\right] \cdot (dx)^2.$$

Damit ergibt sich für das Linienelement: $ds = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx$

Die Summe über alle Linienelemente zwischen [a, b], die Bogenlänge s des Graphen zwischen a und b, ist das Integral $s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$.

Liegt die Kurve in einer Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ vor, so gilt mit $a = x(t_1)$ und $b = x(t_2)$: $dx = \dot{x}\, dt$, $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, $(y')^2 = \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}$. Einsetzen in die Formel für die Bogenlänge s ergibt:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}\, \dot{x}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Wir fassen zusammen:

Bogenlänge s einer ebenen Kurve $y = f(x)$ für $a \leqslant x \leqslant b$: $\boldsymbol{s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx}$.

Bei Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ für $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$: $\boldsymbol{s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt}$.

Beispiel 7.7 : Berechnung der Länge einer Wurfbahn

Ein Körper wird aus einer Höhe von $h = 50$ m mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20\ \text{m s}^{-1}$ waagrecht abgeworfen. Berechne die Länge der Wurfbahn.

Lösung

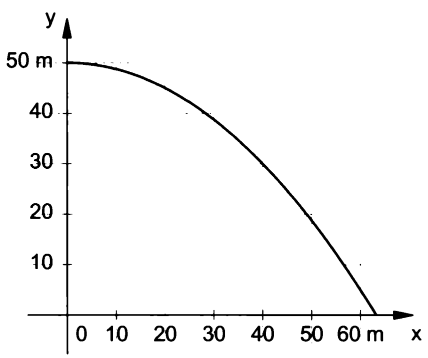


Abb. 7.12 Länge der Wurfbahn

Ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes gilt für die Bahnkurve bei Wahl des Koordinatensystems wie in Abb. 7.12 (siehe "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 186f.):

$y = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2$. Mit $g \approx 10\ \text{m s}^{-2}$ erhält man daraus die Zahlenwertgleichung $y = 50 - \frac{x^2}{80}$.

Die Integration ist im Intervall [0, b] zu führen. b ist die Wurfweite; man erhält sie durch Nullsetzen von y: $b = 20 \cdot \sqrt{10} = 63{,}2$ (in m).

$y' = -\frac{x}{40}$; $s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^{63,2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{40}\right)^2}\, dx = \int_0^{63,2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{40}\right)^2}\, dx.$

Dieses Integral lässt sich durch die Substitution $x = 40 \cdot \sinh u$ berechnen:

$\frac{dx}{du} = 40 \cdot \cosh u$; $\sqrt{1 + \sinh^2 u} = \cosh u.$

Integrationsgrenzen:

$x = 40 \cdot \sinh u = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 40 \cdot \sinh u = 63{,}2 \Rightarrow u = \operatorname{ar\,sinh} \frac{63{,}2}{40} = 1{,}24.$

$$s = \int_0^{1,24} \cosh u \cdot 40 \cosh u \; du = 40 \cdot \int_0^{1,24} \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 du.$$

Ausquadrieren des Integranden und anschließende Integration ergibt $s = 83{,}9$ (in m).

Berechnung mit Kepler-Formel:

Integrand $f(x) = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{40}\right)^2}$, $a = 0$, $m = 10 \cdot \sqrt{10}$, $b = 20 \cdot \sqrt{10}$

$s \approx \frac{20\sqrt{10} - 0}{6} \cdot (1 + 4 \cdot 1{,}275 + 1{,}871) = 84{,}0$ (in m).

Beispiel 7.8 : Kreisumfang

$x(t) = r \cdot \cos t$, $y(t) = r \cdot \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$, ist eine Parameterdarstellung eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und dem Radius r. Berechne seinen Umfang.

Lösung

$\dot{x} = -r \cdot \sin t$, $\dot{y} = r \cdot \cos t$.

$$u = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 t + r^2 \cdot \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} r\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = r\int_0^{2\pi} 1\, dt =$$

$$= 2\pi r.$$

Die Berechnung von Längen, Flächeninhalten oder Volumina erfolgt in den Anwendungen formal oft über die Integration von Linien-, Flächen- oder Volumselementen.

Beispiel 7.9 : Rechnen mit Linien-, Flächen- und Volumselementen

Berechne

a) den Umfang eines Kreises durch Integration von Linienelementen,

b) den Flächeninhalt eines Kreises durch Integration von Flächenelementen,

c) das Volumen einer Kugel durch Integration von Volumselementen.

Lösung

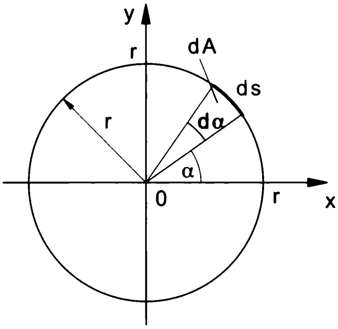


Abb. 7.13 Linien- und Flächenelement

Zu **a)** Für ein beliebig herausgegriffenes Linienelement ds gilt (Abb. 7.13):

$ds = r \cdot d\alpha$ (α im Bogenmaß). Integration über alle Linienelemente von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi$ ergibt den Kreisumfang $s = u$:

$$u = \int_s ds = \int_0^{2\pi} r \cdot d\alpha = r \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi r.$$

Zu **b)** Als Flächenelemente, aus denen sich die Kreisfläche zusammensetzt, können Kreissektoren mit dem Mittenwinkel $d\alpha$ gewählt werden (Abb. 7.13).

Für ein solches Flächenelement gilt: $dA = \frac{r \cdot ds}{2} = \frac{r^2 \cdot d\alpha}{2}$. Summierung, d.h. wieder Integration über alle Flächenelemente der Kreisfläche, ergibt den Kreisflächeninhalt A:

$$A = \int_A dA = \int_0^{2\pi} \frac{r^2\, d\alpha}{2} = \frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi} d\alpha = \pi r^2.$$

Genauso gut könnte man als Flächenelemente Kreisringflächen wählen. In diesem Fall ist $dA = 2\pi r \cdot dr$. Integration von 0 bis r ergibt den Kreisflächeninhalt.

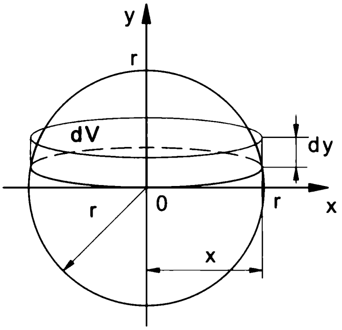


Abb. 7.14 Volumselement

Zu **c)**

Als Volumselemente werden Zylinderscheiben der Stärke dy gewählt. Ein derartiges Volumselement ist in Abb. 7.14 herausgegriffen. Mit $x^2 + y^2 = r^2$ folgt:

$$dV = x^2 \cdot \pi \cdot dy = (r^2 - y^2) \cdot \pi \cdot dy$$

$$V = \int_V dV = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - y^2\right) dy = 2\pi \left[r^2 \cdot y - \frac{y^3}{3}\right]_0^r = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3.$$

Anmerkung: $s = \int_s ds, \quad A = \int_A dA, \quad V = \int_V dV$

Die Bezeichnungen s, A bzw. V unter dem Integralzeichen bedeuten, dass über die gesamte interessierende Bogenlänge s, Fläche A bzw. das gesamte interessierende Volumen V zu integrieren ist.

Beispiel 7.10 : Rechnen mit Volumselementen

Berechne das Volumen eines Zylinderhufes (Abb. 7.15), wenn R der Radius der halbkreisförmigen Grundfläche und H die Hufhöhe ist.

Lösung

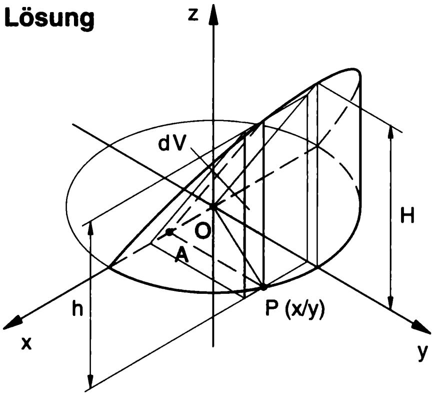


Abb. 7.15

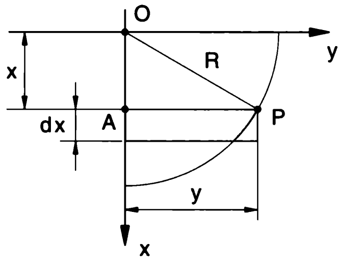


Abb. 7.16

Wie in Abb. 7.15 gezeigt, wird der Körper näherungsweise in prismatische Volumselemente zerlegt. Wir greifen ein beliebiges derartiges Volumselement dV heraus. Aus dem rechtwinkligen Dreieck OAP der Abb. 7.16 entnimmt man, dass $y^2 = R^2 - x^2$ ist. Für die Seite h des Prismas ergibt sich nach Anwendung des 2. Strahlensatzes in den beiden rechtwinkligen Dreiecken der (y, z)-Ebene: $h = \frac{H}{R} \cdot y$. Daher gilt:

$$dV = \frac{1}{2} \cdot y \cdot dx \cdot h = \frac{H}{2R} \cdot y^2 \cdot dx = \frac{H}{2R} \left(R^2 - x^2\right) dx;$$

Durch Integration ergibt sich das gesuchte Volumen des Zylinderhufs:

$$V = \int_V dV = \int_{-R}^{R} \frac{H}{2R} \cdot \left(R^2 - x^2\right) dx = 2 \cdot \int_0^R \frac{H}{2R} \cdot \left(R^2 - x^2\right) dx = \frac{H}{R} \cdot \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = \frac{H}{R} \cdot 2\,\frac{R^3}{3} = \frac{2}{3} R^2 H.$$

Im Überblick: Flächeninhalt, Volumen, Bogenlänge ●

Flächeninhalt: Ist $f(x) \geqslant 0$ in $[a, b]$, so ist das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gleich dem Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen, der x-Achse sowie den Senkrechten $x = a$ und $x = b$. Ist $f(x) \leqslant 0$, so ist der *absolute* Wert dieses Integrals gleich dem Inhalt dieser Fläche.

Flächeninhalt zwischen zwei Graphen:
Ist $f(x) \geqslant g(x)$ in $[a, b]$, so gilt für den Flächeninhalt A der von beiden Graphen über dem Integrationsintervall eingeschlossenen Fläche: $A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$.

Flächeninhalt bei einer Kurve in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt \quad \text{mit } x(t_1) = a \text{ und } x(t_2) = b.$$

Rotationsvolumen bei Drehung einer Kurve $y = f(x)$ bzw. $x = g(y)$ um die

x-Achse: $V = \pi \cdot \int_a^b y^2\, dx$ bzw. y-Achse: $V = \pi \cdot \int_c^d x^2\, dy$

Bogenlänge s einer ebenen Kurve $y = f(x)$ für $a \leqslant x \leqslant b$: $s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$

Bei Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ für $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$

Flächenelemente, Volumselemente, Linienelemente, ...
Man zerlegt eine Fläche, einen Körper, eine Bogenlänge und dgl. (meist näherungsweise) in kleine "Elemente". Das *Integral* über sämtliche dieser Elemente ist der gesuchte Inhalt der Fläche des Körpers oder die gesuchte Bogenlänge.

Aufgaben

Flächeninhalt

7.1 Berechne den Flächeninhalt, der durch den Graphen der Funktion f(x), der x-Achse und den Senkrechten $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird.

a) $f(x) = -2x + 5$; $a = -3$; $b = 4$
b) $f(x) = x^2 + x - 2$; $a = -2$; $b = 2$
c) $f(x) = \sin x$; $a = 0$; $b = \pi$
d) $f(x) = \cos x$; $a = 0$; $b = 2\pi$
e) $f(x) = x^2 + 3$; $a = -2$; $b = 1$
f) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$; $a = -2$; $b = 2$
g) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$; $a = 0$; $b = 3$
h) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$; $a = -1$; $b = 3$
i) $f(x) = \sin 2x$; $a = 0$; $b = \pi$
j) $f(x) = |1 - x^2|$; $a = -2$; $b = 2$

7.2 Berechne das bestimmte Integral der Funktion $y = f(x)$ für das Integrationsintervall $[-a, a]$. Benütze gegebenenfalls, ob die Funktion gerade oder ungerade ist.

a) $f(x) = x^2$, $a = 2$
b) $f(x) = \sin x$, $a = \pi$
c) $f(x) = \cos 2x$, $a = \frac{\pi}{2}$
d) $f(x) = x^2 + x$, $a = 1$
e) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$, $a = 1$
f) $f(x) = x^4 - x^2$, $a = 1$

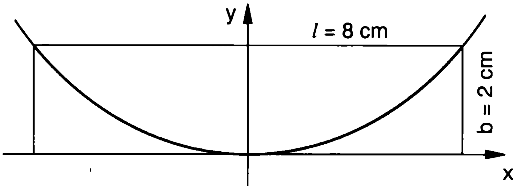


Abb. 7.17

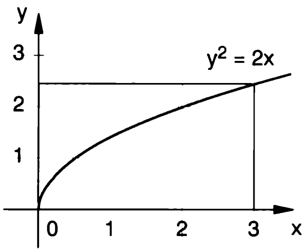


Abb. 7.18

7.3 Ein Rechteck mit der Länge $l = 8$ cm und der Breite $b = 2$ cm wird vom Graphen einer Parabel nach Abb. 7.17 in zwei Teilflächen zerlegt. Bestimme ihre Inhalte.

7.4 Ein Rechteck (Abb. 7.18) wird vom Graphen der Parabel $y^2 = 2x$ in zwei Teilflächen zerlegt. Bestimme den Inhalt der markierten Fläche.

7.5 Ermittle den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $y = f(x)$ und der Abszissenachse im angegebenen Intervall.

a) $y = (2 + 6t)e^{-t}$, $[0, 2]$ **b)** $y = x \cdot \sin x$, $[0, 2\pi]$ **c)** $y = x \cdot \ln x$, $[1, 5]$

7.6 An welcher Stelle $x = a$ muss eine Senkrechte gezogen werden, damit der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $y = \sin x$ und der x-Achse im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

a) halbiert,

b) im Verhältnis 2 : 3 geteilt wird?

Hinweis: Die in den Aufgaben 7.7 b, 7.8 und 7.9 entstehenden Gleichungen sind mit einem Näherungsverfahren zu lösen.

7.7 Die Fläche zwischen dem Funktionsgraph von $y = x^2$ und der x-Achse soll im Intervall $[0, 4]$ durch eine **a)** senkrechte Gerade, **b)** waagrechte Gerade in zwei flächengleiche Teile geteilt werden. Ermittle die Gleichung der Geraden.

7.8 Berechne (Abb. 7.19) jene Stelle a, sodass

$$\int_a^2 \ln x \, dx = 0 \text{ ist.}$$

7.9 Wie lautet die Gleichung der Waagrechten, die den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $y = \cos x$ und der x-Achse im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ halbiert?

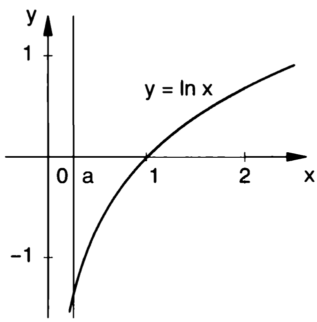


Abb. 7.19

7.10 Bestimme mit Hilfe der Keplerformel den Inhalt der Fläche zwischen der Parabel $y = x^2$ und

a) dem Kreis $x^2 + y^2 = 16$, **b)** der Ellipse $9x^2 + 16y^2 = 144$.

7.11 Ermittlung der Zeitkonstanten aus der Erwärmungskurve für Maschinen (Abb. 7.20): Beim Betrieb von Maschinen kommt es durch die anfallende Verlustleistung zu einer Erwärmung. Für die "Übertemperatur" ϑ (= Temperaturdifferenz auf die Umgebungstemperatur) gilt $\vartheta = \vartheta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, wobei ϑ_∞ der sich nach sehr langem Betrieb einstellende "Beharrungswert" der Übertemperatur, t die Betriebsdauer und τ die Zeitkonstante ist. Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen der Erwärmungskurve und der Halbgeraden $\vartheta = \vartheta_\infty$. Ermittelt man diese Fläche experimentell aus den bekannten Punkten der Erwärmungskurve, so kann damit die Zeitkonstante τ ermittelt werden.

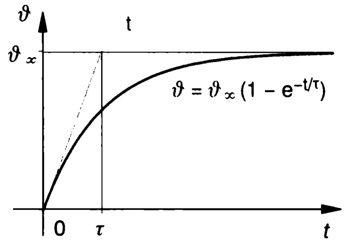


Abb. 7.20

7.12 Bestimme im angegebenen Intervall den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen von

a) $x(t) = \frac{1}{t}$, $y(t) = t \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$ **b)** $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3 \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

7.13 Bestimme den Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.
Hinweis: Benütze die Parameterdarstellung $x = a \cdot \cos t$, $y = b \cdot \sin t$, $0 \leqslant t < 2\pi$.

7.14 Bestimme den Flächeninhalt ($0 \leqslant t < 2\pi$)

a) der Ellipse $x(t) = 5\cos t$, $y(t) = 3\sin t$,
b) der Zykloide $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$,
c) der LISSAJOUS-Figur $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin(2t)$,
d) der LISSAJOUS-Figur $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin(2t)$,
e) der LISSAJOUS-Figur $x(t) = \sin(2t)$, $y(t) = \sin t$.

Hinweis zu e: Bestimme den im ersten Quadranten liegenden Flächeninhalt durch zwei Integrationen.

7.15 Berechne den Inhalt der Fläche, die von den beiden Funktionsgraphen eingeschlossen wird.

a) $f(x) = x^2 - 2$; $g(x) = -x^2$ **b)** $f(x) = x^2 - 4x + 4$; $g(x) = -x^2 + 4x - 2$
c) $f(x) = x^3 - 3x$; $g(x) = x^2 - x$ **d)** $f(x) = x^2$; $g(x) = -x + 2$
e) $f(x) = 0{,}5 \cdot x^3$; $g(x) = -x^2 + 4x$ **f)** $f(x) = x^3$; $g(x) = x^2 + 2x$

7.16 Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \cos x$ zwischen den ersten beiden positiven Nullstellen eingeschlossen wird.

7.17 Berechne den Inhalt der Fläche zwischen zwei Nullstellen.

a) $y = \sin 2x$ **b)** $y = \sin \frac{x}{3}$ **c)** $y = \sin(3x - 1)$
d) $y = \sin x + \cos x$ **e)** $y = \sin x - 3\cos x$ **f)** $y = 2 \cdot \sin 2x + \cos 2x$

7.18 Berechne den Flächeninhalt, der von den Funktionen $y = |x^2 - 3x|$ und $y = 4$ eingeschlossen wird.

7.19 Berechne den Inhalt der Figur, die von der Parabel $y = -2x^2 + 4x - 3$ und den Tangenten an den Stellen $x = -1$ und $x = 3$ eingeschlossen wird.

Volumen

7.20 Berechne das Volumen eines Kegels (Radius *r*, Höhe *h*), wenn die Erzeugende um die y-Achse rotiert.

7.21 Auf dem Intervall [0, 3] betrachten wir ein Stück der Geraden $y = x + 2$. Berechne das Rotationsvolumen, wenn das Geradenstück

a) um die x-Achse, **b)** um die y-Achse rotiert.

7.22 Berechne das Volumen eines Kegelstumpfs (Radien *R* und *r*, Höhe *h*), wenn die Erzeugende **a)** um die x-Achse, **b)** um die y-Achse rotiert.

7.23 Durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist eine Ellipse gegeben. Bestimme das Volumen des bei Rotation

a) um die x-Achse, **b)** um die y-Achse entstehenden Ellipsoids.

7.24 Berechne das Volumen des Körpers, der bei Rotation des folgenden Graphen um die x-Achse entsteht:

a) $y = 1 - x^2,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$ **b)** $y = \frac{1}{x},\ 1 \leqslant x \leqslant 2$

c) $y = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$ **d)** $y = 1 + \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

e) $y = \cosh x,\ -3 \leqslant x \leqslant 3$ **f)** $y = \frac{1}{\cosh x},\ -2 \leqslant x \leqslant 2$

g) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}\cdot(x - 3),\ 0 \leqslant x \leqslant 3$ (Stromlinienkörper)

Hinweis zu f): Substituiere $u = e^{2x}$

7.25 Durch die Parabel $y = 0{,}25x^2$ und die Gerade $y = 1$ wird eine Fläche gebildet. Berechne **a)** den Umfang dieser Fläche (Integration mit der Keplerformel), **b)** den Inhalt dieser Fläche, **c)** das Volumen, das bei der Rotation dieser Fläche um die y-Achse entsteht.

7.26 Eine Hyperbel mit der Gleichung $25x^2 - 4y^2 = 100$ rotiert um die y-Achse.

a) Ermittle das Volumen des dabei entstehenden Hyperboloids für $0 \leqslant y \leqslant 10$.

b) Berechne den Flächeninhalt eines Achsenschnitts dieses Hyperboloids (Integration mit der Simpsonformel bei $n = 2$).

c) In welcher Höhe müsste man den Körper horizontal durchschneiden, damit die beiden entstehenden Körper das gleiche Volumen haben?

(Hinweis: Die entstehende Gleichung ist mit einem Näherungsverfahren zu lösen.)

Bogenlänge

7.27 Ein Körper wird aus einer Höhe von h = 40 m mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 30\ \text{ms}^{-1}$ waagrecht abgeworfen. Berechne die Länge der Wurfbahn (Integration mit der Keplerformel), wenn ihre Gleichung $y = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2$ lautet und $g \approx 10\ \text{ms}^{-2}$ ist.

7.28 Bestimme die Bogenlänge der Kettenlinie $y = \frac{a}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ für $0 \leqslant x \leqslant b$.

7.29 Berechne die Bogenlänge der

a) Zykloide $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

b) Astroide $x(t) = a\cdot\cos^3 t$, $y(t) = a\cdot\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Hinweis zu a): $1 - \cos\alpha\cdot = 1 - \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

7.30 Die Gleichung einer gestreckten Zykloide lautet: $x(t) = r\cdot t - a\cdot\sin t$, $y(t) = r - a\cdot\cos t$. Welchen Weg legt dabei ein Punkt, der a = 25 cm vom Radmittelpunkt entfernt ist, wenn das Rad mit dem Radius r = 30 cm eine Umdrehung ausführt. Löse mit der Simpsonformel bei n = 2.

7.31 Berechne mit Hilfe der Simpsonformel bei n = 2 die Länge der Sinuslinie $y = \sin x$ zwischen 0 und π.

7.32 Welchen Weg legt ein Punkt auf dem Schirm eines Oszilloskops beim Zeichnen der folgenden Lissajous-Figur zurück ($0 \leqslant t < 2\pi$)?

a) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin 2t$ **b)** $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = \sin 2t$ **c)** $x(t) = 2\sin t$, $y(t) = 3\cos t$

Hinweis: Nütze Symmetrien der Figur und verwende zur Integration die Simpsonformel bei n = 2.

7.33 Entlang eines parabelförmigen Brückenbogens (Abb. 7.21) soll von A nach B eine Leitung gelegt werden. Die Gleichung der Parabel lautet: $y = 5 - \frac{1}{80}x^2$. Berechne die Länge der Leitung.

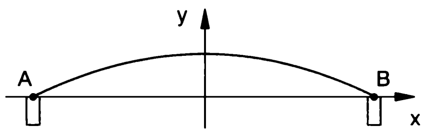


Abb. 7.21

Flächen- und Volumselemente

7.34 Berechne den Inhalt folgender Flächen mit Hilfe von Flächenelementen.

a) Rechtwinkeliges Dreieck (Katheten a, b),

b) gleichschenkeliges Trapez (Parallelseiten a, c, Schenkel b).

7.35 Berechne das Volumen folgender Körper mit Hilfe von Volumselementen.

a) Halbkugel (r),

b) Quadratische Pyramide (a, h).

7.2 Schwerpunkt

7.2.1 Grundlegende Begriffe

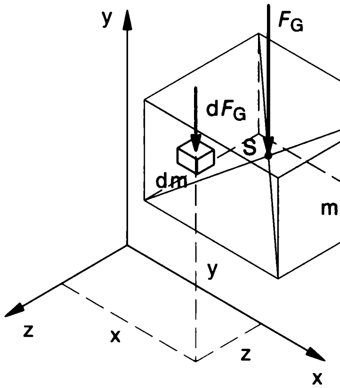


Abb. 7.22 Schwerpunkt

Einen starren Körper der Masse m kann man sich aus vielen Massenelementen aufgebaut denken. In Abb. 7.22 ist ein beliebiges Massenelement dm herausgegriffen. An ihm greift die Gewichtskraft $dF_G = g \cdot dm$ mit g als Fallbeschleunigung an. Die Resultierende der Gewichtskräfte aller Massenelemente ist die Gewichtskraft $F_G = g \cdot m$ des gesamten Körpers. Ihre Wirkungslinie geht durch den **Schwerpunkt** $S(x_S/y_S/z_S)$. Seine Lage errechnet sich aus der Momentengleichung: Summe der Momente der Einzelkräfte ist gleich dem Moment der resultierenden Kraft.

Wendet man die Momentengleichung für die z-Achse an, so erhält man nach Integration über alle Massenelemente: $\int_m x \cdot g\, dm = x_S \cdot g \cdot m$. Das Symbol $\int_m$ drückt aus, dass über alle Massenelemente dm des Körpers zu summieren, d.h. zu integrieren ist. Daraus erhält man nach Kürzen durch g die Schwerpunktskoordinate x_S: $x_S = \frac{1}{m} \cdot \int_m x \cdot dm$.

Entsprechend erhält man z_S durch Anwendung der Momentengleichung auf die x-Achse. Zur Ermittlung von y_S denkt man sich den Körper um 90° um die z-Achse gedreht und wendet die Momentengleichung auf die y-Achse an. Zusammenfassend gilt:

(Massen-)Schwerpunkt: $x_S = \frac{1}{m} \cdot \int_m x \cdot dm;\quad y_S = \frac{1}{m} \cdot \int_m y \cdot dm;\quad z_S = \frac{1}{m} \cdot \int_m z \cdot dm$

Ist der Körper *homogen*, d.h. seine Dichte ϱ konstant, so kann man $m = \varrho \cdot V$ und $dm = \varrho \cdot dV$ setzen. Nach Kürzen durch ϱ erhält man die Koordinaten des *Volumenschwerpunkts*:

Volumenschwerpunkt eines homogenen Körpers:

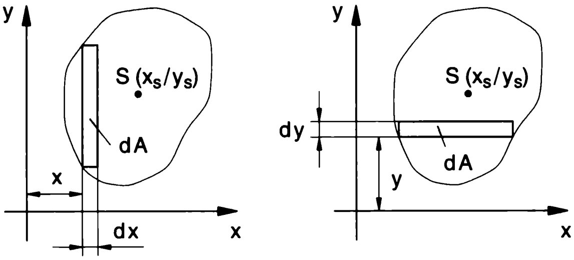
$$x_S = \frac{1}{V} \cdot \int_V x \cdot dV;\quad y_S = \frac{1}{V} \cdot \int_V y \cdot dV;\quad z_S = \frac{1}{V} \cdot \int_V z \cdot dV$$

Für eine in der (x, y)-Ebene liegende dünne Platte oder Scheibe der Grundfläche A und der konstanten Dicke d lässt sich das Volumen V und das Volumselement dV in der Form $V = A \cdot d$ bzw. $dV = d \cdot dA$ schreiben. Daraus ergeben sich nach Einsetzen in die Formeln für die Koordinaten des Volumenschwerpunktes und Kürzen durch d die x- und y-Koordinate des *Flächenschwerpunktes*:

Flächenschwerpunkt (Schwerpunkt einer in der (x, y)-Ebene liegenden ebenen Fläche):

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int\limits_A x \cdot dA = \frac{M_y}{A}; \quad y_S = \frac{1}{A} \cdot \int\limits_A y \cdot dA = \frac{M_x}{A}.$$

$M_x = \int\limits_A y \cdot dA$ heißt *statisches Moment bezüglich der x-Achse*, $M_y = \int\limits_A x \cdot dA$ *statisches Moment bezüglich der y-Achse*.



$dM_y = x \cdot dA$ $\qquad$ $dM_x = y \cdot dA$

Abb. 7.23 Schwerpunkt einer Fläche

In den Formeln für die Schwerpunktskoordinaten einer Fläche A ist das Flächenelement dA näherungsweise der Flächeninhalt für einen beliebig herausgegriffenen Flächenstreifen parallel zur y-Achse bzw. x-Achse. Seine statischen Momente dM_y und dM_x sind mit der Bezeichnung der Abb. 7.23 (näherungsweise) $x \cdot dA$ bzw. $y \cdot dA$.

7.2.2 Flächenschwerpunkt

Beispiel 7.11 : Schwerpunkt einer Dreiecksfläche

Berechne die Koordinaten des Schwerpunktes des rechtwinkligen Dreiecks in Abb. 7.24 mit der Grundseite b = 6 cm und der Höhe h = 3 cm.

Lösung

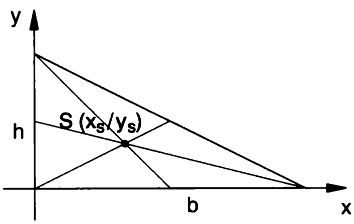


Abb. 7.24 Schwerpunkt eines Dreiecks

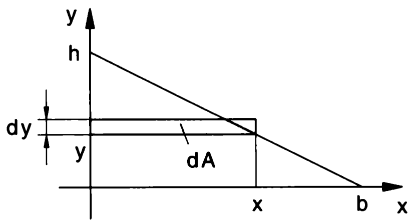


Abb. 7.25 Flächenelement

Berechnung von y_S:

Das Dreieck wird durch dünne, parallel zur x-Achse liegende Rechtecke als Flächenelemente genähert, von denen eines in Abb. 7.25 herausgegriffen ist: $dA = x \cdot dy$. Die gesamte Fläche des Dreiecks ist $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

2. Strahlensatz: $\frac{h - y}{h} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \frac{b}{h} \cdot (h - y)$

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int\limits_A y \cdot dA = \frac{2}{b \cdot h} \cdot \int\limits_0^h \frac{b}{h} \cdot (h - y) \cdot y\, dy = \frac{2}{h^2} \cdot \left[h \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{6} = \frac{h}{3} = 1 \text{ cm}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes von einer Kathete beträgt somit ein Drittel der zugehörigen Höhe (= zweite Kathete). Zur Berechnung des Schwerpunktsabstandes x_S von der Seite h betrachtet man nun h als Grundseite und b als Höhe auf diese Seite. Damit folgt sofort: $x_S = \frac{b}{3} = 2$ cm. Somit: $S\left(\frac{b}{3}/\frac{h}{3}\right) = S(2\text{ cm}/1\text{ cm})$.

Dass der Abstand des Schwerpunktes von einer Seite gleich einem Drittel der zugehörigen Höhe ist, gilt auch bei nicht rechtwinkligen Dreiecken.

Beispiel 7.12 : Schwerpunkt eines dünnen offenen Hohlprofils

Ermittle die Koordinaten des Schwerpunktes des Hohlprofils in Abb. 7.26, wenn der äußere Durchmesser $D = 2 \cdot R = 40{,}0$ mm und der innere Durchmesser $d = 2r = 38{,}0$ mm beträgt.

Lösung

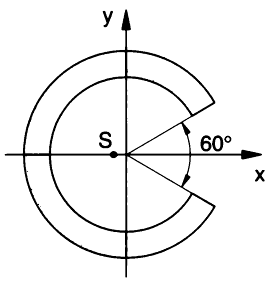


Abb. 7.26 Hohlprofil

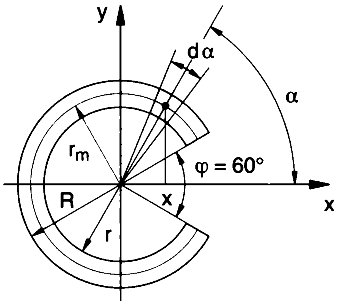


Abb. 7.27 Statisches Moment eines Flächenelementes

Da das Hohlprofil symmetrisch zur x-Achse liegt, ist $y_S = 0$. Der Flächeninhalt A des Profils ist wegen $\varphi = 60°$ gleich $\frac{5}{6}$ des Inhaltes eines "vollen" Kreisrings: $A = \frac{5}{6} \cdot \pi \left(R^2 - r^2\right)$.

Der zu $d\alpha$ gehörige in Abb. 7.27 markierte Ringteil wird, wenn sich R und r nur wenig unterscheiden, durch ein Rechteck mit den Seiten $R - r$ und $r_m \cdot d\alpha$ (= Bogenlänge für einen Winkel im Bogenmaß) umso besser angenähert, je kleiner $d\alpha$ ist. Sein Inhalt ist das Flächenelement dA:

$dA = (R - r) \cdot r_m \cdot d\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(R^2 - r^2\right) \cdot d\alpha$, wobei $r_m = \frac{R + r}{2}$ ist.

Wir bilden nun das statische Moment dM_y dieses Flächenelementes bezüglich der y-Achse. Für den Abstand x seines Schwerpunktes von der y-Achse gilt, wenn wieder $R \approx r$:

$x = r_m \cdot \cos\alpha$. Damit gilt: $dM_y = x \cdot dA = \frac{R + r}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(R^2 - r^2\right) \cdot d\alpha$.

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} dM_y = \frac{6}{5\pi\left(R^2 - r^2\right)} \, 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{R + r}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(R^2 - r^2\right) \cdot d\alpha = \frac{3}{5\pi} (R + r) \left[\sin\alpha\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} =$$

$$= \frac{3}{5\pi} (R + r) \left[\sin\pi - \sin\frac{\pi}{6}\right] = -\frac{3}{10\pi} (R + r) = -3{,}7 \text{ mm}.$$

Eine besondere Situation liegt vor, wenn der Schwerpunkt einer Fläche ermittelt werden soll, die vom *Graphen einer Funktion y = f(x)*, der x-Achse und den Senkrechten x = a und y = b begrenzt wird. (Abb. 7.28). In diesem Fall lassen sich Formeln für die Schwerpunktskoordinaten angeben, ohne dass für diese Fläche geeignete Flächenelemente gesucht werden müssen.

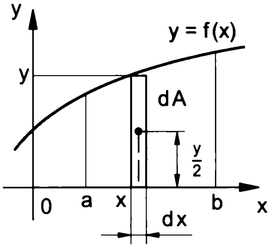


Abb. 7.28 Statisches Moment eines Flächenelementes

Für das Moment dM_x eines Flächenelementes $dA = y \cdot dx$ bezüglich der x-Achse gilt:

$$dM_x = \frac{1}{2}\, y \cdot dA = \frac{1}{2}\, y \cdot y \cdot dx; \quad M_x = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b y^2 \, dx$$

$$dM_y = x \cdot dA = x \cdot y \cdot dx; \quad M_y = \int_a^b x \cdot y \, dx$$

Wegen $M_y = \int_A x \cdot dA = x_S \cdot A$ und $M_x = \int_A y \cdot dA = y_S \cdot A$ folgt:

Schwerpunkt einer Fläche zwischen dem Graphen der Funktion y = f(x) und der x-Achse im Intervall [a, b], wobei $f(x) \geqslant 0$:

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot y \cdot dx; \quad y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx$$

Beispiel 7.13 : Schwerpunkt einer Dreiecksfläche

Berechne die Schwerpunktskoordinaten der Dreiecksfläche von Beispiel 7.11 unter Verwendung, dass diese Fläche vom Graphen einer Funktion und der x-Achse im Intervall [0, b] begrenzt wird.

Lösung

Die Gleichung der Geraden durch BA lautet:

$y = -\frac{h}{b} \cdot x + h$. Mit $A = \frac{b \cdot h}{2}$ folgt:

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_0^b x \cdot y \cdot dx = \frac{2}{b \cdot h} \cdot \int_0^b x \cdot \left(-\frac{h}{b} \cdot x + h\right) \cdot dx = \frac{b}{3}.$$

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_0^b y^2 \cdot dx = \frac{1}{b \cdot h} \cdot \int_0^b \left(-\frac{h}{b} \cdot x + h\right)^2 \cdot dx = \frac{h}{3}.$$

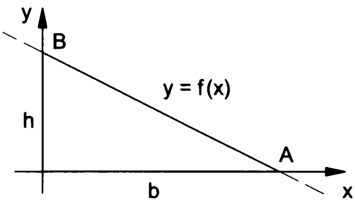
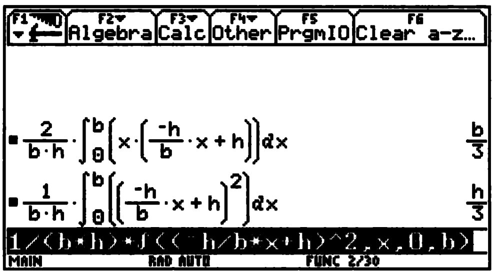


Abb. 7.29 Schwerpunkt eines Dreiecks

Voyage 200



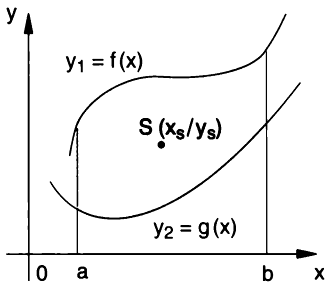


Abb. 7.30 Schwerpunkt einer Fläche zwischen zwei Kurven

In gleicher Weise leitet man auch Formeln für die Schwerpunktskoordinaten her, wenn die Fläche von den Graphen zweier Funktionen begrenzt wird (Abb. 7.30).

Schwerpunkt einer Fläche zwischen zwei Kurven mit $y_1 = f(x)$ und $y_2 = g(x)$, wobei $f(x) \geqslant g(x)$ in $[a, b]$:

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (y_1 - y_2) \cdot dx; \quad y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) \cdot dx.$$

Beispiel 7.14 : Schwerpunkt einer Fläche zwischen zwei Kurven

Ermittle die Schwerpunktlage der in der Abb. 7.31 dargestellten Fläche.

Lösung

Der Graph von $y_1 = f(x)$ für die obere Berandung $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ des Flächenstückes besteht aus zwei Geradenstücken:

$$y_1 = \begin{cases} 7x + 24 & \text{für } -4 \leqslant x \leqslant -3 \\ 3 & \text{für } -3 < x \leqslant 4 \end{cases}.$$

Untere Berandung: $y_2(x) = -4$ für $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

Für den Flächeninhalt gilt: $A = \frac{7+8}{2} \cdot 7 = 52{,}5$.

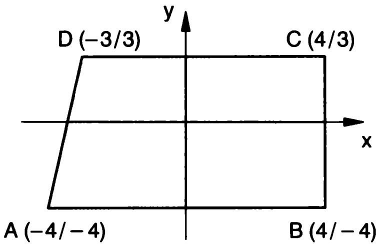


Abb. 7.31

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (y_1 - y_2) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{52{,}5} \cdot \left[\int_{-4}^{-3} x \cdot (7x + 24 - (-4))\, dx + \int_{-3}^{4} x \cdot (3 - (-4))\, dx \right] = 0{,}24$$

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 52{,}5} \cdot \left[\int_{-4}^{-3} \left((7x + 24)^2 - (-4)^2\right) dx + \int_{-3}^{4} \left(3^2 - (-4)^2\right) dx \right] = -0{,}58$$

$S(0{,}24/-0{,}58)$.

7.2.3 Volumenschwerpunkt

Beispiel 7.15 : Schwerpunkt eines homogenen Körpers

Ermittle die Schwerpunktlage des Halbzylinders in Abb. 7.32.

Lösung

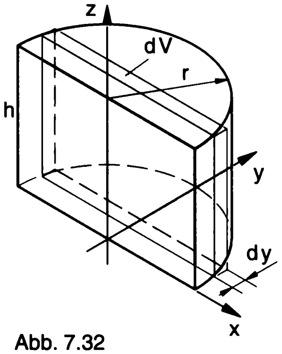


Abb. 7.32

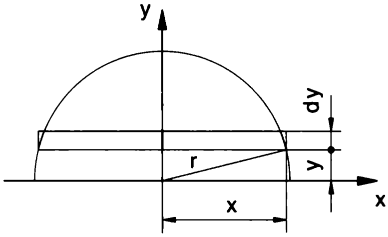


Abb. 7.33

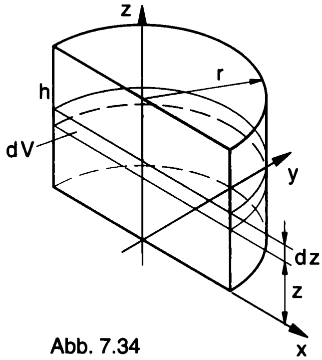


Abb. 7.34

$x_S = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_V x \cdot dV$; $y_S = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_V y \cdot dV$; $z_S = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_V z \cdot dV$. Aus Symmetriegründen ist $x_S = 0$.

Bestimmung von y_S:

Wir zerlegen den Halbzylinder in senkrechte dünne Scheiben (Abb. 7.32 und 7.33), die durch Quader als Volumselemente angenähert werden können. Für ein solches Volumselement dV gilt wegen $x = \sqrt{r^2 - y^2}$: $dV = 2x \cdot dy \cdot h = 2h\sqrt{r^2 - y^2}\,dy$.

Mit $V = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 h$ folgt: $y_S = \frac{2}{\pi r^2 h} \cdot \int\limits_0^r y \cdot 2h\sqrt{r^2 - y^2}\,dy$.

Substitution: $u = r^2 - y^2$; $\frac{du}{dy} = -2y \Rightarrow dy = -\frac{1}{2y}\,du$; Grenzen in u: r^2 und 0.

$$y_S = \frac{4}{\pi r^2} \cdot \int\limits_{r^2}^{0} y \cdot \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{2y}\right) du = \frac{2}{\pi r^2} \cdot \int\limits_0^{r^2} u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{\pi r^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(r^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Bestimmung von z_S (erwartungsgemäß gleich $\frac{h}{2}$):

Die Volumselemente sind nun Halbzylinder kleiner Höhe (Abb. 7.34):

$$dV = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2\,dz \qquad z_S = \frac{2}{\pi r^2 h} \cdot \int\limits_0^h z \cdot \frac{1}{2}\pi r^2\,dz = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_0^h z\,dz = \frac{h}{2}.$$

Somit: $S\left(0 / \frac{4r}{3\pi} / \frac{h}{2}\right)$.

Für einen **Rotationskörper**, der durch Drehung einer Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse erzeugt wird, ist $y_S = z_S = 0$; für die Bestimmung von x_S wird der Körper näherungsweise in Volumselemente in Form von *Zylinderscheiben* zerlegt, deren Inhalt leicht angegeben werden kann. Entsprechendes gilt für einen Rotationskörper, der durch Drehung einer Kurve $x = g(y)$ um die y-Achse erzeugt wird.

Beispiel 7.16 : Schwerpunkt eines Rotationskörpers

Ermittle die Lage des Schwerpunktes einer Halbkugel.

Lösung

Die Halbkugel ist ein Rotationskörper, der durch Rotation eines Viertelkreises etwa um die x-Achse erzeugt wird (Abb. 7.35). Für ein beliebig herausgegriffenes Volumselement, eine Zylinderscheibe, gilt mit $y^2 = r^2 - x^2$: $dV = \pi\, y^2\, dx = \pi\, (r^2 - x^2)\, dx$. Weiters ist $V = \frac{2\pi r^3}{3}$ das Volumen der Halbkugel. Damit folgt:

$$x_S = \frac{1}{V}\cdot\int_V x\cdot dV = \frac{\pi}{\frac{2r^3\pi}{3}}\cdot\int_0^r x\cdot(r^2 - x^2)\cdot dx =$$

$$\frac{3}{2r^3}\cdot\left[r^2\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^r = \frac{3}{2r^3}\cdot\frac{r^4}{4} = \frac{3r}{8}.$$

$$S\left(\frac{3r}{8}/0/0\right).$$

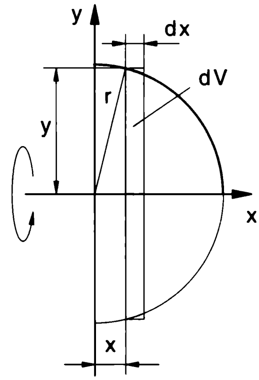


Abb. 7.35 Schwerpunkt einer Halbkugel

Die GULDIN'schen[15] Regeln

Gemäß Abb. 7.36 ist $y_S = \frac{1}{2A}\cdot\int_a^b y^2\, dx$. Das Volumen des durch Rotation der Fläche A um die x-Achse erzeugten Drehkörpers beträgt: $V = \pi\cdot\int_a^b y^2\, dx$. Durch Vergleich ergibt sich das überraschende Ergebnis: $V = 2\pi\, y_S\cdot A$

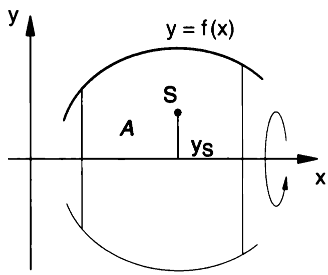


Abb. 7.36 Zur 1. GULDIN'schen Regel

Diese Aussage ist bereits die 1. GULDIN'sche Regel, gezeigt in einer speziellen Situation. Ohne Herleitung wird die 2. GULDIN'sche Regel formuliert, die einen Zusammenhang zwischen einem Linienschwerpunkt und der Oberfläche eines Rotationskörpers ausspricht:

1. GULDIN'sche Regel:

Das Volumen eines Rotationskörpers ist das Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche mit dem Weg des Flächenschwerpunktes bei einer Umdrehung.

2. GULDIN'sche Regel:

Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist das Produkt aus der Bogenlänge des erzeugenden Kurvenstücks mit dem Weg des Schwerpunktes des Kurvenstücks bei einer Umdrehung.

Anmerkung: Die GULDIN'schen Regeln gelten nur, wenn die erzeugende Fläche bzw. das erzeugende Kurvenstück die Rotatationsachse nicht schneidet, sondern höchstens berührt.

[15] Paul GULDIN, 1577 – 1643, schweizer Jesuitenpater und Mathematiker, der auch in Wien und Graz wirkte

Beispiel 7.17: Schwerpunkt einer Halbkreisfläche – 1. GULDIN'sche Regel

Ermittle die Schwerpunktlage einer Halbkreisfläche mit Hilfe der 1. GULDIN'schen Regel.

Lösung

Die Halbkreisfläche A (Abb. 7.37) erzeugt bei Rotation um die y-Achse eine Kugel. Nach der 1. GULDIN'schen Regel gilt daher, wenn V das Kugelvolumen ist: $V = 2\pi x_S \cdot A$. Daraus kann x_S berechnet werden:

$$x_S = \frac{V}{2\pi \cdot A} = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}}{2\pi \cdot \frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

In gleicher Weise hätte man die Kugel auch durch Drehung eines Halbkreises um die x-Achse erzeugen können und in diesem Fall als Schwerpunktslage $y_S = \frac{4r}{3\pi}$ erhalten.

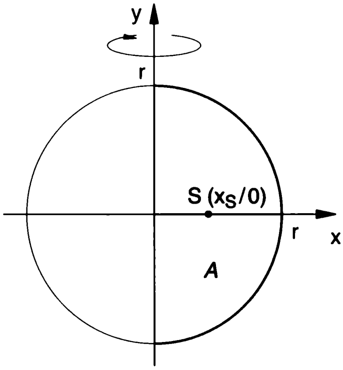


Abb. 7.37 1. GULDIN'sche Regel

Beispiel 7.18: Schwerpunkt eines Halbkreisbogens – 2. GULDIN'sche Regel

Ermittle die Schwerpunktlage einer Halbkreisbogens mit Hilfe der 2. GULDIN'schen Regel.

Lösung

Der Halbkreisbogen (Abb. 7.38) erzeugt bei einer Rotation um die y-Achse eine Kugeloberfläche O. Der Schwerpunkt S des Halbkreisbogens legt dabei einen Kreis mit dem Radius x_S zurück. Aus der 2. GULDIN'schen Regel folgt: $O = 2\pi x_S \cdot \pi r$. Daraus kann x_S berechnet werden:

$$x_S = \frac{O}{2\pi^2 r} = \frac{4\pi r^2}{2\pi^2 r} = \frac{2r}{\pi}.$$

Auch hier hätte man genauso gut eine Rotation eines Halbkreisbogens um die x-Achse verwenden können.

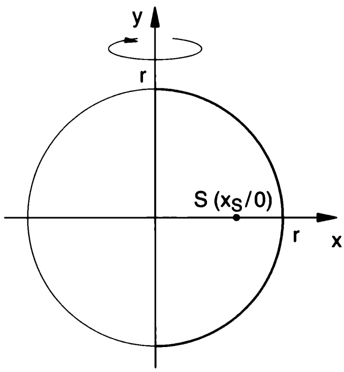


Abb. 7.38 2. GULDIN'sche Regel

Volumenschwerpunkt eines homogenen Körpers:

$$x_S = \frac{1}{V}\int_V x \cdot dV; \quad y_S = \frac{1}{V}\int_V y \cdot dV; \quad z_S = \frac{1}{V}\int_V z \cdot dV$$

Seine Berechnung kann mit Hilfe von Volumselementen erfolgen. Dies ist besonders bei Rotationskörpern einfach, wo die Volumselemente schmale Zylinderscheiben sind.

Flächenschwerpunkt:

$x_S = \frac{M_y}{A}$; $y_S = \frac{M_x}{A}$ mit den *statischen Momenten* $M_y = \int\limits_V x\,dA$ und $M_x = \int\limits_V y\,dA$.

Die Berechnung kann mit Hilfe der Flächenelemente bzw. ihrer statischen Momente erfolgen.

Sonderfälle:

a) Die Fläche liegt *zwischen dem Graphen der Funktion y = f(x) und der x-Achse* im Intervall $[a, b]$, wobei $f(x) \geqslant 0$: $x_S = \frac{1}{A} \cdot \int\limits_a^b x \cdot y \cdot dx$; $y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int\limits_a^b y^2\,dx$

b) Die Fläche liegt *zwischen zwei Kurven* mit $y_1 = f(x)$ und $y_2 = g(x)$, wobei $f(x) \geqslant g(x)$ in $[a, b]$: $x_S = \frac{1}{A} \cdot \int\limits_a^b x \cdot (y_1 - y_2)\,dx$; $y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int\limits_a^b (y_1^2 - y_2^2)\,dx$

1. GULDIN'sche Regel: Das Volumen eines Rotationskörpers ist das Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche mit dem Weg des Flächenschwerpunktes bei einer Umdrehung.

2. GULDIN'sche Regel: Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist das Produkt aus der Bogenlänge des erzeugenden Kurvenstücks mit dem Weg des Schwerpunktes des Kurvenstücks bei einer Umdrehung.

Aufgaben

Flächenschwerpunkt

7.36 Bestimme die Lage des Schwerpunktes eines Rechteckes mit der Länge a und der Breite b

a) mit Hilfe von Flächenelementen,

b) als Fläche zwischen dem Graph einer Funktion und der x-Achse.

7.37 Bestimme die Lage des Schwerpunktes des gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis c und dem Schenkel a

a) mit Hilfe von Flächenelementen,

b) als Fläche zwischen dem Graph einer Funktion un der x-Achse.

7.38 Bestimme die Lage des Schwerpunktes jener Fläche, die durch den Funktionsgraphen, der x-Achse und den Senkrechten $x = a$ bzw. $x = b$ gegeben ist.

a) $y = (x-2)^2$;	$x = 0$ bzw. $x = 3$	**b)** $y = \ln x$;	$x = 1$ bzw. $x = 3$
c) $y = \sqrt{x}$;	$x = 1$ bzw. $x = 4$	**d)** $y = -3x + 3$;	$x = -2$; $x = 1$
e) $y = -\frac{1}{2}(x^2 + 2)$;	$x = -2$; $x = 3$	**f)** $y = -\frac{1}{2}(x^2 + 2)$;	$x = 0$; $x = 3$
g) $y = \sin x$;	$x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$	**h)** $y = e^x + 3$;	$x = -1$; $x = 3$

7.39 Bestimme die Lage des Schwerpunktes jener Fläche, die von beiden Kurven eingeschlossen wird.

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = -(x + 1)^2 + 5$ **b)** $f(x) = e^x$, $g(x) = 2x^2$ (2 Flächen!)

c) $f(x) = -x^2 - 2$, $g(x) = -0{,}5x - 5$ **d)** $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$

7.40 Berechne mit Hilfe der Integralrechnung die Lage des Schwerpunktes der Fläche des Dreiecks ABC in Abb. 7.39.

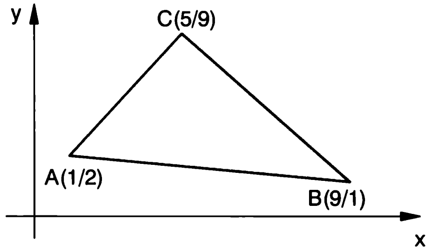
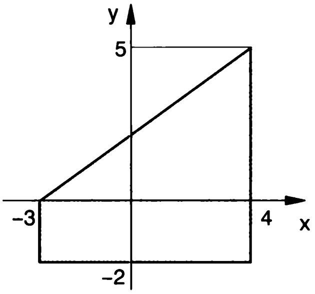


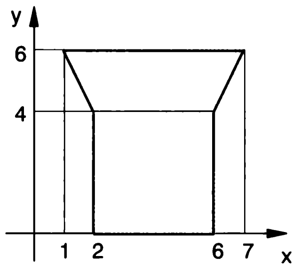
Abb. 7.39 Zu Aufgabe 7.40

7.41 Bestimme die Lage des Schwerpunktes der folgenden Fläche:

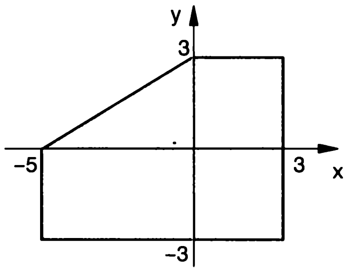
a)



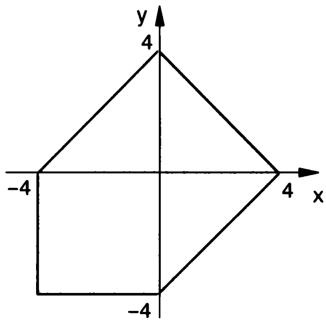
b)



c)

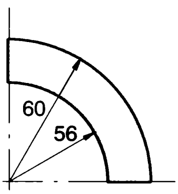


d)

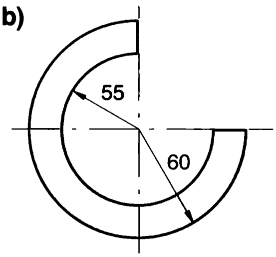


7.42 Bestimme die Lage des Schwerpunktes des folgenden Profils (Maße in mm).

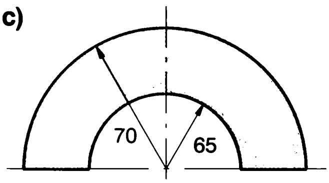
a)



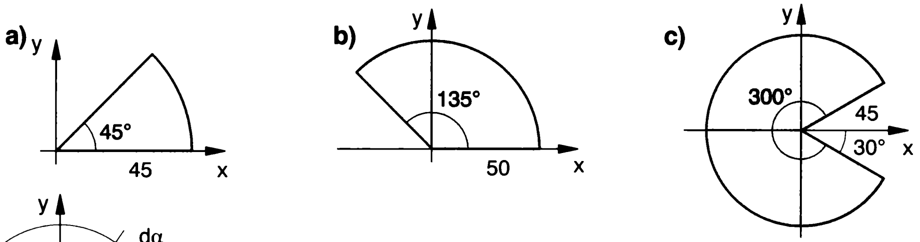
b)

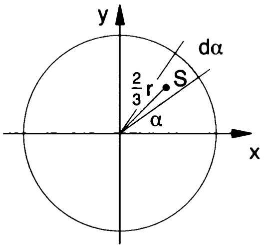


c)



7.43 Bestimme die Lage des Schwerpunktes des folgenden Kreissektors (Maße in mm):





Hinweis: Der Abstand des Schwerpunktes S des Flächenelementes vom Kreismittelpunkt beträgt $\frac{2}{3}$ r.

7.44 Bestimme die Lage des Schwerpunktes des Kreissegments, das die Gerade $y = 2$ vom Kreis $x^2 + y^2 = 16$ abschneidet.

Volumenschwerpunkt

7.45 Bestimme die Lage des Schwerpunktes eines Kegels mit der Höhe $h = 10$ cm und dem Radius $r = 4$ cm.

Hinweis: Ein Kegel entsteht durch Rotation eines Geradenstücks mit einem Randpunkt im Koordinatenursprung um eine der Koordinatenachsen.

7.46 Bestimme die Lage des Schwerpunktes eines Hyperboloides, das durch Drehung der Hyperbel $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ um die y-Achse zwischen $y = -2$ und $y = 5$ entsteht.

7.47 Bestimme die Lage des Schwerpunktes eines Hyperboloides, das durch Drehung der Hyperbel $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ um die x-Achse im Intervall $[-3, 4]$ entsteht.

7.48 Bestimme die Lage des Schwerpunktes eines Paraboloides, das durch Drehung der Parabel $x^2 = 8y$ um die y-Achse im Intervall $[-2, 2]$ entsteht!

7.49 Bestimme die Lage des Schwerpunktes eines Paraboloides, das durch Drehung der Parabel $y^2 = 8x$ um die x-Achse im Intervall $[0, 4]$ entsteht!

GULDIN'sche Regeln

7.50 Ermittle mit Hilfe der 1. GULDIN'schen Regel das Volumen eines Kegels mit dem Radius $r = 10$ cm und der Höhe $h = 20$ cm!

7.51 Berechne mit Hilfe der 1. GULDIN'schen Regel das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation des Flächenstücks zwischen dem Funktionsgraphen f(x) und der x-Achse im Intervall $[0, a]$ um die y-Achse entsteht!

a) $f(x) = x^2$, $a = 3$ **b)** $f(x) = x + 2$, $a = 4$ **c)** $y = e^x$, $a = 2$ **d)** $y = \sin x$, $a = \frac{\pi}{2}$

7.52 Berechne mit Hilfe der ersten GULDIN'schen Regel das Volumen eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h.

7.53 Bestimme mit Hilfe der 2. GULDIN'schen Regel den Mantel eines Kegels mit dem Radius r und der Höhe h.

7.54 Bestimme mit Hilfe der 2. GULDIN'schen Regel die Lage des Schwerpunktes eines Viertelkreisbogens (Radius r).

7.3 Trägheitsmomente

7.3.1 Massenträgheitsmoment

Unter dem Trägheitsmoment I eines Massenpunktes mit der Masse m bezüglich einer (Dreh-) Achse versteht man das Produkt $m \cdot r^2$, wobei r der Normalabstand des Massenpunktes von der Achse ist.

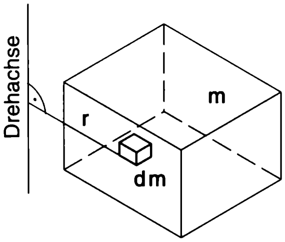


Abb. 7.40 Massenträgheitsmoment

Der Körper mit der Masse m wird in Massenelemente dm zerlegt und für jedes Element das elementare Trägheitsmoment $dI = r^2 \cdot dm$ bezüglich der Drehachse gebildet. Wird die Anzahl der Massenelemente beliebig groß und jedes einzelne Element unbegrenzt klein, so wird aus der Summe über alle elementaren Trägheitsmomente das bestimmte Integral $I = \int_m r^2\, dm$, das **Massenträgheitsmoment** des gesamten Körpers. Ist der Körper homogen mit der Dichte ρ, so gilt: $I = \rho \cdot \int_V r^2\, dV \cdot$ Diese Annahme wird im Folgenden gemacht.

Die Integration führt im Allgemeinen zu Mehrfachintegralen. Man kann dies vermeiden, wenn der Körper in Volumselemente zerlegt werden kann, wobei in jedem einzelnen Volumselement dV *alle Punkte (annähernd) gleichen Abstand von der Drehachse haben*. Daher ist auf die Wahl der Volumselemente besonderes Augenmerk zu richten.

Das Massenträgheitsmoment I hat für die Rotation die gleiche Bedeutung wie die Masse m für die Translation.

Beispiel 7.19 : "Polares" Massenträgheitsmoment einer Zylinderscheibe

Berechne das Massenträgheitsmoment eines homogenen Vollzylinders der Dichte ρ mit dem Radius R und der Höhe h in Bezug auf die Zylinderachse ("polares" Trägheitsmoment).

Lösung

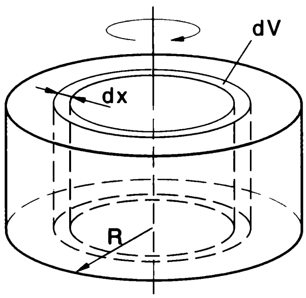


Abb. 7.41 Vollzylinder

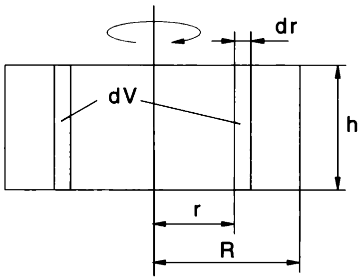


Abb. 7.42 Achsenschnitt

Wir suchen eine Zerlegung des Körpers derart in Volumselemente, dass man mit einer einzigen Integration das Auslangen findet. Dies ist bei einer Zerlegung in koaxiale Hohlzylinder der Fall. In Abb. 7.41 ist ein Volumselement für diese Zerlegung eingezeichnet. Aus Abb. 7.42 entnimmt man, dass $dV = 2\pi r \cdot h \cdot dr$ ist.

Da (näherungsweise) jeder Punkt eines solchen Volumselementes den gleichen Abstand r von der Drehachse hat, ist

$$I = \rho \int_V r^2\, dV = \rho \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \cdot h\, dr = 2\pi\rho \cdot h \int_0^R r^3\, dr = 2\pi\rho\cdot h \cdot \frac{R^4}{4} = \rho \cdot R^2\pi \cdot h \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} m \cdot R^2.$$

Beispiel 7.20 : Massenträgheitsmoment einer dünnen Stange

Berechne das Trägheitsmoment einer dünnen Stange der Dichte ρ mit der Länge *l* und dem Querschnitt A bezüglich einer Achse normal zur Stange durch ihren Schwerpunkt.

Lösung

Die Stange wird in Volumselemente in Form von Scheiben der Stärke dr zerlegt, von denen in Abb. 7.43 ein Volumselement mit $dV = A \cdot dr$ herausgegriffen ist. Ist die Stange hinreichend dünn, so hat jeder Punkt näherungsweise den gleichen Abstand r von der Drehachse. Daher:

$$I = \rho \int_V r^2\, dV = \rho \int_{-l/2}^{l/2} r^2 A\, dr = 2\rho A \int_0^{l/2} r^2\, dr = 2\rho A \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{l}{2}} =$$

$$= 2\rho A \frac{l^3}{3 \cdot 8} = \rho \cdot A \cdot l \cdot \frac{l^2}{12} = \frac{1}{12} m \cdot l^2.$$

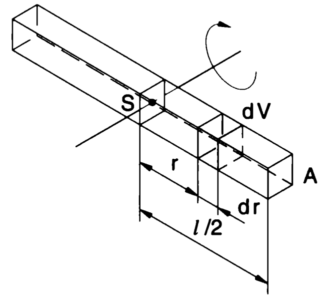


Abb. 7.43 Drehachse durch den Schwerpunkt einer dünnen Stange

Beispiel 7.21 : "Axiales" Trägheitsmoment einer dünnen Zylinderscheibe

Berechne das Massenträgheitsmoment einer dünnen Zylinderscheibe der Dichte ρ mit dem Radius R und der Dicke h in Bezug auf die Achse durch einen Durchmesser ("axiales" Trägheitsmoment).

Lösung

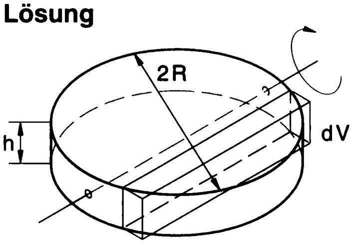


Abb. 7.44 Dünne Zylinderscheibe

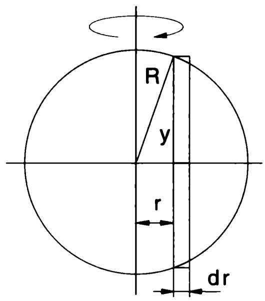


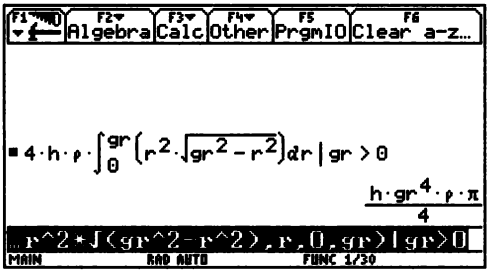
Abb. 7.45 Schnitt durch die Scheibe

In Abb. 7.44 ist ein beliebiges Volumselement herausgegriffen. Ist die Zylinderscheibe hinreichend dünn, so hat wieder jeder Punkt des Volumselementes von der Drehachse annähernd den gleichen Abstand r. Es gilt (siehe Abb. 7.45): $dV = 2y\, dr \cdot h = 2h\sqrt{R^2 - r^2} \cdot dr$.

$$I = \rho \int_V r^2\, dV = \rho \int_{-R}^{R} r^2 2h\sqrt{R^2 - r^2}\, dr = 4\rho h \int_0^R r^2 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr.$$

Dieses Integral kann mittels partieller Integration $\left(u = r,\ v' = r \cdot \sqrt{R^2 - r^2}\right)$, Integraltafel oder mit CAS gelöst werden.

Voyage 200




```
gr bezeichnet den Großbuchstaben
R. Die Bedingung gr > 0 verein-
facht das Ergebnis, da das CAS
dann nicht berücksichtigen muss,
dass gr auch negativ sein könnte.
```

$I = \rho\,\pi\,R^2 h \cdot \frac{R^2}{4} = \frac{1}{4} m \cdot R^2.$

Beispiel 7.22 : Trägheitsmoment einer Kugel bezüglich eines Durchmessers

Berechne das Trägheitsmoment einer Kugel der Dichte ρ mit dem Radius R bezüglich eines Durchmessers.

Lösung

Die Volumselemente sind koaxiale Hohlzylinder der Wandstärke dr, deren Achsen mit der Drehachse zusammenfallen. Abb. 7.46 zeigt einen Achsenschnitt durch die Kugel und ein Volumselement. Es gilt:

$dV = 2\pi r \cdot 2y\, dr = 4\pi r \cdot \sqrt{R^2 - r^2}\, dr.$

$$I = \rho \int_V r^2\, dV = \rho \int_0^R r^2 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2}\, dr = 4\pi\rho \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr.$$

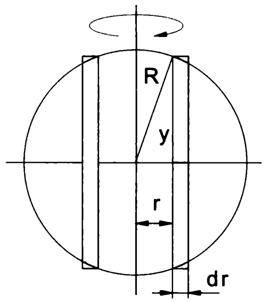


Abb. 7.46 Zu Beispiel 7.22

Ermittlung dieses Integrals durch zweifache partielle Integration, Integraltafel oder mit CAS.

$I = \rho\, \frac{4\pi R^3}{3} \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} m\, R^2$

Satz von STEINER[16]:
Ist I das Trägheitsmoment eines Körpers (Abb. 7.47) bezüglich einer Drehachse und I_S sein Trägheitsmoment bezüglich einer im Abstand a verlaufenden *parallellen* Schwerpunktsachse, so gilt: $I = I_S + m \cdot a^2$

Der mathematische Beweis erfolgt über eine Zerlegung des Integrals für das Trägheitsmoment I im Raum.

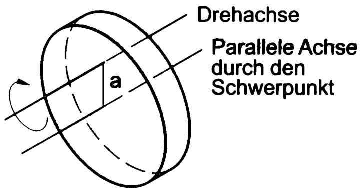


Abb. 7.47 STEINER'scher Satz

16 Jacob STEINER, (1796 – 1863), schweizer Mathematiker

Beispiel 7.23 : Anwendung des Satzes von Steiner

Berechne das Trägheitsmoment einer dünnen Stange der Dichte ρ mit der Länge l und dem Querschnitt A bezüglich einer Drehachse wie in Abb. 7.48 angegeben.

Lösung

Für das Massenträgheitsmoment I_S bezüglich der angegebenen Schwerpunktsachse gilt (siehe Beispiel 7.20): $I_S = \frac{1}{12} m \cdot l^2$. Daher ist nach dem Satz von Steiner:

$$I = I_S + m \cdot \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{1}{12} m \cdot l^2 + \frac{1}{16} m \cdot l^2 = \frac{7}{48} m \cdot l^2.$$

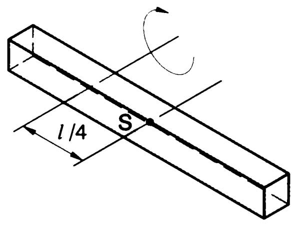


Abb. 7.48 Die Drehachse geht nicht durch den Schwerpunkt

Aufgaben

7.55 Berechne das Massenträgheitsmoment eines Hohlzylinders der Dichte ρ mit dem äußeren Radius r_a, dem inneren Radius r_i und der Höhe h bezüglich seiner Symmetrieachse.

Hinweis: Das Trägheitsmoment des Hohlzylinders ist die Differenz der Trägheitsmomente zweier Vollzylinder.

7.56 Berechne das Massenträgheitsmoment einer Hohlkugel der Dichte ρ mit dem äußeren Radius r_a und dem inneren Radius r_i bezüglich eines Durchmessers.

Hinweis: Das Trägheitsmoment der Hohlkugel ist die Differenz der Trägheitsmomente zweier Vollkugeln.

7.57 Berechne das Massenträgheitsmoment eines Zylinders der Dichte ρ mit dem Radius R und der Höhe h bezüglich einer Achse, die mit einer Erzeugenden des Zylinders zusammenfällt.

7.58 Berechne das Massenträgheitsmoment einer Kugel (Dichte ρ, Radius R) in Bezug auf eine Achse, die Tangente an die Kugel ist.

Hinweis zu den Aufgaben 7.59 bis 7.62: Zerlege den Rotationskörper wie in Abb. 7.6 bzw. Abb. 7.7 auf Seite 237 in Zylinderscheiben. Jede Zylinderscheibe hat nach Beispiel 7.19 das Massenträgheitsmoment $\frac{1}{2} y^2\,dm$ mit $dm = \rho \cdot dV$.

7.59 Berechne das Massenträgheitsmoment eines geraden Kreiskegels (Dichte ρ, Radius R, Höhe h) bezüglich seiner Symmetrieachse.

7.60 Berechne das Massenträgheitsmoment eines Drehkegelstumpfs (Dichte ρ, Radien R und r, Höhe h) bezüglich seiner Symmetrieachse.

7.61 Der Graph der Funktion $y = \frac{1}{2} x^2$ rotiert um die x-Achse. Bestimme das Massenträgheitsmoment des dabei zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 4$ entstehenden Körpers bezüglich der Rotationsachse.

7.62 Berechne das Massenträgheitsmoment eines Ellipsoids der Dichte ρ, das bei der Drehung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bei der Drehung um die x-Achse entsteht.

7.3.2 Flächenträgheitsmoment

Bei der Biegebeanspruchung gerader Balken kommt es nicht nur auf die Querschnittsgröße, sondern auch auf die Gestalt des Querschnitts an. Dies kommt im Auftreten von sogenannten *Flächenträgheitsmomenten*, auch *Flächenmomente 2. Ordnung* genannt, zum Ausdruck. Sie sind eigentlich geometrische Größen; man gelangt jedoch mathematisch von einem Massenträgheitsmoment in ähnlicher Weise zu einem (axialen) Flächenträgheitsmoment wie vom Massenschwerpunkt zum Flächenschwerpunkt.

In der Festigkeitslehre wird die Längsachse etwa eines Trägers als x-Achse bezeichnet. Daher wird dort bei Querschnittsflächen die Abszisse oft mit y und die Ordinate mit z bezeichnet.

Bei einer in der (x, y)-Ebene liegende Fläche A spricht man von einem **axialen** oder **äquatorialen Flächenträgheitsmoment**, wenn die Bezugsachse in der Ebene der Fläche liegt. Man definiert:

$I_x = \int_A y^2\, dA$ heißt **axiales Flächenträgheitsmoment bezüglich der x-Achse.**

$I_y = \int_A x^2\, dA$ heißt **axiales Flächenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse.**

Die Summe $I_x + I_y = \int_A r^2\, dA$ mit $r^2 = x^2 + y^2$ heißt *polares Trägheitsmoment* I_p. Die Bezugsachse, hier die z-Achse, steht senkrecht zur Flächenebene. Ein polares Trägheitsmoment erhält man allgemein durch Addition von zwei axialen Trägheitsmomenten bei normal aufeinander stehende Bezugsachsen. Ihr Schnittpunkt heißt *Pol*.

Der bei Massenträgheitsmomenten gültige Satz von STEINER gilt in entsprechender Form auch bei Flächenträgheitsmomenten.

Satz von STEINER: $I = I_S + A \cdot a^2$

Das Flächenträgheitsmoment I bezüglich einer Achse ist gleich dem Flächenträgheitsmoment bezüglich einer Parallelachse durch den Schwerpunkt vermehrt um das Produkt aus dem Flächeninhalt A mit dem Quadrat des Achsenabstandes a.

Das sogenannte *Deviationsmoment* oder "gemischte Flächenträgheitsmoment" $I_{xy} = \int xy\, dA$ bezieht sich auf zwei zueinander senkrecht stehende Achsen. Es wird analog wie die axialen Trägheitsmomente gebildet.

Aus der Definition eines Flächenträgheitsmomentes als bestimmtes Integral folgt:

Die Trägheitsmomente von Teilflächen können für das Trägheitsmoment der gesamten Fläche addiert oder subtrahiert werden, wenn man sich dabei stets auf dieselbe Achse bezieht.

Die Berechnung eines Flächenträgheitsmomentes kann ohne "Doppelintegral" erfolgen, wenn die Fläche A so in Flächenelemente zerlegt werden kann, dass in jedem einzelnen Flächenelement *alle Punkte (annähernd) gleichen Abstand zur Bezugsachse haben.*

Beispiel 7.24 : Eine Grundaufgabe bei axialen Flächenträgheitsmomenten

Berechne die axialen Flächenträgheitsmomente eines Rechtecks in Bezug auf seine Seiten b und h sowie das polare Trägheitsmoment I_p bezogen auf den Ursprung als Pol.

Lösung

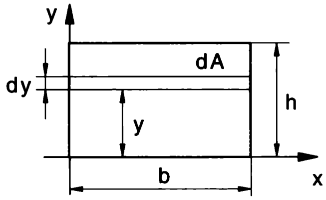


Abb. 7.49 Berechnung von I_x

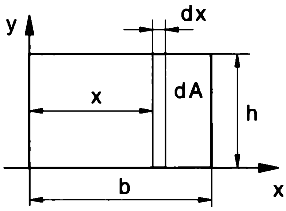


Abb. 7.50 Berechnung von I_y

Zur Berechnung von I_x wählen wir als Flächenelemente parallel zur x-Achse verlaufende rechteckige Flächenstreifen der Stärke dy. Abb. 7.49 zeigt ein solches Flächenelement $dA = b \cdot dy$. Alle Punkte dieses Flächenelementes haben (annähernd) gleichen Abstand von der x-Achse als Bezugsachse. Daher: $I_x = \int\limits_A y^2\, dA = \int\limits_0^h y^2 \cdot b\, dy = b \int\limits_0^h y^2\, dy = \frac{b \cdot h^3}{3}$.

Zur Berechnung von I_y werden die Rechtecksstreifen parallel zur y-Achse gewählt.

Mit $dA = h \cdot dx$ ist: $I_y = \int\limits_A x^2\, dA = \int\limits_0^b x^2 \cdot h\, dx = h \int\limits_0^b x^2\, dx = \frac{h \cdot b^3}{3}$.

Polares Trägheitsmoment bezogen auf den Ursprung:

$I_p = I_x + I_y = \frac{b \cdot h^3}{3} + \frac{h \cdot b^3}{3} = \frac{1}{3} h \cdot b \left(h^2 + b^2\right) = \frac{1}{3}\, A \cdot d^2$ mit d als Diagonale des Rechtecks.

Bezeichnen s_x und s_y parallel zur x- bzw. y-Achse verlaufende Achsen durch den Schwerpunkt $S\left(\frac{b}{2} / \frac{h}{2}\right)$, so gilt nach dem Satz von STEINER:

$I_x = I_{s_x} + bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{s_x} = \frac{bh^3}{12}$; $I_y = I_{s_y} + bh \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{s_y} = \frac{hb^3}{12}$.

Beispiel 7.25 : Trägheitsmomente einer Fläche unter der Kurve mit y = f(x)

Berechne die axialen Flächenträgheitsmomente I_x und I_y des vom Graphen der stetigen Funktion $y = \sqrt{3 - x}$ und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossenen Flächenstücks.

Lösung

Man zerlegt die Fläche in rechteckige Streifen der Breite dx *parallel zur y-Achse*. In Abb. 7.51 ist ein derartiges Flächenelement herausgegriffen.

$dI_y = x^2 \cdot dA = x^2 \cdot y\, dx$

$dI_x = \frac{1}{3} y^3 \cdot dx$

$I_y = \int\limits_A dI_y = \int\limits_0^3 x^2 \cdot y\, dx = \int\limits_0^3 x^2 \cdot \sqrt{3 - x}\, dx.$

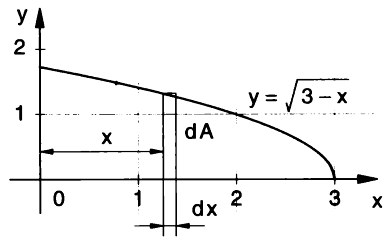


Abb. 7.51 Trägheitsmoment einer Fläche unter einer Kurve

Bestimmung dieses Integrals mittels Substitution $u^2 = 3 - x$ (und in der Folge $x = 3 - u^2$, $dx = -2u\,du$) oder CAS ergibt $\frac{144}{35}\sqrt{3} \approx 7{,}13$.

$$I_x = \int_A dI_x = \frac{1}{3}\int_0^3 y^3\,dx = \frac{1}{3}\int_0^3 \left(\sqrt{3-x}\right)^3 dx = \frac{1}{3}\int_0^3 (3-x)^{3/2}\,dx = \frac{6}{5}\sqrt{3} \approx 2{,}08.$$

Beispiel 7.26 : Trägheitsmomente bei einer Kreisfläche

Berechne das Trägheitsmoment einer Kreisfläche mit dem Radius R bezüglich einer Tangente.

Lösung

Zur Berechnung des gefragten Trägheitsmomentes I_t wird zuerst das Trägheitsmoment bezüglich einer zu t parallelen Achse durch den Kreismittelpunkt (Schwerpunkt) bestimmt. Abb. 7.52 zeigt eine dazu vorteilhafte Lage des Koordinatensystems.

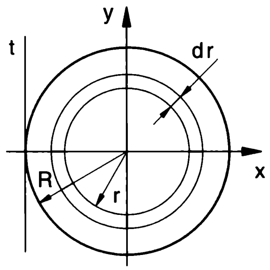


Abb. 7.52

Man könnte nun wie in Beispiel 7.25 vorgehen.

Einfacher ist es, zuerst das polare Trägheitsmoment I_p bezüglich des Koordinatenursprungs zu berechnen.

Dann kann wegen $I_p = I_x + I_y$ und $I_x = I_y$ das Trägheitsmoment I_y berechnet werden. Schließlich ist der Satz von STEINER anzuwenden.

In Abb. 7.52 ist ein geeignetes Flächenelement herausgegriffen: Alle Punkte des Elements haben vom Koordinatenursprung (Pol) annähernd gleichen Abstand. Es gilt: $dA = 2\pi \cdot r\,dr$.

$$I_p = \int_A r^2\,dA = \int_0^R r^2\,2\pi r\,dr = 2\pi\int_0^R r^3\,dr = 2\pi\,\frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

$$I_y = \frac{1}{2} I_p = \frac{\pi R^4}{4}; \quad I_t = I_y + \pi R^2 \cdot R^2 = \frac{5\pi}{4} R^4.$$

Im Überblick: Trägheitsmomente

Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers der Dichte ρ:

$$I = \int_m r^2\,dm = \rho\int_V r^2\,dV.$$

Bei einigen wichtigen Körpern gelingt es, den Körper bezüglich der Drehachse so in Volumselemente zu zerlegen, dass eine "einfache" Integration (kein Doppel- oder Dreifachintegral) möglich wird.

Flächenträgheitsmomente (oder Flächenmomente 2. Ordnung):

Axiales (oder **äquatoriales**) **Flächenträgheitsmoment** einer Fläche A: Bezugsachse liegt in der Ebene der Fläche. $I_x = \int_A y^2\,dA$ und $I_y = \int_A x^2\,dA$ sind die axialen Trägheitsmomente bezüglich der x- bzw. der y-Achse.

Polares Trägheitsmoment einer Fläche A: Bezugsachse steht senkrecht zur Fläche.

Bei einigen wichtigen Flächen gelingt es, die Fläche bezüglich der Bezugsachse so in Flächenelemente zu zerlegen, dass eine "einfache" Integration (kein Doppelintegral) möglich wird.

Die Trägheitsmomente von *Teilflächen* können für das Trägheitsmoment der Achse bezogen wird.

Satz von Steiner: $I = I_S + m \cdot a^2$ bzw. $I = I_S + A \cdot a^2$

Das (Massen-/Flächen-)Trägheitsmoment I bezüglich einer Achse ist gleich dem (Massen-/Flächen-)Trägheitsmoment bezüglich einer Parallelachse durch den Schwerpunkt vermehrt um das Produkt aus der Masse m/ dem Flächeninhalt A mit dem Quadrat des Achsenabstandes a.

Aufgaben

7.63 Bestimme das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Dreiecks in Abb. 7.53 bezüglich

a) der Kathete b,

b) einer parallel zu b verlaufenden Schwerpunktsachse,

c) einer parallel zu b verlaufenden Achse durch den Punkt B.

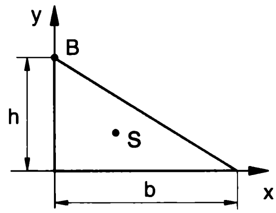


Abb. 7.53

7.64 Bestimme das Trägheitsmoment eines allgemeinen Dreiecks mit der Grundlinie g und der Höhe h bezüglich der Grundlinie durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke.

7.65 Bestimme das Trägheitsmoment eines regelmäßigen Achtecks der Seite a bezogen auf eine Diagonale durch den Schwerpunkt.

7.66 Bestimme die Trägheitsmomente bezüglich der zu den Koordinatenachsen parallelen Schwerpunktsachsen des Flächenstücks in Beispiel 7.25.

7.67 Bestimme das Trägheitsmoment eines Halbkreises (Radius R) bezüglich des den Halbkreis begrenzenden Durchmessers.

7.68 Bestimme die Trägheitsmomente bezüglich der Koordinatenachsen sowie der dazu parallelen Schwerpunktsachsen für die Fläche unter dem Graphen von

a) $y = x^2$, [0, 2] **b)** $y = \sqrt{x}$, [0, 4] **c)** $y = e^{x/2}$, [0, 2] **d)** $y = \frac{1}{x+1}$, [0, 1]

7.4 Biegelinien

Ein Träger unterliege etwa durch Schüttgut, Windlast, Eigengewicht und dgl. einer kontinuierlichen Belastung. Sie ist durch die **Streckenlast** (Belastungsintensität) $q(x)$ in kN/m gegeben (Abb. 7.54). Die Last auf dem Träger der Breite dx ist näherungsweise gleich $q(x) \cdot dx$. Die Gesamtlast ergibt sich als Inhalt der Fläche unter dem Graphen von $q(x)$ und der x-Achse (dem Träger).

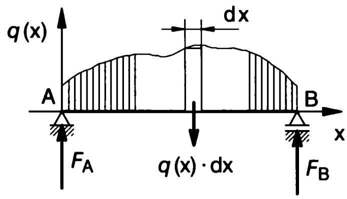


Abb. 7.54 Träger mit kontinuierlicher Belastung

Die so genannte **Querkraft** $Q(x)$ in einer Entfernung x des Trägers vom Festlager A ist die Summe aller senkrechten Kräfte von A bis zur betrachteten Stelle x: $Q(x) = F_A - \int_0^x q(x)\, dx$.

Das Integral "summiert" die Beiträge aller Lasten $q(x) \cdot dx$ von 0 bis x. Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung folgt daraus der wichtige Zusammenhang $Q'(x) = -q(x)$.

Das **Biegemoment** $M_b(x)$ an der Stelle x ist die Summe der Momente aller links von x angreifenden Kräfte bezogen auf die Stelle x. Es kann hergeleitet werden, dass $M_b' = Q(x)$ ist.

Die Linie, welche die im unbelasteten Zustand gerade Trägerachse bei der Biegung annimmt, heißt **Biegelinie** $y(x)$. Für kleine Durchbiegungen kann die so genannte *Differentialgleichung der Biegelinie* $y'' = -\frac{M_b}{E\,I}$ hergeleitet werden. Dabei ist E der Elastizitätsmodul des Trägerwerkstoffs und I das Flächenträgheitsmoment bezogen auf die y-Achse. In der Mechanik ist es üblich, positive Werte von $M_b(x)$ und von $y(x)$ nach unten aufzutragen.

Somit besteht folgender Zusammenhang zwischen der Querkraft $Q(x)$, dem Biegemoment $M_b(x)$ und der Biegelinie $y(x)$:

$$Q'(x) = -q(x) \qquad M_b' = Q(x) \qquad y'' = -\frac{M_b}{E\,I}$$

Man erhält also durch viermaliges Integrieren aus der Streckenlast $q(x)$ die Biegelinie $y(x)$. Da $q(x)$ meist eine Polynomfunktion ist, sind die Integrationen einfach. Schwieriger ist das Aufstellen von Randbedingungen, mit denen die anfallenden Integrationskonstanten festgelegt werden.

Treten Einzelkräfte auf, hat der Graph von $Q(x)$ Sprungstellen und der Graph von $M_b(x)$ Knicke. Trotzdem bleibt die Biegelinie $y(x)$ stetig und auch differenzierbar. Darauf wird nicht eingegangen.

Beispiel 7.27 : Stützträger mit Gleichlast

Ein zweifach gestützter Träger der Länge L besitzt eine konstante Streckenlast $q(x) = q_0$. Berechne daraus durch vierfache Integration die Biegelinie $y(x)$. Verwende dabei die Randbedingungen: $M_b(0) = M_b(L) = 0$ und $y(0) = y(L) = 0$.

Lösung

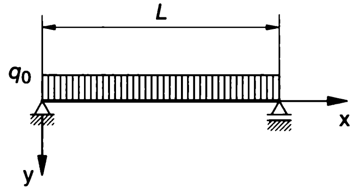


Abb. 7.55

Aus $Q'(x) = -q(x) = -q_0$ folgt

$$Q(x) = -\int q(x)\, dx = -q_0 \cdot x + C_1.$$

Aus $M_b' = Q(x) = -q_0 \cdot x + C_1$ folgt

$$M_b = \int Q(x)\, dx = -q_0 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2.$$

Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$M_b(0) = -q_0 \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0.$$

$$M_b(L) = -q_0 \cdot \frac{L^2}{2} + C_1 \cdot L = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = \frac{q_0}{2} L.$$

Damit lautet der Querkraftverlauf $Q(x) = -q_0 \cdot x + \frac{q_0}{2} L = q_0 \left(\frac{L}{2} - x\right)$ und der Biegemomentverlauf $M_b = -q_0 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q_0}{2} L \cdot x = \frac{q_0}{2} \cdot \left(L \cdot x - x^2\right)$.

Aus $y'' = -\frac{M_b}{E\,I} = -\frac{q_0}{2\,E\,I}\left(L \cdot x - x^2\right)$ folgt:

$$y' = -\frac{q_0}{2\,E\,I}\left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C_3 \quad \text{und} \quad y = -\frac{q_0}{2\,E\,I}\left(L \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C_3 \cdot x + C_4.$$

Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$y(0) = -\frac{q_0}{2\,E\,I}\left(L \cdot \frac{0^3}{6} - \frac{0^4}{12}\right) + C_3 \cdot 0 + C_4 = 0 \;\Rightarrow\; C_4 = 0.$$

$$y(L) = -\frac{q_0}{2\,E\,I}\left(L \cdot \frac{L^3}{6} - \frac{L^4}{12}\right) + C_3 \cdot L = 0 \;\Rightarrow\; C_3 = \frac{q_0\, L^3}{24\, E\, I}.$$

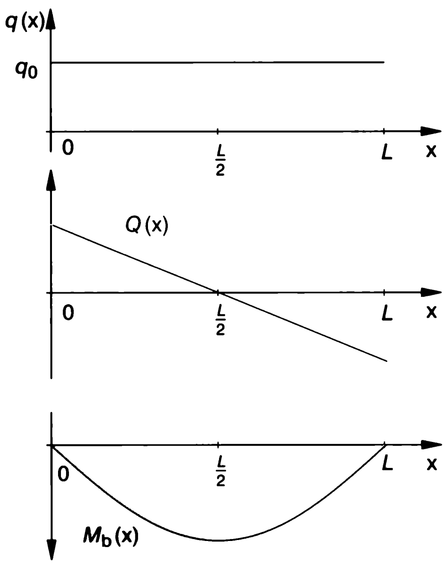


Abb. 7.56 Querkraft- und Momentverlauf

Nach Einsetzen der Integrationskonstanten C_3 und C_4 erhält man schließlich als Gleichung der *Biegelinie*:

$$y(x) = \frac{q_0}{24\,E\,I} \cdot \left(L^3\, x - 2\, L\, x^3 + x^4\right)$$

Abb. 7.56 zeigt den Querkraft- und Biegemomentverlauf. Abb. 7.57 zeigt die Biegelinie für einen Träger der Länge L = 4,00 m, einer konstanten Streckenlast von q_0 = 8,0 kN/m und einer "Biegesteifigkeit" $E \cdot I = 8 \cdot 10^6$ Nm^2.

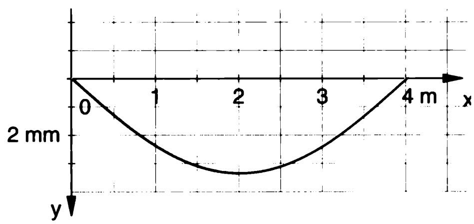


Abb. 7.57 Biegelinie

Beispiel 7.28 : Halbseitig eingespannter Träger bei "Dreieckslast" mit MathCad

Berechne die Biegelinie für einen halbseitig eingespannten Träger (Abb. 7.58) der Länge L mit einer "Dreieckslast" $q(x) = \frac{q_0}{L} \cdot x$ aus dem Biegemomentverlauf $M_b = -\frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^3}{6}$ und den durch die Einspannung gegebenen Randbedingungen $y(L) = 0$ und $y'(L) = 0$.

Lösung

MC

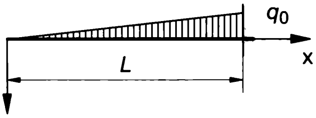


Abb. 7.58

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = -\frac{M_b}{E\,I} \text{ ersetzen, } M_b = \frac{-q_0}{L} \cdot \frac{x^3}{6}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} y(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^3}{E \cdot I}$$

Erste Integration: $\frac{d}{dx} y(x) = \int \frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^3}{6} \cdot \frac{1}{E \cdot I}\, dx + C_1 \rightarrow \frac{d}{dx} y(x) = \frac{1}{24} \cdot \frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^4}{E \cdot I} + C_1$

Dabei wurde der Integrand im Integral von oben kopiert und dem Integral eine Integrationskonstante hinzugefügt. Terme werden auch im Folgenden kopiert.

C_1 aus $y'(L) = 0$: $\frac{1}{24} \cdot \frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^4}{E \cdot I} + C_1 = 0 \;\Big|\; \begin{array}{l} \text{ersetzen, } x = L \\ \text{auflösen, } C_1 \end{array} \rightarrow \frac{-1}{24} \cdot q_0 \cdot \frac{L^3}{E \cdot I}$

Zweite Integration mit Hinzufügen einer weiteren Integrationskonstante:

$$y(x) = \int \left(\frac{1}{24} \cdot \frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^4}{E \cdot I} + \frac{-1}{24} \cdot q_0 \cdot \frac{L^3}{E \cdot I}\right) dx + C_2 \rightarrow y(x) = \frac{1}{120} \cdot \frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^5}{E \cdot I} - \frac{1}{24} \cdot q_0 \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \cdot x + C_2$$

C_2 aus $y(L) = 0$: $\frac{1}{120} \cdot \frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^5}{E \cdot I} - \frac{1}{24} \cdot q_0 \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \cdot x + C_2 = 0 \;\Big|\; \begin{array}{l} \text{ersetzen, } x = L \\ \text{auflösen, } C_2 \end{array} \rightarrow \frac{1}{30} \cdot q_0 \cdot \frac{L^4}{E \cdot I}$

Damit lautet die *Gleichung der Biegelinie:*

$$y(x) = \frac{1}{120} \cdot \frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^5}{E \cdot I} - \frac{1}{24} \cdot q_0 \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \cdot x + \frac{1}{30} \cdot q_0 \cdot \frac{L^4}{E \cdot I} \text{ vereinfachen}$$

$$\rightarrow y(x) = \frac{1}{120} \cdot q_0 \cdot \frac{(x^5 - 5 \cdot L^4 \cdot x + 4 \cdot L^5)}{L \cdot E \cdot I}$$

Aufgaben

7.69 Ermittle die Biegelinie für einen beidseitig eingespannten Träger der Länge L mit einer konstanten Streckenlast q_0 (siehe Beispiel 5.15, Seite 157) unter Verwendung der Randbedingungen: $y(0) = y(L) = 0$, $y'(0) = y'(L) = 0$.

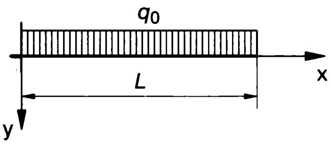


Abb. 7.59

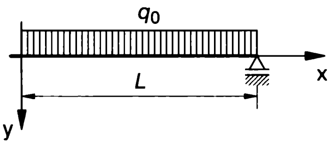


Abb. 7.60

7.70 Bestimme die Biegelinie für einen einseitig eingespannten Träger (Abb. 7.59) der Länge L mit konstanter Streckenlast q_0 unter Verwendung der Randbedingungen: $Q(0) = q_0 \cdot L$, $M_b(L) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

7.71 Berechne die Biegelinie eines Trägers (Abb. 7.60) der Länge L mit konstanter Streckenlast, der am linken Ende fest eingespannt ist und am rechten Ende ein freies Lager besitzt, unter Verwendung der Randbedingungen $M_b(L) = 0$, $y(0) = y(L) = 0$, $y'(0) = 0$.

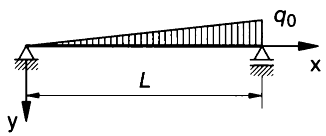


Abb. 7.61

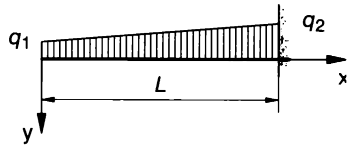


Abb. 7.62

7.72 Berechne die Biegelinie eines Trägers (Abb. 7.61) der Länge mit einer "Dreieckslast" $q(x)$ mit einem festen Lager am linken und einem freien Lager am rechten Ende.

a) Aus $M_b(x) = \frac{q_0 L}{6} \cdot x - \frac{q_0}{6L} \cdot x^3$ und den Randbedingungen $y(0) = y(L) = 0$.

b) Aus $q(x) = \frac{q_0}{L} \cdot x$ und den Randbedingungen $M_b(0) = M_b(L) = 0$, $y(0) = y(L) = 0$.

7.73 Berechne die Biegelinie für einen halbseitig eingespannten Träger (Abb. 7.62) der Länge L mit einer "Trapezlast" $q(x) = (q_2 - q_1) \cdot \frac{x}{L} + q_1$ und den Randbedingungen $Q(0) = 0$, $M_b(0) = 0$, $y(L) = 0$ und $y'(L) = 0$.

7.5 Mittelwerte von Funktionen

Mit Hilfe von bestimmten Integralen können Mittelwerte auch von Funktionen gebildet werden. Dies spielt beispielsweise in der Elektrotechnik bei der Messung von zeitlich veränderlichen Strömen oder Spannungen eine Rolle, deren Frequenz deutlich höher als die Eigenfrequenz des Messinstrumentes ist. Zeigerinstrumente zeigen in diesem Fall einen Mittelwert an. Man unterscheidet zwei Arten von Mittelwerten:

Mittelwerte einer Funktion im Intervall [a, b]:

Linearer oder **arithmetischer Mittelwert** $m_1 = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

Quadratischer Mittelwert $m_2 = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx}$

Anmerkungen:

(1) Für $f(x) \geqslant 0$ in $[a, b]$ ist wegen $\int_a^b f(x)\,dx = m_1 \cdot (b - a)$ der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von $y = f(x)$ und der x-Achse in $[a, b]$ gleich dem Flächeninhalt eines *Rechtecks* mit den Seiten m_1 und $b - a$.

(2) Für den quadratischen Mittelwert spricht, dass Abweichungen von der Nulllinie $y = 0$ in positiver und negativer Richtung immer positiv sind. Bei gleich starken Abweichungen in positiver und negativer Richtung würde der lineare Mittelwert null geben.

Beispiel 7.29 : Linearer und quadratischer Mittelwert

Bestimme den linearen und quadratischen Mittelwert der Funktion $y = f(x)$ über dem Intervall $[1, 3]$, wenn **a)** $\frac{x^2}{2}$ **b)** $\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$

Lösung

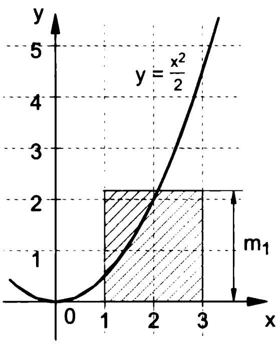


Abb. 7.63 Linearer Mittelwert zu a)

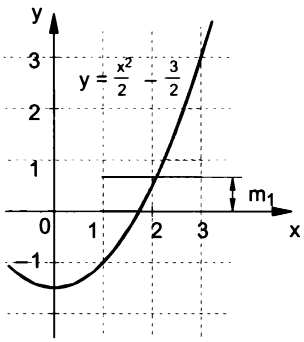


Abb. 7.64 Linearer Mittelwert zu b)

Zu **a)** Linearer Mittelwert: $m_1 = \frac{1}{3-1} \cdot \int_1^3 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{13}{6} \approx 2{,}17$ (Abb. 7.63)

Der Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ ist gleich dem Inhalt des Rechtecks mit den Seiten m_1 und der Intervalllänge $b - a$.

Quadratischer Mittelwert:

$$m_2 = \sqrt{\frac{1}{3-1} \cdot \int_1^3 \left[\frac{x^2}{2}\right]^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_1^3 x^4\,dx} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot \frac{242}{5}} \approx 2{,}46$$

Zu **b)** Linearer Mittelwert:

$$m_1 = \frac{1}{3-1} \cdot \int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^3 = \frac{2}{3} \approx 0{,}67 \quad \text{(Abb. 7.64)}$$

Quadratischer Mittelwert:

$$m_2 = \sqrt{\frac{1}{3-1} \cdot \int_1^3 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\right]^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_1^3 \left(x^4 - 6x^2 + 9\right) dx} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot \frac{72}{5}} \approx 1{,}34.$$

In der Elektrotechnik wird auch der so genannte **Gleichrichtwert** einer Wechselspannung oder eines Wechselstromes betrachtet. Darunter versteht man den linearen Mittelwert des *Betrages* der Größe. In der Elektrotechnik wird der lineare Mittelwert des Stromes $i(t)$ mit $\bar{i}$, der Gleichrichtwert mit $\overline{|i|}$, *jeweils über eine Periode T* gemittelt, bezeichnet. Entsprechend sind die Bezeichnungen bei der Spannung $u(t)$.

Beispiel 7.30 : Linearer Mittelwert und Gleichrichtwert

Bestimme den linearen Mittelwert und den Gleichrichtwert des Wechselstromes in Abb. 7.65 über eine Periode T (Strom in mA, Zeit in ms).

Lösung

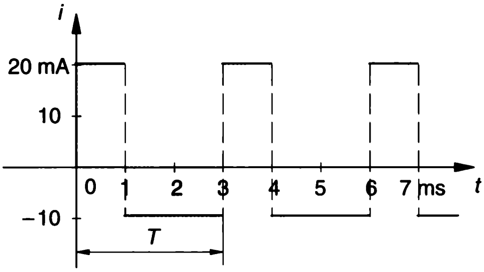


Abb. 7.65 Der lineare Mittelwert ist null

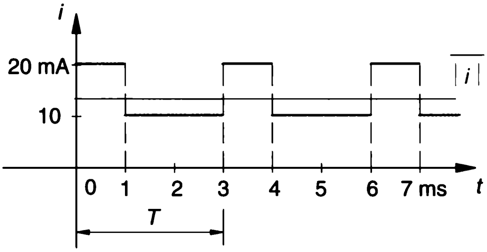


Abb. 7.66 Der Gleichrichtwert ist nicht null

Rechnet man nur mit den Zahlenwerten der Stromstärke in mA und der Zeit in ms, so sind die orientierten Flächeninhalte $\int_0^1 i\,\mathrm{d}t = 20$ und $\int_1^3 i\,\mathrm{d}t = -20$. Der lineare Mittelwert $\bar{i}$ über eine Periode $T = 3$ ist daher gleich null.

Da $\int_0^3 |i|\,\mathrm{d}t = 20 + 20 = 40$, ist der Gleichrichtwert: $\overline{|i|} = \frac{1}{3} \cdot 40\text{ mA} \approx 13{,}3\text{ mA}$.

Beispiel 7.31 : Gleichrichtwert eines sinusförmigen Stromes

Bestimme den Gleichrichtwert eines sinusförmigen Stromes $i = \hat{i} \cdot \sin \omega t$.

Lösung

Der Gleichrichtwert ist der lineare (arithmetische) Mittelwert des Betrages $|\bar{i}|$ über eine volle Periode. Er ist gleich dem linearen Mittelwert von i über eine halbe Periode.

$$\overline{|i|} = \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{i} \cdot \sin(\omega t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}} \hat{i} \cdot \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

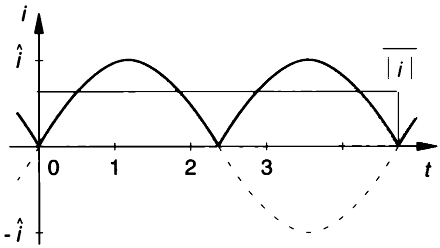


Abb. 7.67 Gleichrichtwert eines sinusförmigen Stromes

Substitution $\alpha = \omega \cdot t = \frac{2\pi}{T}\,t$:

$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{T}{2\pi}\,\mathrm{d}\alpha$; Grenzen: $t = 0 \Rightarrow \alpha = 0$; $t = T \Rightarrow \alpha = 2\pi$

$$\overline{|i|} = \frac{2}{T}\int_0^{\pi} \hat{i} \cdot \sin\alpha \cdot \frac{T}{2\pi}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\hat{i}}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\hat{i}}{\pi} \cdot \left[-\cos\alpha\right]_0^{\pi} = \frac{\hat{i}}{\pi} \cdot [1 + 1] = \frac{2}{\pi}\,\hat{i} \approx 0{,}637\,\hat{i}.$$

Geräte zur Messung von Wechselstromgrößen zeigen den so genannten **Effektivwert** an. Dies ist der *quadratische Mittelwert über eine Periode T*. Die Formelzeichen für die Effektivwerte von Strom und Spannung lauten I und U.

Ein (nicht notwendigerweise sinusförmiger) Wechselstrom $i(t)$ mit dem Effektivwert I erzeugt in einem OHM'schen Widerstand R während einer Periode T die gleiche Wärmemenge wie ein Gleichstrom dieser Größe.

Begründung: Für die Wärmeleistung p an einem Widerstand R gilt: $p = u \cdot i = i^2 \cdot R$. Daher ist die während des Zeitelementes dt verrichtete Wechselstromarbeit dW (annähernd) gleich $dW = i^2 \cdot R \cdot dt$. Aufsummierung über alle Zeitelemente einer Periode T, d.h. Integration über t, ergibt $W = \int\limits_0^T i^2 R\, dt$. Setzt man diese Arbeit gleich der Arbeit $I^2 \cdot R \cdot T$ eines konstanten Stromes I während der gleichen Zeitdauer T, so folgt nach Kürzen durch R: $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int\limits_0^T i^2\, dt}$.

Beispiel 7.32 : Effektivwert einer sinusförmigen Größe

Bestimme den Effektivwert I eines sinusförmigen Stromes $i = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$.

Lösung

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int\limits_0^T \left[\hat{i} \cdot \sin(\omega t)\right]^2 dt} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{T} \cdot \int\limits_0^T \sin^2(\omega t)\, dt}.$$

Wir berechnen zuerst das Integral mit Hilfe der Substitution $\alpha = \omega \cdot t = \frac{2\pi}{T} t$:

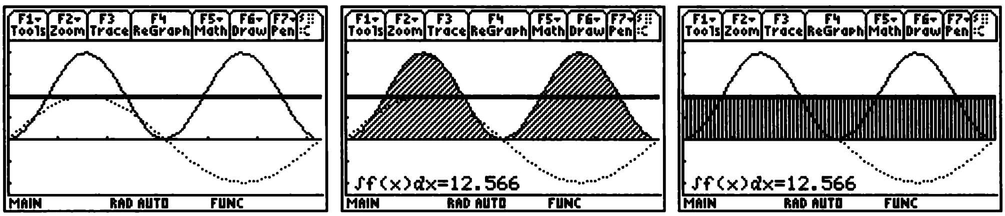
$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow dt = \frac{T}{2\pi} d\alpha$; Grenzen: $t = 0 \Rightarrow \alpha = 0$; $t = T \Rightarrow \alpha = 2\pi$

$$\int\limits_0^T \sin^2(\omega t)\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \cdot \frac{T}{2\pi}\, d\alpha = \frac{T}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha)\, d\alpha = \frac{T}{4\pi}\left[\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{T}{4\pi} \cdot 2\pi = \frac{T}{2}$$

Somit: $I = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \cdot \hat{i}$.

Der Effektivwert eines sinusförmigen Wechselstromes oder einer sinusförmigen Wechselspannung ergibt sich aus der Amplitude $\hat{i}$ bzw. $\hat{u}$ durch Division von $\sqrt{2}$.



Zur graphischen Veranschaulichung wird ein Strom $i = 2*\sin x$ mit dem Effektivwert $I = 2/\sqrt{2}$ betrachtet. Dazu wird im y-Editor bei y1(x)der Term 2*sinx, für i^2 bei y2(x) der Term (y1(x))^2 und bei y3(x) das Quadrat des Effektivwertes, also 2, eingegeben.

Weiters wird durch Integration (im Graphikfenster F5 7)von 0 bis T = 2π bis auf den Faktor R sowohl die vom Wechselstrom erzeugte Wärmemenge $\int_0^{2\pi} i^2\,dt$ als auch die von einem Gleichstrom der Größe I erzeugte Wärmemenge $I^2 = 2$ ermittelt. Die beiden Wärmemengen sind gleich.

Beispiel 7.33 : Gleichrichtwert und Effektivwert mit MathCad

Berechne den Gleichricht- und Effektivwert der in der Abb. 7.68 dargestellten Dreieckspannung.

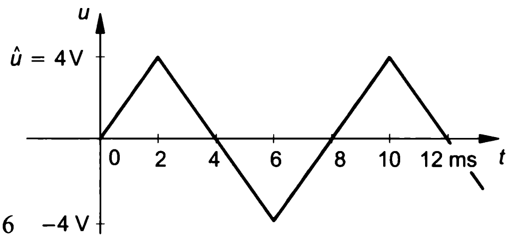


Abb. 7.68 Dreieckspannung

Lösung

MC

Gleichungen der abschnittsweise gegebenen Funktion:

$u_1(t) := 2 \cdot t \quad u_2(t) := -2 \cdot t + 8 \quad u_3(t) := 2 \cdot t - 16$

Periodendauer: $T := 8$

Gleichrichtwert: $\frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^2 |u_1(t)|\,dt + \int_2^6 |u_2(t)|\,dt + \int_6^8 |u_3(t)|\,dt \right) \rightarrow 2$

Effektivwert: $\sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left[\int_0^2 (u_1(t))^2\,dt + \int_2^6 (u_2(t))^2\,dt + \int_6^8 (u_3(t))^2\,dt \right]} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{3}$

Allgemein beträgt der Effektivwert bei einer symmetrischen Dreieckspannung $\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$.

Beispiel 7.34 : Elementare Berechnung des Gleichricht- und Effektivwertes

Berechne den Gleichricht- und Effektivwert der in der Abb. 7.69 dargestellten Spannung.

Lösung

Die Integration kann hier elementar erfolgen, da nur Inhalte von Rechtecksflächen zu bestimmen sind.

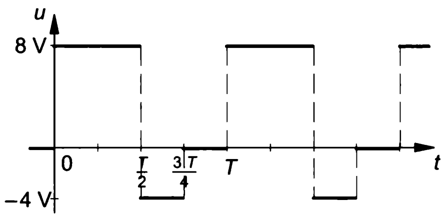


Abb. 7.69 Spannungsverlauf

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u|\,dt = \frac{1}{T}\left(8\text{V} \cdot \frac{T}{2} + |-4\text{V}| \cdot \frac{T}{4}\right) = 5\text{V}$$

$$U^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2\,dt = \frac{1}{T}\left(8^2\text{V}^2 \cdot \frac{T}{2} + (-4\text{V})^2 \cdot \frac{T}{4}\right) = 36\text{V}^2; \quad U = \sqrt{36\text{V}^2} = 6\text{V}$$

Beispiel 7.35 : Wirkleistung eines sinusförmigen Wechselstroms

Berechne die Wirkleistung eines elektrischen Wechselstromes, wenn $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$ und $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ mit φ als Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

Lösung

Die Wirkleistung P ist der über die Periodendauer T gebildete lineare Mittelwert der Momentanleistung $p = u \cdot i$. $P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u \cdot i \, dt = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin \omega t \, dt$.

Die Integration ergibt mit $\omega = 2\pi/T$: $P = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{T} \cdot \frac{T}{2} \cos \varphi = U I \cos \varphi$. Dabei sind $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$ und $I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$ die Effektivwerte von Spannung und Strom.

Im Überblick: Mittelwerte von Funktionen

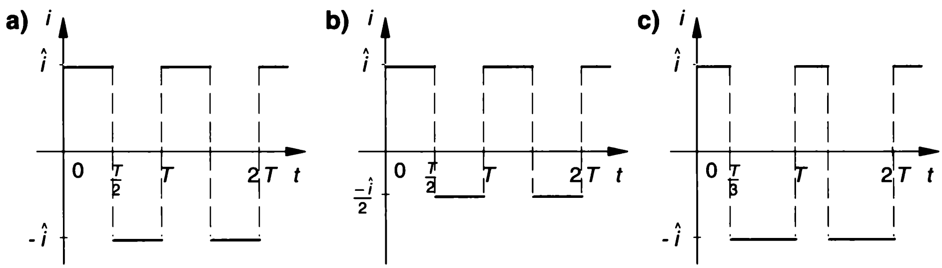
Linearer oder **arithmetischer Mittelwert** von y = f(x) in [a, b]: $m_1 = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \, dx$

Quadratischer Mittelwert von y = f(x) in [a, b]: $m_2 = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$.

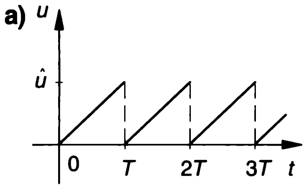
Von besonderer Bedeutung sind die beiden Mittelwerte bei *periodischen* Strom- oder Spannungsverläufen in der Elektrotechnik. Der **Gleichrichtwert** ist der lineare Mittelwert des Betrages der Größe, der **Effektivwert** der quadratische Mittelwert der Größe in beiden Fällen *während einer Periode T*.

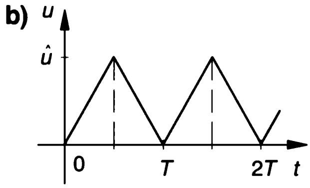
Aufgaben

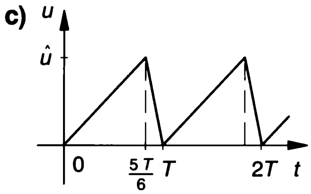
7.74 Ermittle den arithmetischen Mittelwert, den Gleichricht- und Effektivwert des dargestellten Stromes $i(t)$.



7.75 Ermittle den arithmetischen Mittelwert und den Effektivwert der dargestellten Spannung $u(t)$. Führe die Rechnung mit T = 2 ms.



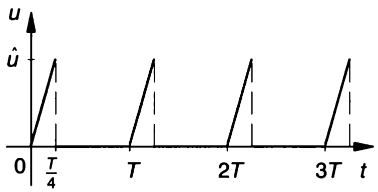


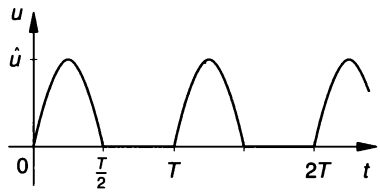


7.76 Ermittle den arithmetischen Mittelwert und den Effektivwert der dargestellten Spannung $u(t)$.

a) Sägezahnimpuls

b) Sinusspannung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ nach einer Einweggleichrichtung

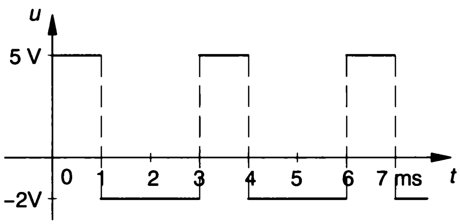


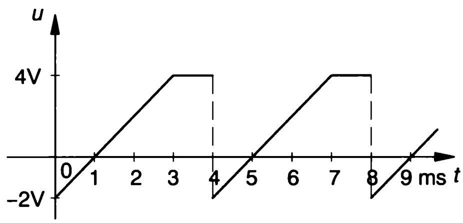


7.77 Ermittle den arithmetischen Mittelwert, den Gleichrichtwert und den Effektivwert der dargestellten Spannung

a) Rechteckspannung

b) Mischspannung

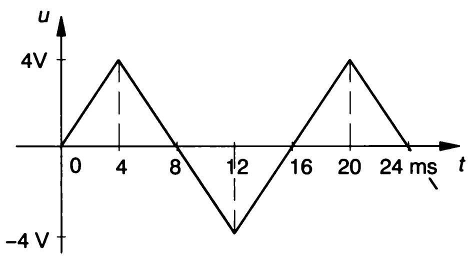


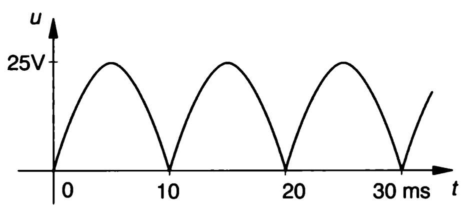


7.78 Ermittle den arithmetischen Mittelwert, den Gleichrichtwert und den Effektivwert der dargestellten Spannung

a) Dreiecksspannung

b) Sinusspannung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ nach einer Zweiweggleichrichtung





8 Grundprobleme der numerischen Mathematik

8.1 Einführung

Die **numerische Mathematik** versucht, einen **Algorithmus** zu finden, der ein praktisches Problem (genauer: ein mathematisches Modell eines solchen Problems) *in einer gewünschten Genauigkeit* löst. Solche Algorithmen, die im Wesentlichen mit den vier Grundrechnungsarten auskommen, ermöglichen es, die Rechenarbeit Computern zu übertragen, mit denen die numerische Mathematik engstens verbunden ist.

Auf dem Weg zur Lösung treten praktisch unvermeidbare Fehler auf. Von ihrer *Entstehung* her lassen sich diese Fehler in drei Gruppen einteilen:

1. **Fehler in den Eingabedaten:** Eingabedaten können Messwerte sein, die im Allgemeinen fehlerbehaftet sind. Zu den Eingabefehlern wird auch der durch Rundung hervorgerufene Darstellungsfehler einer Zahl in einem Computer gezählt, der aber in der Regel viel kleiner als ein etwaiger Messfehler dieser Zahl ist.
2. **Rundungsfehler:** Darunter versteht man Fehler, die durch *Rundung* während der Rechnung entstehen, da zur Darstellung einer Zahl in einem Computer nur eine *begrenzte Anzahl von Ziffern* zur Verfügung steht. Jede der vier Grundrechnungsarten bringt im Allgemeinen einen neuen Rundungsfehler.
3. **Approximations- oder Verfahrensfehler:** Rechenoperationen wie etwa Wurzelziehen oder Logarithmieren, das Lösen bestimmter Gleichungen oder die Berechnung eines bestimmten Integrals (als Grenzwert einer Summe) bestehen im Ausführen von unendlich vielen Grundrechenoperationen. Solche Rechenoperationen müssen nach endlich vielen Schritten abgebrochen werden.

Es soll hier wieder an eine Grundregel im Umgang mit Taschenrechnern erinnert werden: Stets mit der vollen Taschenrechnergenauigkeit arbeiten, nicht allenfalls notierte Zwischenergebnisse wieder eintippen und weiterrechnen. Erst am Ende angemessen runden!

Maschinenzahlen

Im Rechner werden reelle Zahlen für ingenieurwissenschaftliche Berechnungen im Gleitkommaformat (auch Gleitpunktformat genannt, siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 68) dargestellt. Beispielsweise wird 0,0384 in der Form $3{,}84 \cdot 10^{-2}$ dargestellt. 3,84 heißt Mantisse der Zahl 0,0384.

Zahlen, die der Rechner exakt darstellen kann, heißen **Maschinenzahlen** (bzw. Taschenrechnerzahlen, siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 107). Abb. 8.1 zeigt einen Ausschnitt aus den Maschinenzahlen eines (sehr einfachen) Rechners, der Zahlen nur mit einer dreistelligen Mantisse darstellen kann.

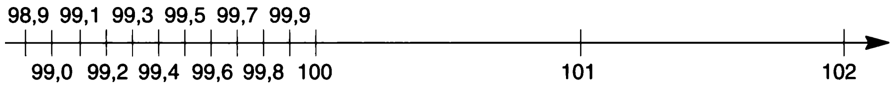


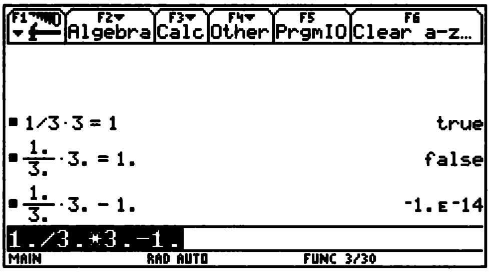
Abb. 8.1 Maschinenzahlen bei dreistelliger Mantisse (Ausschnitt)

Tatsächlich wird etwa die Zahl 0,0384 in der Form $0{,}384 \cdot 10^{-1}$ dargestellt, d.h. die "Normalisierung" erfolgt so, dass die Mantisse nicht zwischen 1 und 10, sondern zwischen 0,1 und 1 liegt. Zudem verwenden Rechner das duale und nicht das dezimale Zahlensystem. Nach dem derzeit bevorzugten Standard IEEE 754 (Institute of Electrical and Electronic Engineers) besitzt die als Dualzahl dargestellte Mantisse im Basisformat 23 Stellen ("single precision"), was etwa einer 7-stelligen Mantisse für Dezimalzahlen entspricht. Zusätzlich gibt es in diesem Standard auch Formate für doppelte und vierfache Genauigkeit.

Es gibt nur endlich viele Maschinenzahlen; zwischen zwei Maschinenzahlen liegen stets unendlich viele Zahlen, die nicht exakt abgespeichert werden können. Außerdem liegen die Maschinenzahlen nicht gleichabständig auf der Zahlengeraden; etwa die Hälfte aller Maschinenzahlen liegt zwischen -1 und 1. Der relative Fehler, den man beim Darstellen einer reellen Zahl macht, bleibt jedoch immer (etwa) gleich.

Reelle Zahlen x, die keine Maschinenzahlen sind, werden auf die nächste Maschinenzahl gerundet oder auch auf die nächst kleinere Maschinenzahl abgeschnitten (nach unten gerundet). Ein Rechner kann statt mit $x \in \mathbb{R}$ nur mit "seinen" Maschinenzahlen arbeiten, was im Allgemeinen das *Auftreten von Rundungsfehlern* bedeutet.

Voyage 200



In der ersten und zweiten Zeile stehen dieselben Gleichungen: in der ersten Zeile wird nach *symbolischer* Auswertung eine wahre Aussage festgestellt.

In der zweiten Zeile wird diese Gleichung nach *numerischer* Auswertung als falsche Aussage bezeichnet. Denn durch Rundungsfehler bei der Darstellung und Verarbeitung als Maschinenzahlen (Taschenrechnerzahlen) geht die Gleichheit verloren: der Rechner stellt folgerichtig eine falsche Aussage fest. Dies ist unbedingt zu berücksichtigen, wenn man etwa eine Probe nach einer numerischen Lösung einer Gleichung macht (siehe auch "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 326 unten). In der dritten Zeile ist der numerische Wert von 1/3*3 - 1 angegeben.

Achtung!

Bei numerischen Rechnungen ist es zu vermeiden, Zahlen oder Terme auf Gleichheit oder auf einen bestimmten Wert abzufragen. Durch Rundungsfehler können sich zwei mathematisch gleiche Terme *numerisch* verschieden verhalten!

Im folgenden Beispiel soll noch auf ein spezielles numerisches Problem eingegangen werden.

Beispiel 8.1 : Subtraktion annähernd gleich großer Zahlen

a) Berechne mit einem Rechner der Mantissenlänge 3 die Differenz $9{,}9963 - 9{,}9841$.

b) Berechne mit dem *Taschenrechner*: $x - y$, wenn $x = \frac{40000000{,}1}{3} - 10000000$ und $y = \frac{10000000{,}1}{3}$.

Lösung

Zu **a)** 9,9963 und 9,9841 werden intern in der Form $1{,}00 \cdot 10^1$ bzw. $9{,}98 \cdot 10^0$ als Maschinenzahlen mit dreistelliger Mantisse dargestellt.

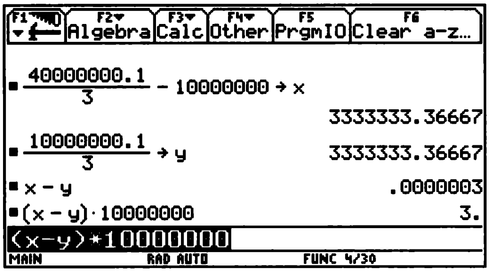
Vor der Subtraktion wird der kleinere Exponent dem größeren angeglichen:

$1{,}00 \cdot 10^1 - 9{,}98 \cdot 10^0 = 1{,}00 \cdot 10^1 - 0{,}998 \cdot 10^1 = 0{,}002 \cdot 10^1 = 2{,}00 \cdot 10^{-2} = 0{,}02$. Dieser Wert weicht beträchtlich von der genauen Differenz 0,0122 ab. Der absolute Fehler ist gleich $2{,}00 \cdot 10^{-2} - 0{,}0122 = 0{,}0078$; das gibt einen relativen Fehler $0{,}0078/0{,}0122 \approx 0{,}64 = 64\,\%$!

Der Grund für diese unliebsame Erscheinung bei der Subtraktion annähernd gleich großer Zahlen ist die unvermeidbare **Auslöschung** führender (d.h. vorne befindlicher) Ziffern eines großen Teiles der Mantisse in der Differenz $0{,}002 \cdot 10^1$. Durch die Normalisierung rutscht die fehlerbehaftete Ziffer 2 nach vorne und kann dort bei Weiterrechnung zu numerisch gefährlichen Situationen führen. Man spricht auch von der *"Subtraktionskatastrophe"*! Manchmal lässt sich die Auslöschung durch geschickte Umformungen umgehen.

Zu **b)** Das genaue Ergebnis ist 0.

Voyage 200



Durch Auslöschung aller Stellen bis zur sechsten Nachkommastelle kommt die durch Rundungsfehler entstandene Ziffer 3 auf die siebente Nachkommastelle. Damit gewinnt sie Einfluss. Verarbeitet man x-y weiter, kann das Ergebnis völlig verfälscht werden.

Achtung!

Eine numerische Grundregel ist:

Vermeide die Subtraktion annähernd gleich großer Zahlen, wo immer dies möglich ist.

Numerisch oder symbolisch?

Symbolisches Rechnen: exakt, wesentlich breiterer Geltungsbereich, man stößt aber bald an die Grenzen eines Computers.

Numerisches Rechnen: in der Regel bedeutend schneller als das symbolische Rechnen, jedoch Gefahren durch Einfluss der unvermeidlichen Rundungsfehler auf die Qualität eines Rechenergebnisses.

Im Überblick: Einführung

Die **numerische Mathematik** stellt Algorithmen zur Lösung praktischer Probleme zur Verfügung. Sie ist sehr eng mit dem Computer verknüpft. Ein Computer hat nur eine endliche Anzahl von Zahlen, seine sogenannten **Maschinenzahlen**, zur Verfügung. Daher treten, bedingt durch die begrenzte Stellenanzahl einer Maschinenzahl, unvermeidliche **Rundungsfehler** auf.

Auf Grund des Einflusses von Rundungsfehlern sind zu vermeiden:

(1) **Abfragen auf Gleichheit** oder auf einen bestimmten Wert,

(2) die **Subtraktion annähernd gleich großer Zahlen**.

Aufgaben

8.1 Ist es sinnvoll, von "exakten" Zahleneingaben in einen Computer zu sprechen?

8.2 Berechne mit dem Taschenrechner (beim Voyage 200 und TI-89 auf numerische Verarbeitung achten):

a) $10^{10} + 1$ **b)** $10^{11} + 1$ **c)** $10^{12} + 1$ **d)** $10^{12} + 6$

e) $5 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^{-6}$ **f)** $5 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^{-6}$ **g)** $9^{16} - 9^8 \cdot 9^8$

8.3 Überprüfe mit dem Taschenrechner das Assoziativgesetz, d.h prüfe, ob $(a + b) + c = a + (b + c)$, wenn

a) $a = 5,\ b = 4 \cdot 10^{-13},\ c = 2 \cdot 10^{-13}$

b) $a = 5,\ b = 4 \cdot 10^{-14},\ c = 2 \cdot 10^{-14}$.

8.4 Gegeben ist eine Zahl $x = 123{,}5?$, wobei ? für eine Ziffer zwischen 0 und 4 steht. Wie wirkt sich diese Unsicherheit auf das Ergebnis von $1000 \cdot (x - 123{,}44)$ aus?

8.5 $44444444{,}5^2 - 44444444{,}4^2 = 8888888{,}9$; prüfe dies mit dem Taschenrechner nach! Wie könnte man in diesem Fall die Differenz der Quadrate numerisch günstiger schreiben?

8.6 Löse rechnergestützt: Durch $x_n = 4 \cdot x_{n-1} \cdot (1 - x_{n-1})$ und $x_0 = 0{,}1$ ist eine Folge rekursiv gegeben. Stelle den Graphen der Lösungsfolge für die ersten 30 Glieder mit dem Taschenrechner dar. Vergleiche sodann diesen Graphen mit jenem der Lösungsfolge, bei der jedes Folgeglied *vor der Weiterrechnung* auf die folgende Anzahl von Nachkommastellen gerundet wurde **a)** 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 5 **f)** 6.

8.7 Gegeben sind die beiden Terme $99 - 70 \cdot \sqrt{2}$ und $\frac{1}{99 + 70 \cdot \sqrt{2}}$.

a) Stelle fest, dass die beiden Terme gleich sind.

b) Berechne die beiden Terme auf einem Rechner, wenn $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ und berechne in beiden Fällen den relativen Fehler.

8.8 Stelle zuerst fest, dass die folgenden beiden Terme gleich sind. Berechne sie sodann mit dem angegebenen Wert für x. Welcher der beiden Terme ist zur Berechnung des angegebenen Wertes für x vorzuziehen?

a) $1 - \cos x = 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$; $x = 0{,}001$

b) $\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^3 = -3 \cdot \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, $x = 1111{,}1$

8.2 Fehlerfortpflanzung

Die numerische Mathematik versucht, aus gewissen Eingabedaten mit Hilfe eines Algorithmus ein Rechenergebnis zu gewinnen. Der dabei entstehende Gesamtfehler ergibt sich aus den Daten-, Rundungs- und Approximationsfehlern in einem oft sehr verwickelten Zusammenhang. Im Folgenden soll nun auf die **Auswirkung eines Eingabefehlers auf ein Rechenergebnis** eingegangen werden, was als **Fehlerfortpflanzung** bezeichnet wird. Dabei stehen Messwerte im Vordergrund, die sogenannte *systematische* Messfehler besitzen.

Anmerkungen:

1) *Systematische* Messfehler entstehen durch die Unvollkommenheiten von Messgeräten, etwa durch ungenaue Justierung, und ungenaue Messmethoden. Sie treten unter gleichen Messbedingungen immer mit gleichem Betrag und gleichem Vorzeichen auf und sind im Prinzip korrigierbar. Häufig verzichtet man auf diese Korrektur und gibt zum gemessenen Wert nur den maximal möglichen absoluten oder relativen Fehler an.

   Davon zu unterscheiden sind die *zufälligen* Fehler (Ablesefehler, Reibungsfehler, schlechte Kontakte, Rauschen und dgl.). Sie sind nicht genau erfassbar und daher nicht korrigierbar. Als Messergebnis wird der arithmetische Mittelwert wiederholter Messungen angegeben, ergänzt durch eine statistisch bestimmte Messunsicherheit. Darauf und auf die Auswirkungen zufälliger Fehler auf ein Rechenergebnis (GAUSS'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz) wird in "Ingenieur-Mathematik 4" eingegangen.

2) Eine Analyse der anfallenden Rundungsfehler in einem Algorithmus und damit verbunden eine fundierte Bewertung verschiedener Algorithmen zur Lösung desselben mathematischen Problems ist aufwendig und kann hier nicht erfolgen.

Messunsicherheit $|\Delta x|$:

Wie schon auf Seite 127f. erwähnt, muss man sich in der Regel mit einer *Schätzung* $|\Delta x|$ für den betragsmäßig maximalen absoluten Fehler begnügen. $|\Delta x|$ wird als **Messunsicherheit** (Fehlerschranke oder absoluter Maximalfehler) bezeichnet. Man schreibt kurz: $\mathbf{x = x_0 \pm |\Delta x|}$. Ist ein relativer Fehler klein, so kann er näherungsweise statt auf x auch auf x_0 bezogen werden: $\frac{x_0 - x}{x} \approx \frac{x_0 - x}{x_0}$. Daher liegt mit der **relativen Messunsicherheit** $\left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$ näherungsweise auch eine Schranke für den relativen Fehler vor.

Beispiel: $s = (70 \pm 5)$ km oder $s = 70$ km $\pm$ 5 km bedeutet, dass der wahre Wert s für mindestens 65 km und höchstens 75 km geschätzt wird. Mehr kann nicht gesagt werden.

$s_0 = 70$ km ist ein Näherungswert für s mit der Messunsicherheit $|\Delta s| = 5$ km;

$\left|\frac{\Delta s}{s_0}\right| = \frac{5 \text{ km}}{70 \text{ km}} = 0{,}0714 \approx 7{,}1\,\%$ als maximaler relativer Fehler.

Man schreibt auch: $s = 70 \text{ km} \cdot (1 \pm 0{,}071) = 70 \text{ km} \cdot (1 \pm 7{,}1\,\%)$.

Anmerkung: Statt $|\Delta x|$ wird öfters auch nur Δx geschrieben.

Wir nehmen nun an, dass gemessene Werte $x_0, y_0, \ldots$ mit den Messunsicherheiten $|\Delta x|$, $|\Delta y|, \ldots$ vorliegen. Eine Fehlerabschätzung eines Rechenergebnisses, das durch Verarbeitung dieser Messwerte entsteht, kann unterschiedlich erfolgen:

- Methode der Fragezeichen bzw. durch Faustregeln wie die **Ziffernzählung** (siehe "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 111), wenn keine Messunsicherheiten gegeben sind,
- **Methode der Wertschranken**,
- **lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz**.

Beispiel 8.2 : Methode der Wertschranken

a) Berechne das Volumen V eines Kreiskegels mit dem Radius $r = 69\text{ mm} \pm 1\text{ mm}$ und der Höhe $h = 132\text{ mm} \pm 1\text{ mm}$.

b) An einem OHM'schen Widerstand R wurde die Spannung $U = 226\text{ V} \pm 5\text{ V}$ bei einer Stromstärke $I = 85{,}2\text{ mA} \pm 0{,}2\text{ mA}$ gemessen. Berechne R.

Lösung

Zu **a)** Ausgegangen wird von den Wertschranken $r_{un} = 68\text{ mm}$ und $r_{ob} = 70\text{ mm}$ für den wahren Wert r bzw. $h_{un} = 131\text{ mm}$ und $h_{ob} = 133\text{ mm}$ für den wahren Wert h. Über eine "Doppelrechnung" gewinnt man die Wertschranken V_{un} und V_{ob} für das wahre Kegelvolumen $V = \frac{1}{3}\cdot\pi\, r^2\, h$.

$V_{un} = \frac{1}{3}\cdot\pi\, r_{un}^2\, h_{un} = 634{,}33\ldots\text{ cm}^3$; $V_{ob} = \frac{1}{3}\cdot\pi\, r_{ob}^2\, h_{ob} = 682{,}45\ldots\text{ cm}^3$.

Man kann das Ergebnis in der Form $V = V_0 \pm \Delta V_{max}$ schreiben, wenn V_0 der Wert in der Mitte zwischen V_{un} und V_{ob} und ferner ΔV_{max} die halbe Schwankungsbreite $V_{ob} - V_{un}$ ist:

$\Delta V_{max} = \frac{1}{2}\cdot(V_{ob} - V_{un}) = 24062{,}5\ldots\text{ mm}^3 \approx 24\text{ cm}^3$.

Die Angabe von ΔV_{max} erfolgt auf eine oder zwei geltende Ziffern; auf die gleiche Genauigkeit wird V_0 gerundet. $V_0 = \frac{1}{2}\cdot(V_{un} + V_{ob}) \approx 658\text{ cm}^3$; $V = 658\text{ cm}^3 \pm 24\text{ cm}^3$.

Statt des Wertes in der Mitte zwischen V_{un} und V_{ob} kann auch $V_0 = \frac{1}{3}\cdot\pi\, r_0^2\, h_0 \approx 658\text{ cm}^3$ genommen werden.

Zu **b)** $U_{un} = 221\text{ V}$, $U_{ob} = 231\text{ V}$ sowie $I_{un} = 85{,}0\text{ mA}$, $I_{ob} = 85{,}4\text{ mA}$.

R_{un} ergibt sich, wenn U möglichst klein und I möglichst groß ist. Umgekehrt ist es bei R_{ob}.

$R_{un} = \frac{U_{un}}{I_{ob}} = 2587{,}8\ldots\ \Omega$; $R_{ob} = \frac{U_{ob}}{I_{un}} = 2717{,}6\ldots\ \Omega$.

Fehlerschranke $\Delta R_{max} = \frac{1}{2}\cdot(R_{ob} - R_{un}) = 64{,}91\ldots\ \Omega \approx 65\ \Omega$.

Intervallmitte $R_0 = \frac{1}{2}\cdot(R_{un} + R_{ob})\ \Omega = 2652{,}7\ldots\ \Omega \approx 2650\ \Omega$; $R = 2650\ \Omega \pm 65\ \Omega$.

Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz

Bei dieser Methode kann man näherungsweise die maximale Messunsicherheit des Rechenergebnisses unmittelbar aus den Messunsicherheiten der Eingangsdaten finden. In der Folge werden einige wichtige Fälle besprochen.

Das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz ist die Verallgemeinerung der Anwendung des Differentials in der Fehlerrechnung auf Funktionen von zwei oder mehr Variablen. Dies erklärt auch die Bezeichnung "linear".

Beispiel 8.3 : Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz bei den Grundrechnungsarten

Gegeben: $x = x_0 \pm |\Delta x| = 150\text{ mm} \pm 2\text{ mm}$ sowie $y = y_0 \pm |\Delta y| = 50\text{ mm} \pm 1\text{ mm}$.

Gesucht: **Maximale** Messunsicherheit Δz_{max} von

a) $z = x + y$ **b)** $z = x - y$ **c)** $z = x \cdot y$ **d)** $z = \frac{x}{y}$

Lösung

Zu **a)** $z_0 = x_0 + y_0 = 200$ mm.

Größtmöglicher Wert: $152\text{ mm} + 51\text{ mm} = 203\text{ mm} = z_0 + |\Delta x| + |\Delta y|$.

Kleinstmöglicher Wert: $148\text{ mm} + 49\text{ mm} = 197\text{ mm} = z_0 - (|\Delta x| + |\Delta y|)$.

Allgemein: $\Delta z_{max} = |\Delta x| + |\Delta y|$.

Zu **b)** $z_0 = x_0 - y_0 = 100$ mm.

Größtmöglicher Wert: $152\text{ mm} - 49\text{ mm} = 103\text{ mm} = z_0 + |\Delta x| + |\Delta y|$ (überlege!).

Kleinstmöglicher Wert: $148\text{ mm} - 51\text{ mm} = 97\text{ mm} = z_0 - (|\Delta x| + |\Delta y|)$.

Allgemein: $\Delta z_{max} = |\Delta x| + |\Delta y|$.

Zu **c)** $z_0 = x_0 \cdot y_0 = 150\text{ mm} \cdot 50\text{ mm} = 7500\text{ mm}^2$.

Größtmöglicher Wert: $(150 + 2)\text{ mm} \cdot (50 + 1)\text{ mm} =$
$= (7500 + 150 \cdot 1 + 50 \cdot 2 + 2 \cdot 1)\text{ mm}^2$.

Kleinstmöglicher Wert: $(150 - 2)\text{ mm} \cdot (50 - 1)\text{ mm} =$
$= (7500 - 150 \cdot 1 - 50 \cdot 2 + 2 \cdot 1)\text{ mm}^2$.

In beiden Fällen tritt die Größe $2 \cdot 1\text{ mm}^2 = 2\text{ mm}^2$ auf, die im Vergleich zur Hauptfehlergröße $(150 \cdot 1 + 50 \cdot 2)\text{ cm}^2 = 250\text{ cm}^2$ als klein angesehen werden kann. Vernachlässigt man diese Größe, so erhält man: $z = 7500\text{ cm}^2 \pm 250\text{ cm}^2$ oder allgemein:

$z = z_0 \pm (|x_0 \cdot \Delta y| + |y_0 \cdot \Delta x|)$. D.h. $\Delta z_{max} = |x_0 \cdot \Delta y| + |y_0 \cdot \Delta x|$. Division durch $|x_0 \cdot y_0|$ gibt schließlich das bemerkenswerte Ergebnis: $\left|\frac{\Delta z_{max}}{z_0}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y_0}\right|$

Zu **d)** Ohne Herleitung wird angeführt, dass wie beim Produkt näherungsweise gilt:

$$z = \frac{x}{y}; \quad z_0 = \frac{x_0}{y_0}; \quad \left|\frac{\Delta z_{max}}{z_0}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y_0}\right|.$$

Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz bei den Grundrechnungsarten:

$x = x_0 \pm |\Delta x|$, $y = y_0 \pm |\Delta y|$; z_{max} ist die entstehende maximale Messunsicherheit (auch absoluter Maximalfehler) bei der Berechnung von z.

$z = x + y$ oder $z = x - y$	$\Delta z_{max} = \|\Delta x\| + \|\Delta y\|$	Die maximale Messunsicherheit der Summe oder Differenz zweier Messwerte x_0 und y_0 ist gleich der Summe der Messunsicherheiten von x_0, y_0.
$z = x \cdot y$ oder $z = \frac{x}{y}$	$\left\|\frac{\Delta z_{max}}{z_0}\right\| = \left\|\frac{\Delta x}{x_0}\right\| + \left\|\frac{\Delta y}{y_0}\right\|$ $z_0 = x_0 \cdot y_0$ bzw. $z_0 = \frac{x_0}{y_0}$	Die relative maximale Messunsicherheit des Produktes oder Quotienten zweier Messwerte x_0 und y_0 ist gleich der Summe der relativen Messunsicherheiten von x_0, y_0.

Beispiel 8.4 : Anwendung des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes

a) Die Widerstände $R_1 = (100 \pm 1)\ \Omega$ und $R_2 = (500 \pm 3)\ \Omega$ sind in Serie geschaltet. Berechne den Ersatzwiderstand R unter Angabe der maximalen Messunsicherheit.

b) In der Wärmelehre sind öfters Differenzen von Temperaturen zu bilden. Man misst: $\vartheta_1 = 34{,}8\ °C \pm 0{,}2\ °C$ und $\vartheta_2 = 31{,}3\ °C \pm 0{,}2\ °C$. Wie groß ist die Differenz ϑ unter Angabe der maximalen Messunsicherheit?

c) Die Länge a und die Breite b eines Fußballfeldes wurden gemessen: $a = (105 \pm 0{,}5)$ m, $b = (71 \pm 0{,}5)$ m. Berechne den Flächeninhalt des Feldes unter Angabe der maximalen Messunsicherheit.

d) Berechne das Volumen V eines Kreiskegels mit dem Radius $r = 69$ mm ± 1 mm und der Höhe $h = 132$ mm $\pm$ 1 mm unter Angabe der maximalen Messunsicherheit.

e) An einem OHM'schen Widerstand R wurde die Spannung $U = 226$ V $\pm$ 5 V bei einer Stromstärke $I = 85{,}2$ mA $\pm$ 0,2 mA gemessen. Berechne R unter Angabe der maximalen Messunsicherheit.

Lösung

Zu **a)** $\Delta R_{max} = |\Delta R_1| + |\Delta R_2| = 1\ \Omega + 3\ \Omega = 4\ \Omega$; $R_0 = R_{10} + R_{20} = 100\ \Omega + 500\ \Omega = 600\ \Omega$;

$R = R_0 \pm \Delta R_{max} = 600\ \Omega \pm 4\ \Omega.$

Zu **b)** $\Delta\vartheta_{max} = |\Delta\vartheta_1| + |\Delta\vartheta_2| = 0{,}4\ °C$; $\vartheta_0 = \vartheta_{10} - \vartheta_{20} = 34{,}8\ °C - 31{,}3\ °C = 3{,}5\ °C$;

$\vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta_{max} = 3{,}5\ °C \pm 0{,}4\ °C.$

Zu **c)** $A_0 = 105\ m \cdot 71\ m = 7455\ m^2$; $\Delta A_{max} = (105 \cdot 0{,}5 + 71 \cdot 0{,}5)\ m^2 = 88\ m^2$.

$A = (7455 \pm 88)\ m^2.$

Zu **d)** $V_0 = \frac{1}{3} \cdot \pi\, r_0^2\, h_0 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (69\ mm)^2 \cdot 132\ mm = 658\,113{,}3...\ mm^3 = 658{,}1133...\ cm^3$;

Wir wenden nun die Regel für die maximale relative Messunsicherheit auf den Term für V, ein Produkt der Faktoren $\frac{1}{3}$, π, r und h an. Keine Messunsicherheiten besitzen natürlich die Faktoren $\frac{1}{3}$ und π. Da alle Faktoren nicht negativ sind, können dort die Betragsstriche weggelassen werden.

$$\frac{\Delta V_{max}}{V_0} = 2 \cdot \frac{|\Delta r|}{r_0} + \frac{|\Delta h|}{h_0} = 2 \cdot \frac{1\ mm}{69\ mm} + \frac{1\ mm}{132\ mm} = 0{,}0365...;$$

daraus: $\Delta V_{max} = 0{,}0365... \cdot V_0 = 24\,061,...\ mm^3 \approx 24\ cm^3$. Auf die gleiche Genauigkeit wird V_0 gerundet. Somit: $V = V_0 \pm \Delta V_{max} = (658 \pm 24)\ cm^3$.

Zu **e)** $\frac{\Delta R_{max}}{R_0} = \frac{|\Delta U|}{U_0} + \frac{|\Delta I|}{I_0} = \frac{5\ V}{226\ V} + \frac{0{,}2\ mA}{85{,}2\ mA} = 0{,}02447...$; $R_0 = \frac{U_0}{I_0} = 2652{,}58...\ \Omega$.

$\Delta R_{max} = R_0 \cdot 0{,}02447... = 64{,}9...\ \Omega \approx 65\ \Omega$; $R = R_0 \pm \Delta R_{max} = (2653 \pm 65)\ \Omega$.

Die Abweichung gegenüber Beispiel 8.2 b) erklärt sich, weil R_0 nur bei linearer Näherung genau in der Mitte zwischen dem kleinstmöglichen und größtmöglichen Widerstand liegt.

Im Überblick: Fehlerfortpflanzung

Fehlerfortpflanzung: Auswirkung einer Messunsicherheit auf ein Rechenergebnis.
Berechnung der maximalen Messunsicherheit: (a) Methode der Fragezeichen bzw. durch Faustregeln wie die **Ziffernzählung**, wenn keine Messunsicherheiten gegeben sind, (b) Methode der Wertschranken, (c) Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Aufgaben

Die Aufgaben 8.10 und 8.11 sind Übungsaufgaben mit Messwerten ohne Einheitsangaben. Sie dienen ausschließlich zum Üben des rechnerischen Umgangs mit Messwerten und ihren Messunsicherheiten.

8.9 Um die Höhe h eines Turmes zu bestimmen, misst man aus der Entfernung s = 100 m den Höhenwinkel $\alpha = 18° \pm 1°$. Berechne die Turmhöhe $h = s \cdot \tan \alpha$ mit der Methode der Wertschranken!

8.10 Gegeben sind $x = x_0 \pm |\Delta x| = 10{,}0 \pm 0{,}1$ und $y = y_0 \pm |\Delta y| = 50{,}0 \pm 0{,}2$. Berechne z unter Angabe der maximalen Messunsicherheit Δz_{max} mit Hilfe des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes:

a) $z = x + y$ **b)** $z = 2x + y$ **c)** $z = y - x$ **d)** $z = y - 3x$ **e)** $z = 2 \cdot (y - 2x)$

8.11 Gegeben sind $x = x_0 \pm |\Delta x| = 10{,}0 \pm 0{,}1$ und $y = y_0 \pm |\Delta y| = 50{,}0 \pm 0{,}2$. Berechne z unter Angabe der maximalen Messunsicherheit Δz_{max} mit Hilfe des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes:

a) $z = x \cdot y$ **b)** $z = 10 \cdot x \cdot y$ **c)** $z = 2 \cdot x \cdot y^2$ **d)** $z = 4 \cdot x^3 \cdot y$ **e)** $z = \frac{x}{y}$

f) $z = \frac{x^2}{y}$ **g)** $z = \frac{3}{x}$ **h)** $z = \frac{1}{10 \cdot y^2}$ **i)** $z = \frac{x^2}{y^2}$ **j)** $z = \frac{x + y}{y}$

8.12 Gegeben ist eine Gleichung, nach der eine physikalische Größe durch andere gemessene Größen berechnet werden kann. Drücke die maximale relative Messunsicherheit der linksstehenden Größe durch jene auf der rechten Seite aus:

a) $\varrho = \frac{m}{V}$ **b)** $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m\, v^2$ **c)** $m = \varrho \cdot a^2 \cdot b$

d) $\varrho = \frac{R \cdot A}{l}$ **e)** $\varrho = \frac{4\, m}{\pi\, d^2 \cdot h}$ **f)** $g = \frac{1}{4\, \pi^2} \cdot \frac{l}{T^2}$

8.13 Die beiden Spannungen $U_1 = (23{,}0 \pm 0{,}05)$ V und $U_2 = (18{,}5 \pm 0{,}05)$ V werden subtrahiert. Berechne die Differenz und vergleiche die maximale relative Messunsicherheit der Differenz mit den relativen Messunsicherheiten von U_1 und U_2 mit

a) dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz, **b)** der Methode der Wertschranken.

8.14 Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks wurde zu 38 mm gemessen, wobei ein Messfehler von 0,5 mm möglich ist. Berechne die maximale relative Messunsicherheit des Flächeninhaltes mit

a) dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz, **b)** der Methode der Wertschranken.

8.15 Welche relative Messunsicherheit besteht für die Querschnittsfläche eines Drahtes, wenn der Drahtdurchmesser d = (0,83 ± 0,01) mm ist? Führe die Rechnung nach

a) dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz, **b)** der Methode der Wertschranken.

8.16 Der Durchmesser einer Kugel wurde zu 40 mm ± 2 mm gemessen. Berechne das Kugelvolumen! Wie groß ist die maximale relative Messunsicherheit für das Volumen? Verwende

a) das linearen Fehlerforpflanzungsgesetz, **b)** die Methode der Wertschranken.

8.17 Von einem Quader wurden die Kanten a = (24,2 ± 0,1) cm, b = (18,5 ± 0,1) cm und c = (15,9 ± 0,1) cm gemessen. Berechne die maximale Messunsicherheit des Volumens nach

a) dem linearen Fehlerforpflanzungsgesetz, **b)** der Methode der Wertschranken.

8.18 Von einem Quader wurden die Kanten a, b und c gemessen. Welche relative Messunsicherheit in der Messung der Kanten darf nicht überschritten werden, wenn die maximale relative Messunsicherheit des Volumens höchstens 3 % betragen darf?

8.19 Es besteht der Wunsch, das Volumen $V = \frac{1}{12} \cdot \pi\, d^2\, h$ eines Kreiskegels auf 2 % genau zu bestimmen. Man misst: $d \approx 15$ cm und $h \approx 28$ cm. Wie genau müssen die Messungen sein?

8.20 Die elektrische Leistung P eines Verbrauchers in einem Gleichstromkreis ist gleich dem Produkt aus Stromstärke I und Spannung U. Wie groß ist die Leistung bei einer Stromstärke I = (85,2 ± 0,2) A und Spannung U = (224 ± 3) V mit Angabe der maximale relative Messunsicherheit? Verwende

a) das linearen Fehlerforpflanzungsgesetz, **b)** die Methode der Wertschranken.

8.21 An den drei hintereinander geschalteten Widerständen R_1 = (250 ± 4) Ω, R_2 = (1 000 ± 10) Ω und R_3 = (100 ± 1) Ω liegt die Spannung U = (230 ± 3) V. Berechne die Stromstärke durch die drei Widerstände mit Angabe der vorhandenen maximalen Messunsicherheit.

8.22 Zur Bestimmung der Geschwindigkeit v bei einer gleichförmigen Bewegung wird der in der Zeitspanne t zurückgelegte Weg s gemessen. Was ist die maximale relative Messunsicherheit der Geschwindigkeit, wenn die Messunsicherheit des Weges 2 % und jene der Zeit 3 % beträgt?

8.23 Ein Stahldraht mit der Länge l = (3022 ± 3) mm und dem Durchmesser d = (0,82 ± 0,01) mm wird mit der Kraft F = (100,0 ± 4) N belastet und erfährt dadurch eine Längenzunahme Δl = (2,7 ± 0,1) mm. Nach dem HOOKE'schen Gesetz gilt der Zusammenhang: $\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F \cdot l}{A}$, wobei E der Elastizitätsmodul (eine Materialkonstante) und A die Querschnittsfläche des Drahtes ist. Berechne daraus E unter Angabe der maximalen Messunsicherheit nach dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz.

8.24 In einem rechtwinkligen Dreieck wurden gemessen: Hypotenuse c = (240,0 ± 0,2) m, Kathete a = (172,4 ± 0,2) m. Berechne mit der Methode der Wertschranken die maximale Messunsicherheit

a) der anderen Kathete b, **b)** des von a und c eingeschlossenen Winkels.

8.25 Die elektrischen Widerstände R_1 = (400 ± 3) Ω und R_2 = (100 ± 2) Ω sind parallel geschaltet. Berechne mit der Methode der Wertschranken den Ersatzwiderstand mit Angabe der maximalen Messunsicherheit.

8.3 Kondition eines Problems und Stabilität eines Algorithmus

Bei der rechnerischen Lösung eines mathematischen Problems wird versucht, aus den Eingabedaten mit Hilfe eines Algorithmus ein Rechenergebnis zu gewinnen. Die Fehler im Rechenergebnis (Abb. 8.2) resultieren aus den Eingabefehlern (Messfehler und Darstellungsfehler als Maschinenzahlen) und den Fehlern, die bei der Ausführung des Algorithmus im Rechner entstehen (Rundungs- und Approximationsfehler).

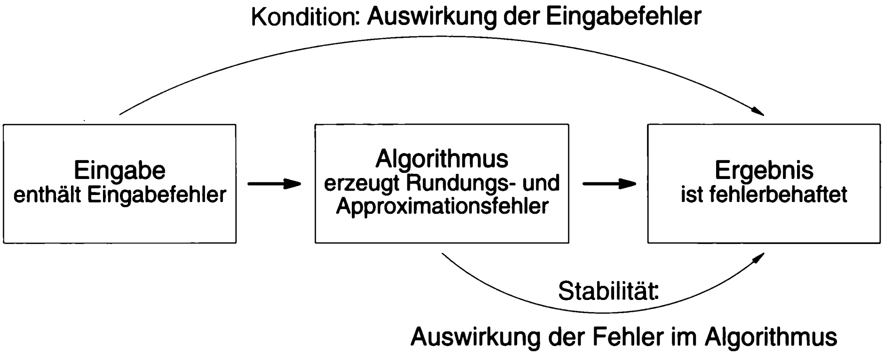


Abb. 8.2 Kondition und Stabilität

Man spricht von einem **gut konditionierten** mathematischen Problem, wenn kleine Änderungen der Eingangsdaten *unabhängig von jeder Verarbeitung in einem Rechner* nur kleine Änderungen des exakten Ergebnisses bewirken. Ist dies nicht der Fall, so heißt das Problem **schlecht konditioniert**.

Wesentlich ist, dass eine schlechte Kondition eines Problems durch keinen noch so guten in einem Rechner verwendeten Algorithmus aus der Welt geschafft werden kann. Eine gute oder schlechte Kondition ist eine Eigenschaft des *mathematischen* Problems an sich. Sie wird mit den Mitteln der "reinen" Mathematik festgestellt, die keine Rundungs- oder Approximationsfehler kennt.

Beispiel 8.5 : Kondition eines linearen Gleichungssystems

Löse das Gleichungssystem vor und nach einer kleinen "Störung" eines seiner Koeffizienten

a) I: $-2x + y = -2$ bzw. I: $-2x + y = -2$

II: $\frac{1}{2} \cdot x + y = 3$ II: $\frac{1}{2} \cdot x + 1{,}001 \cdot y = 3$

b) I: $x + 2y = 3$ bzw. I: $x + 2y = 3$

II: $0{,}499x + y = 1{,}5$ II: $0{,}499 \cdot x + 1{,}001 \cdot y = 1{,}5$

Lösung

Zu **a)** Lösung: $x = 2;\ y = 2$ bzw. $x = 1{,}999;\ y = 1{,}998;$

Zu **b)** Lösung: $x = 0;\ y = 1{,}5$ bzw. $x = 1;\ y = 1.$

Das Gleichungssystem a) reagiert auf eine kleine Veränderung eines Koeffizienten mit einer Änderung der Lösung etwa im gleichen Ausmaß. Es besitzt daher eine *gute Kondition.* Dagegen bewirkt die kleine Veränderung des Gleichungssystems in b) eine sehr starke Veränderung der Lösung. Es besitzt eine *schlechte Kondition*.

Die graphische Lösung beider Gleichungssysteme lässt den Grund erkennen. Die beiden Geraden des Gleichungssystems a) schneiden einander in einem Winkel nahe 90° (Abb. 8.3), während dies die Geraden des Gleichungssystems b) in einem sehr schleifenden

Schnitt tun. Die Geraden sind in Abb. 8.4 nicht maßstäblich gezeichnet, da sie im Rahmen der Zeichengenauigkeit nicht mehr auseinanderzuhalten sind. Eine kleine Veränderung einer (oder beider Geraden) führt zu einer starken Verschiebung des Schnittpunktes.

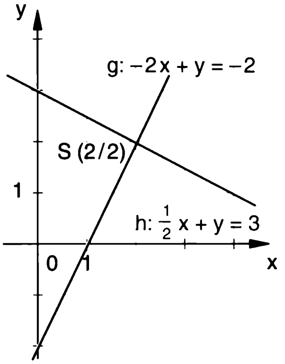


Abb. 8.3

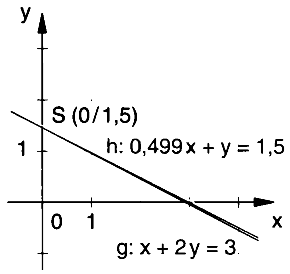


Abb. 8.4

Stabilität eines Algorithmus

Z.B.: $z = \sqrt{x}$

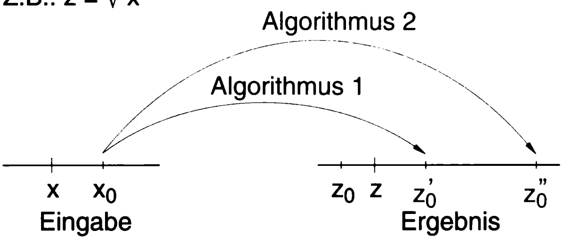


Abb. 8.5 Stabilität von Algorithmen

x ... richtiger Eingabewert

x_0 ... Maschinenzahl von x

$z = \sqrt{x}$

$z_0 = \sqrt{x_0}$

z_0' ... vom Algorithmus 1 berechneter Wert für z

z_0'' ... vom Algorithmus 2 berechneter Wert für z

Abb. 8.5 veranschaulicht die Situation für ein einfaches Problem. Aus einem Wert x, etwa 3, soll die Quadratwurzel gezogen werden: $z = \sqrt{x}$. Statt $x = 3$ gelangt ihre Maschinenzahl x_0, die im Allgemeinen ungleich x ist, in den Rechner. Durch die im Algorithmus 1 auftretenden Fehler kommt es zum Rechenergebnis z_0', durch jene des Algorithmus 2 zu z_0''. $z_0 - z$ ist der Fehler im Rechenergebnis, der aufgrund der Kondition des Problems unvermeidbar ist. Vergleicht man damit den durch den Algorithmus verursachten Fehler $z_0' - z$ bzw. $z_0'' - z$, so kommt man zu folgender Definition:

> Ein Algorithmus heißt **numerisch stabil**, wenn die Auswirkung der Fehler *im* Algorithmus auf das Rechenergebnis nicht wesentlich größer ist als jene durch den Eingabefehler (Darstellungsfehler als Maschinenzahlen).

In diesem Sinn kann der Algorithmus 1 als numerisch stabil bezeichnet werden. Stabilität und Kondition sind sorgfältig voneinander zu trennen. **Numerische Stabilität** betrifft den *im Rechner* ablaufenden Algorithmus zur Lösung eines mathematischen Problems. Die Frage nach der numerischen Stabilität stellt sich deswegen, weil in einem Rechner Zahlen nur mit begrenzter Genauigkeit dargestellt werden. **Kondition** betrifft dagegen das mathematische Problem selbst und hat nichts mit Rechnern zu tun.

Beispiel 8.6 : Stabilität von Algorithmen

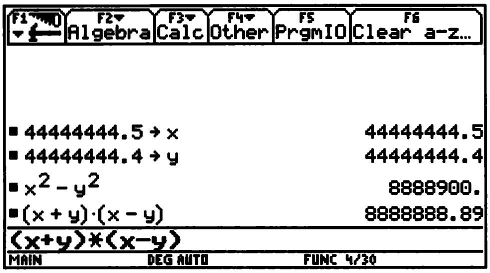
Berechne *mit dem Taschenrechner* $x^2 - y^2$ für $x = 44444444{,}5$ und $y = 44444444{,}4$.
Das Rechenergebnis soll durch die beiden folgenden Algorithmen ermittelt werden:
Algorithmus 1: Nach der Methode "$x^2 - y^2$"
Algorithmus 2: Nach der Methode "$(x + y) \cdot (x - y)$"

Lösung

Wir berechnen zuerst den exakten Wert:

$$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y) = (44444444{,}5 + 44444444{,}4) \cdot (44444444{,}5 - 44444444{,}4) = 88888888{,}9 \cdot 0{,}1 = 8888888{,}89.$$

Voyage 200



Der Einfachheit halber wird 44444444,5 zuerst auf x und 44444444,4 auf y abgespeichert.

Algorithmus 1: 8888900;

Algorithmus 2: 8888888,89;

Die Rundungsfehler laufen beim Algorithmus 1 auf einen Ergebnisfehler von 11,11 an.

Der diesbezügliche Ergebnisfehler beim Algorithmus 2 ist unter der Anzeigegrenze.

Für die gewählten Werte für x und y ist daher der Algorithmus 1 nicht stabil, der Algorithmus 2 dagegen stabil. Der Grund für die Instabilität des Algorithmus 1 ist die starke Auslöschung führender Stellen bei der Subtraktion $x^2 - y^2$, die zur "Subtraktionskatastrophe" führt. Die Stellenauslöschung bei der Subtraktion $x - y$ im Algorithmus 2 wirkt sich hier nicht aus.

Beispiel 8.7 : Berechnung von π nach ARCHIMEDES

Die Zahl π soll näherungsweise nach ARCHIMEDES berechnet werden.
Dazu geht man von einem Einheitskreis aus (Kreis mit Radius 1 Längeneinheit); ist U sein Umfang, so gilt $U = 2\pi$, sein halber Umfang ist also π.
Dem Einheitskreis schreibt man nun der Reihe nach ein regelmäßiges 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck, 48-Eck usw. ein, deren halbe Umfänge $\frac{U_6}{2}, \frac{U_{12}}{2}, \frac{U_{24}}{2}, \frac{U_{48}}{2}$, usw. als Näherungswerte von π gelten können.

Lösung

In Abb. 8.6 ist dem Einheitskreis ein regelmäßiges 6-Eck eingeschrieben; seine Seite $s_6 = 1$; damit ist $\frac{U_6}{2} = 3$ der erste Näherungswert für π.
Rechts ist ein Ausschnitt aus einem eingeschriebenen regelmäßigen n-Eck gezeichnet, s_n ist seine Seite.

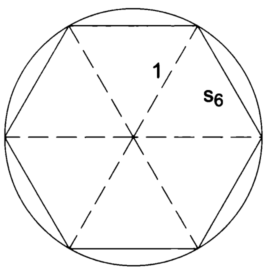
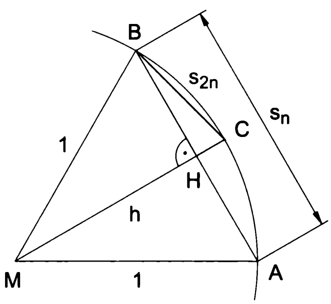


Abb. 8.6



Ist C Mittelpunkt des Bogens $\overset{\frown}{AB}$, so ist $s_{2n} = \overline{BC}$ die Seite eines regelmäßigen Vielecks mit doppelter Seitenanzahl. Wir suchen eine Möglichkeit, "rekursiv" s_{2n} aus s_n zu berechnen, beginnend mit $s_6 = 1$:

Dreieck MHB: $h^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = 1$; daraus $h = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}$

Dreieck HCB: $s_{2n}^2 = (1-h)^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = 1 - 2\cdot\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} + 1 - \frac{s_n^2}{4} + \frac{s_n^2}{4} =$

$$= 2 - 2\cdot\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}$$

Somit: $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$.

Damit errechnet sich beispielsweise $s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}517638090205$ und daraus $\frac{1}{2}\cdot U_{12} = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot s_{12} = 3{,}10582854\ldots$ als ein Näherungswert für $\pi = 3{,}14159265359$.

Berechnet man nun $s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{12}^2}}$, daraus $\frac{1}{2}\cdot U_{24} = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot s_{24}$ als nächsten Näherungswert für π, danach $24\cdot s_{48}$ usw., so nähern sich diese Zahlen zuerst π, führen aber schließlich zu völlig unbrauchbaren Werten; letztlich erhält man null. Grund ist eine Subtraktionskatastrophe: Bei hoher Eckenanzahl tritt mit $2 - \sqrt{4 - s_n^2}$ eine Differenz zweier Zahlen auf, die etwa gleich groß sind. Der Algorithmus ist instabil.

Man kann den besprochenen Algorithmus leicht in einen stabilen Algorithmus überführen, indem man dem Term für s_{2n} eine andere Form gibt.

$$s_{2n} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}}{1}\cdot\frac{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} = \frac{\sqrt{\left(2 - \sqrt{4 - s_n^2}\right)\cdot\left(2 + \sqrt{4 - s_n^2}\right)}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}.$$

Jetzt treten keine Differenzen nahezu gleich großer Zahlen auf und man erhält sehr gute Näherungswerte für π. Obwohl beide Terme für s_{2n} *mathematisch* gleich sind, unterscheiden sie sich deutlich in ihrer *numerischen* Auswertung!

Aufgaben

8.26 Was ist ein guter numerischer Weg, um **a)** e^{x-y}, **b)** $\ln x - \ln y$ zu berechnen, wenn sich x und y nur ganz wenig unterscheiden?

8.27 Wie kann man numerisch geschickt $\sqrt{x^2 + 4} - 2$ berechnen, wenn $|x|$ nahe bei 0 liegt?

8.28 Gegeben ist das Gleichungssystem:

I: $x + y = 3$

II: $x + 0{,}9999\cdot y = 1{,}9998$.

Löse das Gleichungssystem! Wie ändert sich die Lösung, wenn man den Koeffizienten 0,9999 von y in II durch 1 nähert? Was bedeutet dies für die Kondition des Systems?

9 Einige numerische Verfahren

9.1 Numerische Lösung von Gleichungen

Nichtlineare Gleichungen werden, abgesehen von wichtigen Sonderfällen, in der Regel mit Hilfe von Näherungsverfahren gelöst, die daher auch *Näherungslösungen* ergeben. Von einem Näherungsverfahren wird verlangt, dass es eine Gleichung mit einer vorgegebenen Genauigkeit löst.

Bringt man die Gleichung auf die Form $f(x) = 0$, d.h. formt man sie so um, dass auf der rechten Seite nur mehr 0 steht, so ist das Lösen der Gleichung geometrisch gleichbedeutend dem Suchen der Nullstellen des Graphen der Funktion $y = f(x)$. Im Folgenden sollen einige der zahlreichen Möglichkeiten besprochen werden, eine Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen:

- **Gezieltes Probieren**
- **Fixpunktverfahren**
- **NEWTON-Verfahren**[17]
- **Lösung mit Taschenrechner oder geeigneter Software**

Beispiel 9.1 : Lösung durch gezieltes Probieren

Wie groß ist die Eintauchtiefe x einer Holzkugel mit $\varrho = 0{,}800$ kg/dm^3 und dem Durchmesser $d = 2{,}00$ dm in Wasser ?

Lösung

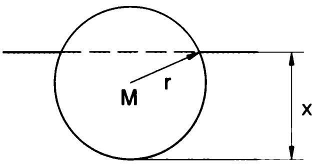


Abb. 9.1

Der unterhalb der Wasseroberfläche befindliche Kugelteil ist ein Kugelabschnitt mit der Höhe gleich der Eintauchtiefe x. Das Gewicht der Holzkugel ist gleich dem Gewicht der von ihr verdrängten Wassermasse; dies ergibt eine Gleichung für x:

$$\varrho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot g = 1{,}00 \text{ kg/dm}^3 \cdot \frac{\pi}{3} x^2 \cdot (3r - x) \cdot g$$

Einsetzen für ϱ und $r = 1$ dm ergibt nach Kürzen die Zahlenwertgleichung für x in dm: $3{,}2 = x^2 \cdot (3 - x)$ oder $f(x) = 3{,}2 - x^2 \cdot (3 - x) = 0$.

Die gesuchte Nullstelle kann näherungsweise durch gezieltes Probieren gefunden werden.

x	$y = 3{,}2 - x^2 \cdot (3 - x)$
1,5	−0,1750
1,6	−0,3840
1,4	0,0640
1,45	−0,0589
1,44	−0,0348

Die Nullstelle bzw. Lösung x wird zwischen 1 und 2 liegen. Wir können mit $x = 1{,}5$ beginnen und erhalten $y = -0{,}175$. Die nebenstehende Tabelle zeigt, wie man gezielt suchen kann. Man erkennt, dass die gesuchte Nullstelle zwischen 1,4 und 1,44 liegen muss, da dort die y-Werte gegengleiches Vorzeichen haben. Auf Zehntel gerundet, was einer Genauigkeit auf Zentimeter entspricht, lautet die gesuchte Lösung: $x = 1{,}4$ dm.

[17] Isaak NEWTON (1643 – 1727), englischer Physiker und Mathematiker

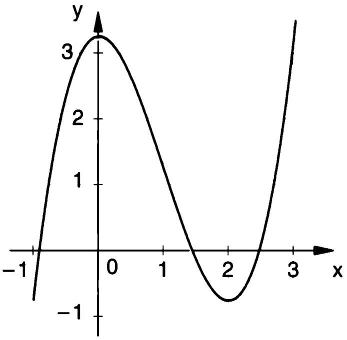


Abb. 9.2 Nullstellen

Abb. 9.2 zeigt den Graphen der kubischen Funktion $y = 3{,}2 - x^2 \cdot (3 - x)$, die sinnvollerweise nur zwischen 0 und 2 zu betrachten ist. Ihre dortige Nullstelle ist die gesuchte Eintauchtiefe.

Mit gezieltem Probieren kann die Nullstelle einer Funktion bzw. die gewünschte Lösung einer Gleichung grundsätzlich mit jeder gewünschten Genauigkeit bestimmt werden.

Von besonderer Bedeutung als numerische Verfahren zur Nullstellenbestimmung bzw. der Lösung einer Gleichung sind die sogenannten **Iterationsverfahren**[18]. Gemeinsam ist ihnen, dass man von einem **Startwert** (oder auch mehreren Startwerten) ausgehend eine **Folge von Näherungswerten** $x_0, x_1, x_2, \ldots$ berechnet. Dass diese Näherungswerte mehr oder weniger schnell der gesuchten Lösung beliebig nahe kommen, ist nicht von vornherein gesagt. Ist es der Fall, so heißt die Folge der Näherungswerte **konvergent**. Der Grenzwert x^* ist eine gesuchte Nullstelle bzw. Lösung der Gleichung. *Vielfach ist die "Qualität" der Näherungswerte vom Startwert abhängig.*

Beispiel 9.2 : Lösung mit dem Fixpunktverfahren

Wie groß ist die Eintauchtiefe x einer Holzkugel mit $\varrho = 0{,}800$ kg/dm³ und dem Durchmesser d = 2,00 dm in Wasser ?

Lösung

Die zu lösende Gleichung lautet (siehe Beispiel 9.1): $f(x) = 3{,}2 - x^2 \cdot (3 - x) = 0$.

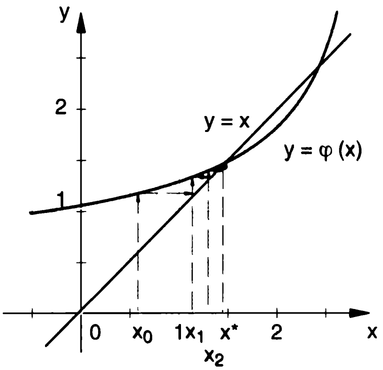


Abb. 9.3 Konvergente Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Der erste Schritt besteht darin, dass man die Gleichung $f(x) = 0$ in eine Gleichung der Art $x = \varphi(x)$ umformt.

Ist nun x^* Lösung der Gleichung $f(x^*) = 0$, so ist x^* auch Lösung der Gleichung $x^* = \varphi(x^*)$. Damit hat man die Aufgabe vor sich, einen Wert x^* zu finden, für den $\varphi(x^*)$ wieder gleich x^* ist, weshalb man x^* einen **Fixpunkt** dieser Funktion nennt.

$$3{,}2 - x^2 \cdot (3 - x) = 0$$

$$x^2 = \frac{3{,}2}{3 - x} \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{\frac{3{,}2}{3 - x}}.$$

Da wir eine positive Lösung suchen, kann die negative Lösung $x = -\sqrt{\frac{3{,}2}{3 - x}}$ außer Acht bleiben.

Wir wählen beispielsweise als "Startwert" $x_0 = 0{,}6$ (man hätte natürlich auch den technisch näheliegenderen Startwert 1,5 wie in Beispiel 9.1 wählen können). Damit startet die Iteration:

$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \quad x_3 = \varphi(x_2)$, usw.

[18] iterum (lateinisch), zum zweiten Mal

Also:

$$x_0 \qquad\qquad = 0{,}6$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{3{,}2}{3 - x_0}} = \sqrt{\frac{3{,}2}{3 - 0{,}6}} = 1{,}154700\ldots$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{3{,}2}{3 - x_1}} = \sqrt{\frac{3{,}2}{3 - 1{,}154700\ldots}} = 1{,}316865\ldots$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{3{,}2}{3 - x_2}} = \sqrt{\frac{3{,}2}{3 - 1{,}316865\ldots}} = 1{,}378845\ldots$$

...

$$x_{12} = \sqrt{\frac{3{,}2}{3 - x_{11}}} = \sqrt{\frac{3{,}2}{3 - 1{,}425638\ldots}} = 1{,}425682\ldots$$

$$x_{13} = \sqrt{\frac{3{,}2}{3 - x_{12}}} = \sqrt{\frac{3{,}2}{3 - 1{,}425682\ldots}} = 1{,}425702\ldots \quad \text{usw.}$$

Rechnet man weiter, so ändern sich die erhaltenen 4 Nachkommastellen nicht mehr, sie bleiben "stehen". Für eine millimetergenaue Angabe der Eintauchtiefe sind nur 2 Nachkommastellen nötig: $x^* = 1{,}43$ dm = 143 mm.

Anmerkungen:

(1) Wählt man den Startwert $x_0 = 1{,}5$, so erreicht man die Lösung (in einer gewünschten Genauigkeit) etwas schneller. Dieses im Grunde sehr einfache Verfahren hat auch seinen Preis: es sind doch etliche Näherungswerte x_i zu bestimmen, um auf eine bestimmte Genauigkeit zu kommen. Dabei gilt die folgende Regel: Ungefähr bei jedem zweiten oder dritten Iterationsschritt erhält man eine "stehende" Dezimalziffer mehr (falls die Folge konvergent ist).

(2) In einem *Computerprogramm* wird die Iteration oft abgebrochen, wenn zwei aufeinander folgende Näherungswerte x_n und x_{n+1} sich um weniger als eine vorgegebene Abbruchsschranke ε unterscheiden, d.h. wenn $|x_n - x_{n+1}| < \varepsilon$ ist. Besser ist noch (überlege, warum), wenn man die Abbruchsschranke ε für den relativen Unterschied $\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right|$ angibt. Als Lösung gilt dann x_{n+1}.

Man kann den Lösungsvorgang auch *graphisch* verfolgen, indem man die Graphen von $y = \varphi(x)$ und von $y = x$ (= 1. Mediane) zeichnet. Es ergibt sich dabei eine Treppenlinie zwischen den beiden Graphen. Es gibt auch Aufgaben, bei denen sich die Pfeile schneckenartig auf den Schnittpunkt der beiden Graphen zusammenziehen.

Was wäre gewesen, wenn man $f(x) = 3{,}2 - x^2 \cdot (3 - x) = 0$ nach dem "x in der runden Klammer" umgeformt hätte?

$$3{,}2 - x^2 \cdot (3 - x) = 0$$

$$3 - x = \frac{3{,}2}{x^2} \quad \text{oder} \quad x = 3 - \frac{3{,}2}{x^2}$$

Selbst wenn man mit einem Startwert nahe dem Fixpunkt x^* beginnt, laufen die "Näherungswerte" x_1, x_2, x_3, ... auseinander, die Folge ist divergent:

$$x_0 \qquad\qquad = 1{,}3$$

$$x_1 = 3 - \frac{3{,}2}{x_0^2} = 3 - \frac{3{,}2}{1{,}3^2} = 1{,}1065$$

$$x_2 = 3 - \frac{3{,}2}{x_1^2} = 3 - \frac{3{,}2}{1{,}1065\ldots^2} = 0{,}3864$$

$$x_3 = 3 - \frac{3{,}2}{x_2^2} = 3 - \frac{3{,}2}{0{,}3863\ldots^2} = -18{,}4333.$$

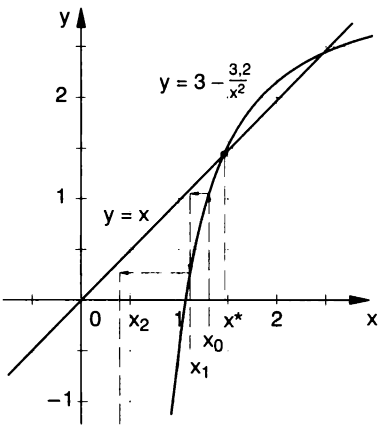


Abb. 9.4 Divergente Folge x_0, x_1, x_2, ...

Verfolgt man den Lösungsvorgang wieder graphisch in Abb. 9.4, so bekommt die Treppe immer größere Stufen. Man sagt auch, dass dieser Fixpunkt nun "abstoßend" ist. Was ist der Grund für diese Verhalten? Weil die Steigung des Graphen von $y = \varphi(x) = 3 - \frac{3,2}{x^2}$ in der Nähe von x^* betragsmäßig größer als 1 ist, werden die Treppenstufen höher statt kleiner. Im Falle von $y = \varphi(x) = \sqrt{3,2/(3-x)}$ ist die Steigung um x^* betragsmäßig kleiner als 1, weshalb die Treppenstufen schließlich beliebig klein werden.

Setzt man übrigens oben die Berechnung mit x_4, x_5, usw. fort, so gelangt man in den Einzugsbereich des zweiten positiven Fixpunktes $x^* = 2{,}4795$ und würde bei einer solchen "sturen" Vorgangsweise diesen Wert, also etwa 25 cm, als "Eintauchtiefe" der Kugel mit dem Durchmesser 20 cm erhalten.

Fixpunktverfahren

Die zu lösende Gleichung $f(x) = 0$ wird auf die Form $x = \varphi(x)$ umgewandelt. Ist x^* die gesuchte Lösung und x_0 ein Startwert, so konvergiert die nach
$x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
berechnete Folge gegen die Lösung x^*, wenn die Steigung von $y = \varphi(x)$ betragsmäßig kleiner als 1 ist und auch der Startwert x_0 dort gewählt wurde.

Ein weiteres, wichtiges Iterationsverfahren zur Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$ ist das **Newton-Verfahren**. Dazu wird am Startpunkt x_0 der Graph der Funktion $y = f(x)$ durch seine **Tangente** t_0 ersetzt (Abb. 9.5). Deren Schnittstelle mit der x-Achse ist ein Näherungswert x_1 für die gesuchte Nullstelle x^* der Funktion. Auf diese Weise fährt man weiter fort: Man errichtet an der Stelle x_1 die Tangente t_1 an den Graphen der Funktion $y = f(x)$; ihre Schnittstelle x_2 ist der nächste Näherungswert, usw. Man erhält eine Folge von Näherungswerten x_0, x_1, x_2, ..., die bei geeigneter Wahl des Startwertes im Allgemeinen *schnell* gute Näherungswerte für x^* bringt.

Die Tangente t_0 hat die Steigung $k = f'(x_0)$:

t_0: $y = k \cdot x + d = f'(x_0) \cdot x + d$.

Sie geht durch den Punkt $P_0\,(x_0/y_0)$:

$y_0 = k \cdot x_0 + d \Rightarrow d = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$.

Daher lautet die Gleichung von t_0:

t_0: $y = f'(x_0) \cdot x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$.

Aus $y = 0$ folgt ihre Nullstelle:

$$y = f'(x_0) \cdot x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x = x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)}.$$

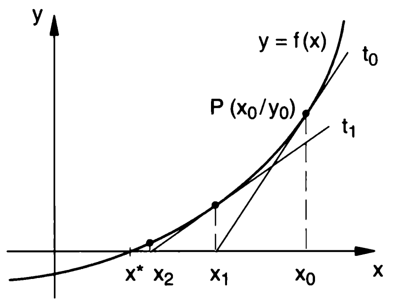


Abb. 9.5 Newton-Verfahren

Wir nennen diese Nullstelle x_1; setzt man noch $y_0 = f(x_0)$ so erhält man als ersten Näherungswert: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Setzt man für x_0 den Wert x_1 ein, erhält man den Näherungswert x_2, usw.

Newton'sches Näherungsverfahren

Ist x^* eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ und ist x_0 ein *hinreichend nahe* bei x^* liegender Startwert, so konvergiert die nach $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, berechnete Iterationsfolge gegen die Lösung x^*.

Praktische Ausführung:

- Die zu lösende Gleichung auf die Form $f(x) = 0$ bringen,
- hinreichend nahe bei der gesuchten Lösung x^* liegenden Startwert x_0 suchen,
- $f(x)$ ableiten,
- x_1, x_2, usw. bestimmen, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Im Konvergenzfall erhält man schneller einen guten Näherungswert für eine Lösung x^* als beim Fixpunktverfahren. Der Nachteil ist, dass man die Ableitung der Funktion f braucht.

Beispiel 9.3 : NEWTON'sches Verfahren

Wie groß ist die Eintauchtiefe x einer Holzkugel mit $\varrho = 0{,}800$ kg/dm^3 und dem Durchmesser $d = 2{,}00$ dm in Wasser?

Lösung

Die zu lösende Gleichung lautet (siehe Beispiel 9.1): $f(x) = 3{,}2 - x^2 \cdot (3 - x) = 3{,}2 - 3x^2 + x^3$.
Als Startwert verwenden wir wieder $x_0 = 0{,}6$.
$f'(x) = -6x + 3x^2 = 3x \cdot (x - 2)$.

$$x_0 = 0{,}6$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}6 - \frac{3{,}2 - 0{,}6^2 \cdot (3 - 0{,}6)}{3 \cdot 0{,}6 \cdot (0{,}6 - 2)} = 1{,}526984126\ldots;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}418715905\ldots;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}425693512\ldots;$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1{,}425718548\ldots; \quad \text{usw.}$$

Beim NEWTON-Verfahren gilt die Regel, dass sich die Anzahl "stehender" Dezimalziffern pro Iterationsschritt ungefähr *verdoppelt*! Für eine Millimetergenauigkeit der Eintauchtiefe genügen zwei Nachkommastellen: $x^* = 1{,}43$ dm = 143 mm.

Beginnt man statt mit dem Startwert $x_0 = 0{,}6$ mit $x_0 = 2{,}2$, so lautet die Folge:
$x_0 = 2{,}2$; $x_1 = 2{,}709090909\ldots$; $x_2 = 2{,}524296136\ldots$;
$x_3 = 2{,}481786646\ldots$; $x_4 = 2{,}479504382\ldots$; $x_5 = 2{,}479497894\ldots$ usw.

Der Grund dafür liegt darin, dass 2,2 ein Startwert im Einzugsbereich einer anderen Nullstelle der Funktion $y = f(x)$ liegt, nämlich von $x^* \approx 2{,}4795$ liegt!

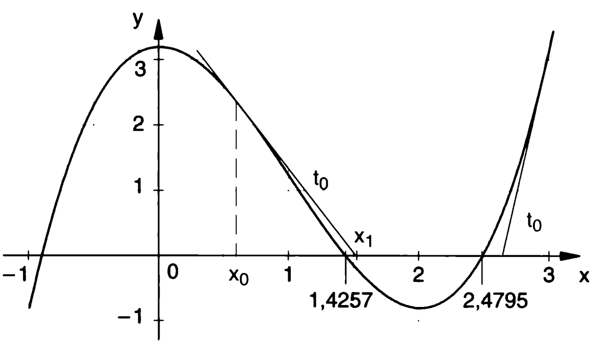


Abb. 9.6 Welcher Startwert?

Abb. 9.6 zeigt den Grund für das unterschiedliche Verhalten. Nur wenn der Startwert x_0 nahe genug bei der gesuchten Nullstelle (Lösung) liegt, kommt man mit den Tangentenschnittstellen $x_1, x_2, \ldots$, beliebig nahe an diese Nullstelle heran. Ein Startwert $\bar{x}_0$ etwa um 2,2 oder wie in Abb. 9.6 um 3 mit der Tangente $\bar{t}_0$ führt zu einer anderen, unerwünschten Nullstelle!

Wie kommt man zu einem geeigneten Startwert für eine Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$, wenn man die ungefähre Lage dieser Lösung wie bei der Eintauchtiefe der Holzkugel nicht kennt? Als Startwert x_0 dient ein Näherungswert der gesuchten Lösung. Daher muss man sich Kenntnis über die ungefähre Lage der Lösung schaffen. Dies kann graphisch erfolgen:

Man schreibt die Gleichung $f(x) = 0$ in einer Form $f_1(x) = f_2(x)$. Aus der Zeichnung entnimmt man näherungsweise die x-Koordinate des Schnittpunktes der beiden Graphen, welche als Startwert x_0 dienen kann.

Beispiel 9.4 : Graphische Ermittlung eines Startwertes

Die Gleichung $f(x) = 3{,}2 - x^2 \cdot (3 - x) = 0$ soll gelöst werden. Gesucht ist ein Startwert für ein Iterationsverfahren (Fixpunktverfahren oder NEWTON-Verfahren).

Lösung

1. Schritt: Man versucht die Gleichung $3{,}2 - x^2 \cdot (3 - x) = 0$ derart in einer Form $f_1(x) = f_2(x)$ zu schreiben, dass die Graphen von $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ einigermaßen schnell skizziert werden können:

$$\begin{aligned} 3{,}2 - 3x^2 + x^3 &= 0 \\ x^3 &= 3x^2 - 3{,}2 \end{aligned}$$

2. Schritt: Zeichnen der Graphen von $y = f_1(x) = x^3$ und $y = f_2(x) = 3x^2 - 3{,}2$ (Parabel!). Hilfreich kann auch eine Wertetabelle für die beiden Funktionen sein.

3. Schritt: Die x-Koordinate jedes Schnittpunktes dieser Graphen ist eine Lösung von $f(x) = 0$. Man entnimmt als x-Koordinate der drei Schnittpunkte etwa die Werte: -1, $1{,}5$ und $2{,}5$. Dies sind taugliche Startwerte für die drei Lösungen der Gleichung $f(x) = 3{,}2 - 3x^2 + x^3 = 0$.

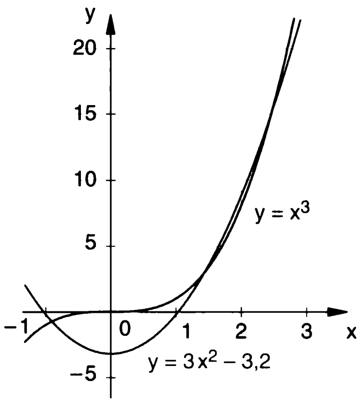


Abb. 9.7 Graphisches Ermitteln eines Startwertes

Beispiel 9.5 : Effektiver Zinssatz

Eine wichtige Anwendung zur Beurteilung von finanziellen Angeboten ist der so genannte **effektive Zinssatz**.

Eine Bank bietet folgende Sparform an: Man zahlt fünfmal jeweils zu Jahresbeginn je € 1000,– und erhält am Ende des fünften Jahres ein Guthaben von € 6000,–. Wie groß müsste der Zinssatz i sein, dass ein Kunde bei den gleichen Einzahlungen nach fünf Jahren den gleichen Endstand erzielt?

Lösung

Wir setzen $q = 1 + i$. Dann gilt:

Endwert der 1. Einzahlung: $1000 \cdot q^5$;

Endwert der 2. Einzahlung: $1000 \cdot q^4$;

…

Endwert der 5. Einzahlung: $1000 \cdot q$.

$1000 \cdot q^5 + 1000 \cdot q^4 + 1000 \cdot q^3 + 1000 \cdot q^2 + 1000 \cdot q = 6000$ oder
$q \cdot (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = 6$.

q	$q \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$
1,1	6,71561
1,08	6,33593
1,06	5,97532
1,062	6,01054
1,061	5,99291
1,0615	6,00172
1,0614	5,99996

Mit $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 = \frac{q^5 - 1}{q - 1}$ (Summe der ersten 5 Glieder einer geometrischen Folge) erhält man schließlich die Gleichung: $q \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 6$.

Wir lösen durch *gezieltes* Probieren. Man wird eine Lösung im Bereich von $i > 0\,\%$ bis $i < 20\,\%$ vermuten, daher das Probieren etwa mit $i = 10\,\% = 0{,}1$ oder $q = 1 + i = 1{,}1$ beginnen.

Man erkennt:
$q^* \approx 1{,}0614$ oder $i^* = q^* - 1 \approx 0{,}0614 = 6{,}14\,\%$.

Der effektive Zinssatz der Sparform, er wird mit i_{eff} bezeichnet, beträgt also 6,14%.

Anmerkung:

Eine Lösung mit dem NEWTON-Verfahren erfordert die Ableitung von $f(q) = q \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} - 6$ oder $f(q) = q \cdot (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) - 6$; dieses Verfahren führt sehr rasch zur Lösung.

Beispiel 9.6 : HERON-Verfahren zur Bestimmung einer Quadratwurzel

Ermittle die Quadratwurzel einer Zahl a.

Lösung

$x^* = \sqrt{a}$ ist die (nichtnegative) Lösung der Gleichung $f(x) = x^2 - a = 0$; löst man nun diese Gleichung mit dem NEWTON-Verfahren, so erhält man bei einem positiven Startwert x_0 Näherungswerte für diese Lösung.

$$f'(x) = 2x; \quad \text{damit: } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Wir berechnen $\sqrt{2}$ (d. h. $a = 2$) und starten mit $x_0 = 1$:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5; \quad x_2 = \frac{17}{12} = 1{,}4167; \quad x_3 = \frac{577}{408} = 1{,}4142; \ldots$$

Dieses Verfahren wurde schon von HERON von Alexandrien (vermutlich 1. Jahrhundert n. Chr.) zur Bestimmung von $\sqrt{2}$ verwendet.

Zuletzt ein Hinweis zur Lösung mit Hilfe eines Computeralgebra-Systems.

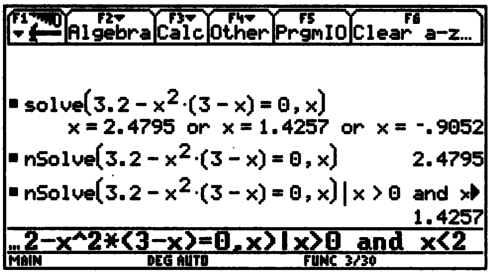
Beispiel 9.7 : Lösung einer Gleichung mit dem Rechner

Wie groß ist die Eintauchtiefe x einer Holzkugel mit $\varrho = 0{,}800\ kg/dm^3$ und dem Durchmesser $d = 2{,}00$ dm in Wasser ?

Löse also die Gleichung $f(x) = 3{,}2 - x^2 \cdot (3 - x) = 0$ für $0 \leq x \leq 2$ (siehe Bsp. 9.1, Seite 292).

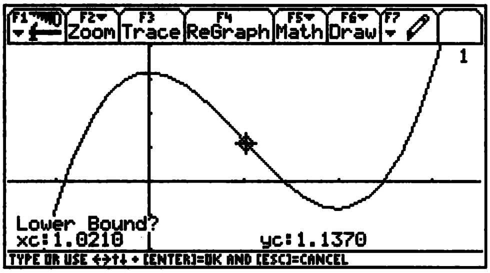
Voyage 200

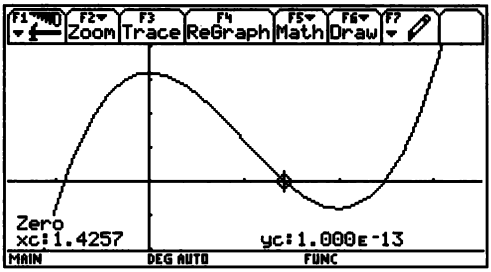
Lösung



solve (F2 1) versucht alle reellen Lösungen einer Gleichung zu ermitteln. Bei AUTO in der Statuszeile (unterste Displayzeile) wird eine Lösung nach Möglichkeit exakt ausgegeben.

nSolve (F2 8) ist oft schneller als solve, sucht aber iterativ nur nach *einer einzigen* Lösung. Durch Angabe eines Intervalls kann man die Lösungssuche auf dieses Intervall einschränken.





Eine weitere Möglichkeit ist, die Kurve $y = f(x) = 3{,}2 - x^2 \cdot (3 - x) = 0$ zu zeichnen. Mit F5 2 (2:Zero) kann man nun eine Nullstelle bestimmen. Man markiert zuerst mit dem Cursor eine untere Schranke (Lower Bound) für die gesuchte Nullstelle, danach ENTER, dann eine obere Schranke (Upper Bound), danach wieder ENTER. Zuletzt ist xc die gesuchte Nullstelle.

Im Überblick: Numerische Lösung von Gleichungen

In der Regel werden **nichtlineare Gleichungen** mit Hilfe von **Näherungsverfahren** gelöst.

Iterationsverfahren sind besonders wichtige Näherungsverfahren. Aus einem Startwert wird eine Folge von Näherungswerten berechnet. Beispiele: **Fixpunktverfahren, Newton'sches-Verfahren**.

Aufgaben

9.1 Löse folgende Gleichung durch gezieltes Probieren auf eine Nachkommastelle genau:

a) $x^3 + x - 1 = 0$ **b)** $x^3 - 3 \cdot x - 3 = 0$ **c)** $x^4 - 3 \cdot x^2 - 1 = 0,\ x > 0$

d) $x + \ln x = 2$ **e)** $x = e^{-x}$ **f)** $x = 1 + \sin x$

9.2 Die folgenden Gleichungen besitzen genau eine Lösung. Sie soll mit dem Fixpunktverfahren auf drei Nachkommastellen genau bestimmt werden:

a) $2x + \ln x = 1$ **b)** $x = \cos x$ **c)** $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

d) $1 - x = \sin x$ **e)** $x \cdot \ln x - 2 = 0$ **f)** $x^2 - \sqrt{x} = 4$

g) $x^3 + x - 1 = 0$ **h)** $x^2 + \ln x = 2$ **i)** $e^{-x} = \frac{x}{3} - 0{,}8$

j) $\sinh x - 2x = 5$ **k)** $2^{-x} - \sin \frac{x}{2} = 3$ **l)** $x^2 + \ln(2x) = 0$

9.3 Bestimme alle Lösungen der Gleichung mit dem Fixpunktverfahren auf zwei Nachkommastellen genau:

a) $\sin 2x = 1 - x^2$ **b)** $\cos(2x) = x^2 - 1$ **c)** $2^x = 4x - 1$

9.4 Ermittle alle Lösungen der folgenden Polynomgleichung auf 2 Nachkommastellen genau und faktorisiere danach das Polynom:

a) $x^3 - 4x^2 + x + 5 = 0$ **b)** $x^3 - x^2 - 10x + 5 = 0$ **c)** $0{,}5 \cdot x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$

9.5 Bestimme die Lösung der Gleichung mit dem NEWTON-Verfahren (auf 3 geltende Ziffern):

a) $x^3 - x + 1 = 0$ **b)** $x^3 - 3x = 3$ **c)** $x^3 + 1{,}08 \cdot x^2 + 0{,}98x + 1 = 0$

d) $\frac{x}{15} - e^{-x^2} = 0$ **e)** $x^2 = 2 - \ln \frac{x}{2}$ **f)** $x^2 - 2 \cdot \cos 2x = 0,\ x > 0$

g) $x^2 \cdot e^{-x} = 1$ **h)** $2^x + x = 2$ **i)** $\frac{1}{x} \cdot \lg x + \sqrt{x+1} = 2$

j) $2x = \tan x$ (Lösung in $[1, 2]$), **k)** $\tan \alpha - 0{,}25 = 0{,}5 \cdot \sin \alpha$, Lösung in $[0°, 60°]$

9.6 Bestimme alle (reellen) Lösungen mit dem NEWTON-Verfahren auf drei Nachkommastellen genau:

a) $x^3 - 5x^2 + 10 = 0$ **b)** $\sin 2x = 1 - x^2$ **c)** $x^3 + 5 = e^x$

9.7 Bestimme Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte und Wendepunkte. Skizziere den Graphen.

a) $y = x^4 - 4x^3 + 2x^2$ **b)** $y = x^7 - 5x + 1$ **c)** $y = x^4 - 2x^2 + 1$

9.8 Die (reelle) Lösung der Gleichung $x^3 - a = 0$ mit $a \geq 0$ lautet: $x^* = \sqrt[3]{a}$. Löse diese Gleichung mit dem NEWTON-Verfahren und gib damit allgemein eine Iterationsvorschrift an, eine dritte Wurzel zu berechnen.

9.9 Auf ein Sparbuch werden zu Beginn jedes Jahres € 1000,– eingezahlt. Wie groß ist die Verzinsung (in % auf 2 Nachkommastellen genau), wenn das Endkapital beträgt:

a) € 3217,– nach 3 Jahren, **b)** € 5801,– nach 5 Jahren, **c)** € 9083,– nach 7 Jahren.

Hinweis: Ist K_0 die Einzahlung zu Jahresbeginn, K_n das Gesamtkapital ("Endwert") nach n Jahren und p der Zinssatz in %, so gilt $K_n = K_0 \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$.

9.10 Ein Schüler legt dreimal jeweils zu Jahresbeginn € 2000,– bei 4%-iger Verzinsung auf ein Sparbuch. Seine Eltern legen zugleich mit dem Schüler jeweils € 500,– dazu.

a) Wie groß ist die Spareinlage am Ende des dritten Jahres?

b) Mit welchem Zinssatz müssten die alleinigen Einzahlungen des Schülers verzinst werden, um den gleichen Endbetrag nach 3 Jahren zu erreichen?

9.11 Eine Firma steckt in Schwierigkeiten. Ihr Eigentümer denkt ans Aufhören und möchte verkaufen. Er erhält zwei Übernahmeangebote:

Angebot A: € 10 Mio. sofort und sechsmal je € 2 Mio. in Jahresabständen, beginnend ein Jahr nach der Übernahme.

Angebot B: Sechsmal in Jahresabständen je € 4 Mio. mit sofortigem Beginn.

Bei welchem Zinssatz sind die beiden Angebote gleichwertig?

9.12 Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{11}{2} \cdot x^2 + 60 \cdot x + 50$ (Geldeinheiten). Bestimme die Gewinngrenzen (= Nullstellen) der Gewinnfunktion, wenn

a) der Preis pro Mengeneinheit unabhängig von der abgesetzten Menge x gleich $p = 50$ Geldeinheiten beträgt;

b) der Preis pro Mengeneinheit mit der abgesetzten Menge x linear nach dem Gesetz $p(x) = 55 - \frac{x}{2}$ fällt (d.h. die abgesetzte Menge fällt mit steigendem Preis).

9.13 Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 14x^2 + 90x + 145$.

a) Bei welcher Stückzahl sind die Durchschnittskosten $\frac{K(x)}{x}$ am Geringsten (man spricht bei dieser produzierten Menge vom *Betriebsoptimum*)?

b) Bestimme die Gewinngrenzen, wenn zwischen Preis und abgesetzter Warenmenge x die Beziehung $p = 155 - 9x$ angenommen wird?

9.14 Zwei Investitionsprojekte A und B werden in Erwägung gezogen, eines davon soll realisiert werden. Die Anschaffungszahlungen betragen € 30000 beim Projekt A und € 52000 beim Projekt B. Projekt A lässt über 6 Jahre einen jährlichen Ertrag von € 10000 erwarten, Projekt B einen solchen von € 15000, ebenfalls über den gleichen Zeitraum. Die jährlichen Erträge fallen zum Jahresende an. Bei welchem Kalkulationszinssatz sind die beiden Investitionen als gleichwertig zu betrachten?

9.15 Ein waagrecht gelagerter zylinderförmiger Öltank hat eine Länge von 2,00 m und einen Durchmesser von 1,20 m. Für eine Ölstandsanzeige sollen die Füllhöhen h (auf Zentimeter genau) bestimmt werden, wenn die Tankinhalte um jeweils 500 *l* zunehmen.

9.16 Eine halbkugelförmige Schale mit dem Radius r = 10 cm wird mit Wasser gefüllt. Wie hoch ist der Wasserstand in der Schale, wenn 50% des Gesamtvolumens eingefüllt werden?

9.17 Ein Ball wird in 2,00 m Höhe über dem Erdboden mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20,0 $\frac{m}{s}$ unter einem Winkel α schräg nach oben geworfen. Welcher Abwurfwinkel muss gewählt werden, um einen Punkt im Abstand 14,0 m in einer Höhe von 8,0 m zu treffen?
Hinweis: Liegt der Koordinatenursprung unter dem Abwurfpunkt am Erdboden und liegt die Wurfbahn in der Koordinatenebene, so gilt für die Wurfbahn (x, y in Meter):
$y = 2 + x \cdot \tan\alpha - \frac{x^2}{80 \cdot \cos^2\alpha}$ (Wie viele Lösungen gibt es?)

9.18 Ein Leitungsseil ist in einer Höhe h = 8,0 m auf zwei Masten befestigt, die voneinander einen Abstand von 50,0 m haben. Die Seilkurve ist durch $y = a \cdot \cosh\frac{x}{a} + b$ gegeben. Berechne a, wenn der größte Seildurchhang 1,5 m ist.

9.19 Gegeben ist ein halb eingespannter Träger mit einer konstanten Streckenlast q nach Abb. 9.8. Die Gleichung seiner Biegelinie lautet:
$y = \frac{q \cdot L^4}{48 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{x}{L} \cdot \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right)$.
Bestimme Lage und Ausmaß der größten Durchbiegung sowie den Wendepunkt der Biegeline.
Hinweis: Setze $u = \frac{x}{L}$.

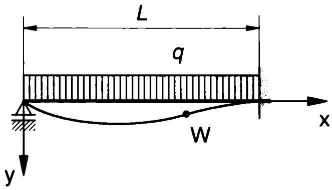


Abb. 9.8

9.20 $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{x}{4} \cdot e^{\frac{-x}{2}} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ (Abb. 9.9)

ist die Dichtefunktion der sogenannten χ^2-Verteilung[19] mit 4 Freiheitsgraden, eine in der Statistik auftretende Prüfverteilung.

a) Berechne den Flächeninhalt $G(q) = \int_0^q g(x)\,dx$ von 0 bis zu einer oberen Grenze q.

b) Bestimme sodann q derart, dass dieser Flächeninhalt gleich 0,95 ("95%-Quantil") ist, d.h. löse die Gleichung $G(q) = 0{,}95$ nach q.

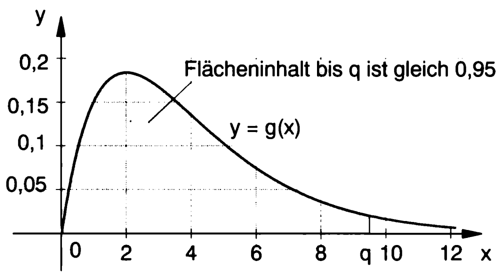


Abb. 9.9

9.21 Zwei Punkte A und B (Abb. 9.10) liegen an verschiedenen Seiten eines Flusses mit der Breite 40 m. Es soll die Lage der Brücke gefunden werden, welche die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten ermöglicht.

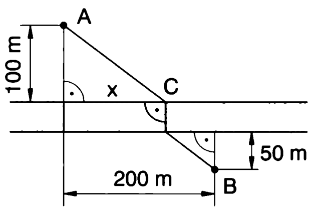


Abb. 9.10

9.22 Aus einer rechteckförmigen Platte mit den Seitenlängen b = 120 mm und h = 70 mm soll nach Abb. 9.11 ein halbkreisförmiges Flächenstück derart herausgeschnitten werden, dass die y-Koordinate y_S des Schwerpunktes der Reststückes gleich 40 mm ist.

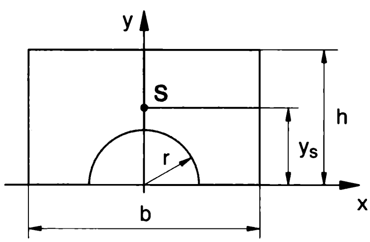


Abb. 9.11

[19] gesprochen "Chi-Quadrat-Verteilung"

9.2 Polynominterpolation

Oft tritt das Problem auf, dass statt einer Funktion nur einige *ihrer Werte* vorliegen. Trotzdem sind auch Funktionswerte "dazwischen" gefragt. Wir nehmen also an, dass folgende Wertetabelle einer Funktion $y = f(x)$ vorliegt:

x	y = f(x)
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
.	.
.	.
x_n	y_n

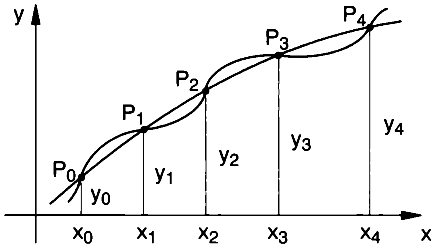


Abb. 9.12 Zwei interpolierende Funktionen

Folgende Namensvereinbarungen sind üblich:

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ (mit $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$) **Stützstellen** (oder Knoten)

$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ **Stützwerte**

$P_0(x_0/y_0), P_1(x_1/y_1), P_2(x_2/y_2), \ldots, P_n(x_n/y_n)$ **Stützpunkte**.

Man spricht von einer **Interpolation**, wenn eine Funktion ermittelt werden soll, die an den vorgegebenen Stützstellen die gegebenen Stützwerte annimmt.

Die gesuchte Funktion soll ein *einfaches Interpolieren* ermöglichen, wie man die Berechnung der Zwischenwerte nennt. Dabei soll sie zwischen den Stützstellen von der gegebenen Funktion (falls diese bekannt ist) *möglichst wenig abweichen*. In Abb. 9.12 sind die Graphen zweier möglicher Interpolationsfunktionen gezeichnet.

Von grundlegender Bedeutung ist die **Polynominterpolation**, die Interpolation durch Polynomfunktionen. Beispiele solcher Funktionen sind:

$y = 2x - 1$	lineare Funktion oder Polynomfunktion vom Grad 1,
$y = 2x^2 - 3x + 1$	quadratische Funktion oder Polynomfunktion vom Grad 2
$y = -x^3 + 3x^2 - 2$	kubische Funktion oder Polynomfunktion vom Grad 3
$y = 4x^7 - 3x^5 - 2x^2 + 3x - 5$	Polynomfunktion vom Grad 7.

Allgemein schreibt man eine Polynomfunktion vom Grad n (= höchste vorkommende Hochzahl von x):

$$y = p(x) = \underbrace{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}_{\text{Polynom vom Grad n}}$$

Kurzschreibweise: $y = p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$.

Wir werden im Folgenden nur Polynome als Interpolationsfunktionen verwenden. Es gibt jedoch auch wichtige Anwendungsgebiete, in denen etwa Kreisfunktionen ("trigonometrische Interpolation") oder rationale Funktionen Verwendung finden.

Vor Behandlung der Interpolationsaufgabe soll noch ein rechentechnisch günstiges Verfahren zur Berechnung von Polynomwerten behandelt werden.

Beispiel 9.8 : HORNER[20]-Form eines Polynoms

Berechne den Wert des Polynoms $f(x) = x^4 - 2 \cdot x^3 - 5x + 1$ für $x = 3$.

Lösung

Die Idee ist, dass es "unwirtschaftlich" ist, die auftretenden Potenzen von x einzeln zu berechnen. Dazu schreiben wir das Polynom zuerst nach fallenden Potenzen geordnet und heben dann *schrittweise* heraus:

$f(x) = 1 - 5x - 2x^3 + x^4 = 1 + x \cdot (-5 - 2x^2 + x^3) = 1 + x \cdot (-5 + x^2 \cdot (-2 + x))$.

Diese Darstellung wird als **HORNER-Form des Polynoms** bezeichnet. Nun kann der Polynomwert verhältnismäßig leicht berechnet werden.

$f(3) = 1 + 3 \cdot (-5 + 3^2 \cdot (-2 + 3)) = 1 + 3 \cdot (-5 + 3^2 \cdot 1) = 1 + 3 \cdot (-5 + 9) = 1 + 3 \cdot 4 = 13$.

Im Allgemeinen erreicht man in der HORNER-Form fast eine Halbierung der Multiplikationen gegenüber der üblichen Summendarstellung, was zusätzlich numerisch auch die Rundungsfehler geringer hält.

Es gilt nun der folgende wichtige Satz (ohne Begründung):

Polynominterpolation

Sind alle n + 1 Stützstellen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ paarweise verschieden, so gibt es genau ein Interpolationspolynom vom Grad n.

Der Grad des eindeutig bestimmten Interpolationspolynoms ist um 1 geringer als die Anzahl der Stützstellen. Bei beispielsweise 3 Stützstellen gibt es genau ein Interpolationspolynom vom Grad 2 (Parabel).

Beispiel 9.9 : Lineare Interpolation

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = x^2 - 2{,}5 \cdot x + 1{,}8$.

a) Führe eine *lineare* Interpolation dieser Funktion an der Stelle $x = 1{,}6$ bei Verwendung der Stützstellen $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$ durch.

b) An welcher Stelle zwischen x_0 und x_1 ist der bei der linearen Interpolation entstehende absolute Fehler am größten?

Lösung

Zu **a)**

x	y = f(x)
$x_0 = 1$	$y_0 = 0{,}3$
$x_1 = 2$	$y_1 = 0{,}8$

Bestimmung der interpolierenden Funktion $y = k \cdot x + d$:

I: $0{,}3 = k \cdot 1 + d$

II: $0{,}8 = k \cdot 2 + d$

Daraus: $k = 0{,}5$; $d = -0{,}2$

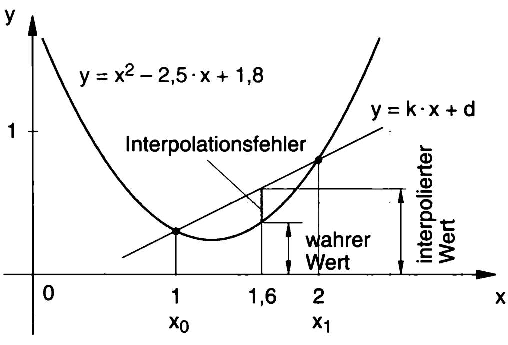


Abb. 9.13 Lineare Interpolation

[20] W.G. HORNER (1756 – 1837), englischer Mathematiker

Also lautet das *Interpolationspolynom 1. Grades*: $y = 0{,}5 \cdot x - 0{,}2$.

An der Stelle $x = 1{,}6$ *interpolierter Wert*: $y = 0{,}5 \cdot 1{,}6 - 0{,}2 = 0{,}6$.

Wahrer Funktionswert an der Stelle $x = 1{,}6$: $y = 1{,}6^2 - 2{,}5 \cdot 1{,}6 + 1{,}8 = 0{,}36$.

Damit beträgt der Interpolationsfehler an der Stelle $x = 1{,}6$: $0{,}6 - 0{,}36 = 0{,}24$.

Für den praktischen Gebrauch wird die in "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 185f., beschriebene Vorgangsweise empfohlen.

Zu **b)** $0{,}5 \cdot x - 0{,}2$ ... an der Stelle x interpolierter Wert;

$x^2 - 2{,}5 \cdot x + 1{,}8$. .... wahrer Wert an der Stelle x.

Absoluter Fehler F = interpolierter Wert – wahrer Wert =

$$= 0{,}5 \cdot x - 0{,}2 - (x^2 - 2{,}5 \cdot x + 1{,}8) = -x^2 + 3x - 2.$$

F (x) ist eine quadratische Funktion, deren Graph eine sich nach unten öffnende Parabel ist. Ihr Scheitel ist daher ein Hochpunkt, dessen x-Koordinate die gesuchte Maximumstelle ist.

$F'(x) = -2x + 3 = 0 \Rightarrow x_{max} = 1{,}5$.

Der maximale absolute Fehler tritt daher an der Stelle $x = 1{,}5$ auf.

$F(1{,}5) = -1{,}5^2 + 3 \cdot 1{,}5 - 2 = 0{,}25$ ist maximaler absoluter Fehler.

Beispiel 9.10 : Quadratische Interpolation

Bei einem PKW wurde der Benzinverbrauch pro 100 km bei drei Geschwindigkeiten gemessen, wie die nachfolgende Tabelle zeigt. Es soll der Benzinverbrauch bei 70 km/h interpoliert werden.

Lösung

x in km/h	y in Liter
50	7,2
90	10,0
110	12,6

Da drei Punkte zur Verfügung stehen, kann eine quadratische Interpolation durchgeführt werden:

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

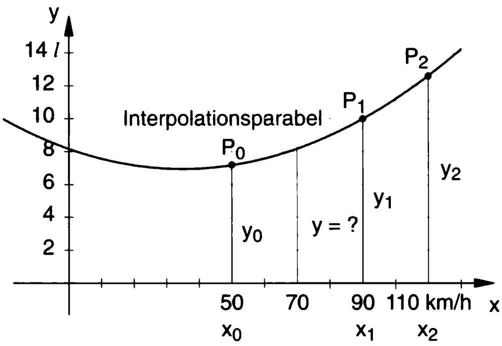


Abb. 9.14 Quadratische Interpolation

Die drei Punkte $P_0(50/7{,}2)$, $P_1(90/10{,}0)$ und $P_3(110/12{,}6)$ bestimmen die Parabel, den Graphen einer quadratischen Funktion; ihre Koordinaten erfüllen die Funktionsgleichung:

$$\text{I}: \quad 7{,}2 = a \cdot 50^2 + b \cdot 50 + c$$

$$\text{II}: 10{,}0 = a \cdot 90^2 + b \cdot 90 + c$$

$$\text{III}: 12{,}6 = a \cdot 110^2 + b \cdot 110 + c$$

Dies ist wieder ein lineares Gleichungssystem für die drei Unbekannten a, b und c, das wir in der Form schreiben:

$$\text{I}: \quad 2500 \cdot a + 50 \cdot b + c = 7{,}2$$

$$\text{II}: \quad 8100 \cdot a + 90 \cdot b + c = 10{,}0$$

$$\text{III}: 12100 \cdot a + 110 \cdot b + c = 12{,}6$$

Lösung: $a = 0{,}001$; $b = -0{,}07$; $8{,}2$.

Damit laut die Gleichung der *Interpolationsparabel*: $y = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}07 \cdot x + 8{,}2$.

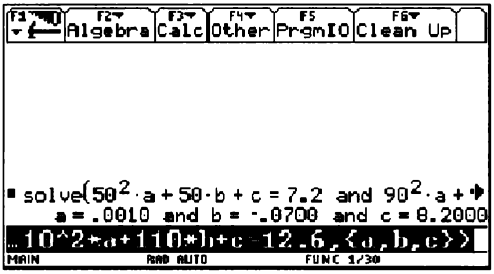
An der Stelle $x = 70$ *interpolierter Wert*: $y = 0{,}001 \cdot 90^2 - 0{,}07 \cdot 90 + 8{,}2 = 8{,}2$.

Der quadratisch interpolierte Benzinverbrauch pro 100 km bei $x = 70$ km/h ist daher 8,2 *l*.

Da wir die wahre Funktion $y = f(x)$ des Benzinverbrauchs – abgesehen an den drei Stützstellen – nicht kennen, kann auch nichts über den *Interpolationsfehler* gesagt werden.

Aus *technischen* Gründen und nicht aus mathematischen kann für einen PKW in einem gewissen Geschwindigkeitsbereich eine annähernd parabelförmige Abhängigkeit des Benzinverbrauchs von der Fahrgeschwindigkeit angenommen werden. Dies spricht für die Zweckmäßigkeit einer quadratischen Interpolation. Stehen die Verbrauchswerte nur für zwei Geschwindigkeiten zur Verfügung, kann man freilich auch nur eine lineare (Polynom-)Interpolation vornehmen.

Voyage 200



Beispiel 9.11 : Polynominterpolation vom Grad 4

Bestimme das Interpolationspolynom vom Grad 4 zu den fünf Stützpunkten laut nachfolgender Wertetabelle.

Lösung

x	y
–2	0
–1	0
0	1
1	0
2	0

$y = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Einsetzen ergibt ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten des Polynoms:

$$\begin{aligned}
\text{I:}\quad & 0 = 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0 \\
\text{II:}\quad & 0 = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \\
\text{III:}\quad & 1 = a_0 \\
\text{IV:}\quad & 0 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \\
\text{V:}\quad & 0 = 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0
\end{aligned}$$

Daraus:

$a_4 = \frac{1}{4}$, $a_3 = 0$; $a_2 = -\frac{5}{4}$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$.

Somit lautet die Interpolationsfunktion:

$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + 1$.

Abb. 9.15 zeigt den zugehörigen Graphen.

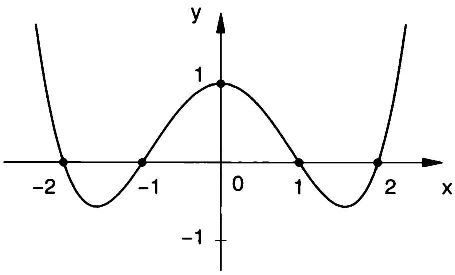


Abb. 9.15 Polynominterpolation vom Grad 4

Approximation von Funktionen durch Polynome:

Funktionen werden in Computerprogrammen oft durch Polynome approximiert. Beispielsweise gilt mit einer Genauigkeit auf 5 Nachkommastellen:

$\ln(1 + x) = 0{,}99949556 \cdot x - 0{,}49190896 \cdot x^2 + 0{,}28947478 \cdot x^3 - 0{,}13606275 \cdot x^4 + 0{,}032115845 \cdot x^5$ für $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Schon aus Beispiel 9.11 wird ersichtlich, dass es mit wachsender Stützstellenanzahl bei Verwendung einer einzigen Polynomfunktion zu einer *starken Welligkeit* ihres Graphen zwischen den Stützstellen kommen kann. Autokarosserien, Flugzeugtragflächen oder Schiffsrümpfe, die durch solche Interpolationskurven geformt sind, sind nicht vorstellbar. Man wird daher eine "möglichst glatte" Kurve durch die Stützpunkte verlangen. Eine Lösung dieses Problems sind bestimmte so genannte **Splines**[21]. *Ein Spline setzt sich stückweise aus Polynomfunktionen des gleichen niedrigen Grades zusammen.*

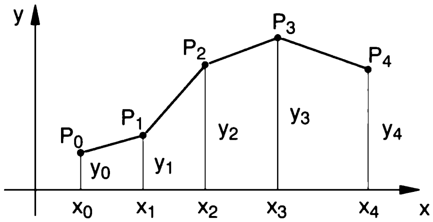
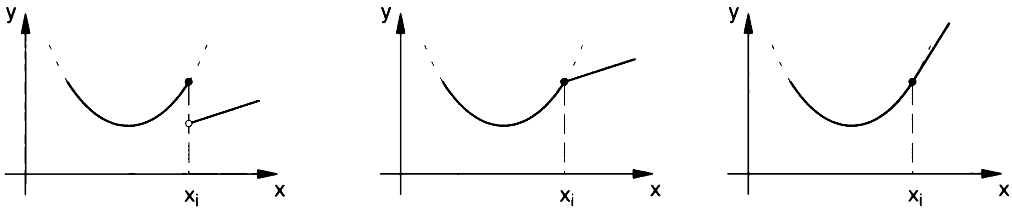


Abb. 9.16 Linearer Spline

Ein sehr einfacher Spline, der **lineare Spline**, ist nichts anderes als der **Streckenzug** durch die Stützpunkte P_0 bis P_n (Abb. 9.16). Er setzt sich somit aus Geradenstücken, Graphen von Polynomfunktionen 1. Grades, zusammen. Allerdings entspricht er wegen der auftretenden Ecken des Graphen noch nicht der Vorstellung einer glatten Kurve. Wir fragen daher, wie man die Glattheit einer Kurve *mathematisch* ausdrücken kann.



Sprungstelle — Stelle mit Sprung in der Steigung — Stelle mit Sprung in der Krümmung

Abb. 9.17 "Nichtglatte" Kurven

Abb. 9.17 zeigt Graphen, die aus einem gekrümmten Bogenstück und einem Geradenstück zusammengesetzt sind. Damit der Übergang an der Stelle x_i als "glatt" empfunden wird, sollte der Graph dort keinen Sprung im Funktionswert, in der Steigung ("Knick") und in der Krümmung haben. Diese drei Forderungen können erfüllt werden, wenn man den gesuchten Spline stückweise aus *kubischen* Polynomen zusammensetzt. Man spricht in diesem Fall von einem **kubischen Spline**.

Beispiel 9.12 : Kubischer Spline

Bestimme den interpolierenden kubischen Spline auf Grund der vier Stützstellen x_0, x_1, x_2, x_3 bzw. die zugehörigen Stützwerte y_0, y_1, y_2, y_3 in nachfolgender Tabelle.

---

21 spline (engl.), gesprochen "splain", biegsames Lineal

Lösung

x	y
0	0
1	1
2	0
3	0

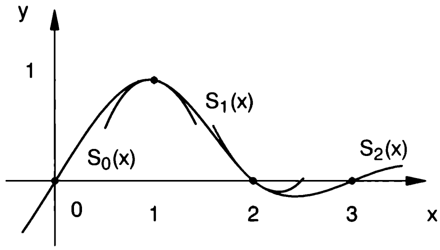


Abb. 9.18 Teilstücke des kubischen Splines

Wir setzen jetzt drei verschiedene kubische Polynomfunktionen $S_0(x)$, $S_1(x)$ und $S_2(x)$ an. $S_0(x)$ interpoliert zwischen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$, $S_1(x)$ zwischen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ und $S_2(x)$ zwischen $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$. Dazu wird eine besondere Schreibweise eines Polynoms verwendet, die für die spätere numerische Auswertung von Vorteil ist:

$$S_0(x) = a_0 + b_0 \cdot (x - 0) + c_0 \cdot (x - 0)^2 + d_0 \cdot (x - 0)^3 = a_0 + b_0 \cdot x + c_0 \cdot x^2 + d_0 \cdot x^3$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1 \cdot (x - 1) + c_1 \cdot (x - 1)^2 + d_1 \cdot (x - 1)^3$$
$$S_2(x) = a_2 + b_2 \cdot (x - 2) + c_2 \cdot (x - 2)^2 + d_2 \cdot (x - 2)^3.$$

Für den späteren Gebrauch bilden wir die erste und zweite Ableitung:

$$S_0'(x) = b_0 + 2 \cdot c_0 \cdot x + 3 \cdot d_0 \cdot x^2$$
$$S_1'(x) = b_1 + 2 \cdot c_1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot d_1 \cdot (x - 1)^2$$
$$S_2'(x) = b_2 + 2 \cdot c_2 \cdot (x - 2) + 3 \cdot d_2 \cdot (x - 2)^2.$$

$$S_0''(x) = 2 \cdot c_0 + 6 \cdot d_0 \cdot x$$
$$S_1''(x) = 2 \cdot c_1 + 6 \cdot d_1 \cdot (x - 1)$$
$$S_2''(x) = 2 \cdot c_2 + 6 \cdot d_2 \cdot (x - 2).$$

$S_0(0) = a_0 = 0$, $S_1(1) = a_1 = 1$ und $S_2(2) = a_2 = 0$. Damit sind noch die 9 Unbekannten b_0, c_0, d_0, b_1, c_1, d_1, b_2, c_2, d_2 zu bestimmen. Dazu dienen folgende "Glattheitsforderungen" für die inneren Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$:

1. Keine Sprung der Funktionswerte: $S_0(1) = S_1(1)$, $S_1(2) = S_2(2)$
2. Kein Sprung der Steigungen, d.h. der 1. Ableitungen: $S_0'(1) = S_1'(1)$, $S_1'(2) = S_2'(2)$
3. Kein Sprung der Krümmungen.
   Wegen der schon vorausgesetzten Gleichheit der 1. Ableitungen, bedeutet dies die Gleichheit der 2. Ableitungen: $S_0''(1) = S_1''(1)$, $S_1''(2) = S_2''(2)$.

Dazu kommt natürlich noch die Bedingung $S_2(3) = 0$. Für die erwähnten 9 Unbekannten stehen damit bis jetzt 7 Bedingungen zur Verfügung; es fehlen noch zwei. Diese werden so festgelegt, dass der Spline an der ersten und letzten Stützstelle mit der Krümmung 0 einmünden soll: $S_0''(0) = 0$ und $S_2''(3) = 0$. Wegen dieser Bedingung heißt der Spline "natürlicher" kubischer Spline.

Setzt man ein, so lauten die 9 Bedingungen:

$S_0(1) = S_1(1)$: (1) $b_0 + c_0 + d_0 = 1$ (da $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$)

$S_1(2) = S_2(2)$: (2) $1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0$ (da $a_1 = 1$ und $a_2 = 0$)

$S_0'(1) = S_1'(1)$: (3) $b_0 + 2\cdot c_0 + 3\cdot d_0 = b_1$

$S_1'(2) = S_2'(2)$: (4) $b_1 + 2\cdot c_1 + 3\cdot d_1 = b_2$

$S_0''(1) = S_1''(1)$: (5) $2\cdot c_0 + 6\cdot d_0 = 2\cdot c_1$

$S_1''(2) = S_2''(2)$: (6) $2\cdot c_1 + 6\cdot d_1 = 2\cdot c_2$

$S_2(3) = 0$: (7) $b_2 + c_2 + d_2 = 0$ (da $a_2 = 0$)

$S_0''(0) = 0$: (8) $2\cdot c_0 = 0$

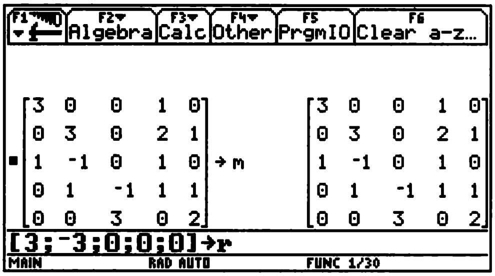
$S_2''(3) = 0$: (9) $2\cdot c_2 + 6\cdot d_2 = 0$

Aus (8) folgt $c_0 = 0$, aus (5) $d_0 = \frac{1}{3}\cdot(c_1 - c_0) = \frac{1}{3}\cdot c_1$, aus (6) $d_1 = \frac{1}{3}\cdot(c_2 - c_1)$ und schließlich aus (9) $d_2 = -\frac{1}{3}\cdot c_2$. Setzt man dafür in die anderen Gleichungen ein, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für noch 5 Unbekannte:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
3\cdot b_0 & & & & & + & c_1 & & & = & 3\\
 & & 3\cdot b_1 & & & + & 2\cdot c_1 & + & c_2 & = & -3\\
b_0 & - & b_1 & & & + & c_1 & & & = & 0\\
 & & b_1 & - & b_2 & + & c_1 & + & c_2 & = & 0\\
 & & & & 3\cdot b_2 & & & + & 2\cdot c_2 & = & 0
\end{array}
\quad \text{oder} \quad
\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ b_2\\ c_1\\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ -3\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Weiterrechnung erfolgt mit dem Taschenrechner, obwohl dies hier auch mit der Hand kein Problem ist.

Voyage 200



Die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite wird eingegeben sowie auf m bzw. r zwischengespeichert.

simult(m,r) ergibt die Lösung als Vektor:

$b_0 = 1{,}6$; $b_1 = -0{,}2$; $b_2 = -0{,}8$; $c_1 = -1{,}8$; $c_2 = 1{,}2$.

Damit sind ferner: $d_0 = \frac{1}{3}\cdot c_1 = -0{,}6$; $d_1 = \frac{1}{3}\cdot(c_2 - c_1) = 1$; $d_2 = -\frac{1}{3}\cdot c_2 = -0{,}4$.

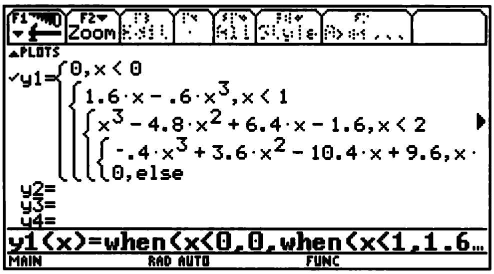
Die drei Teile des gesuchten kubischen Spline lauten daher wie folgt:

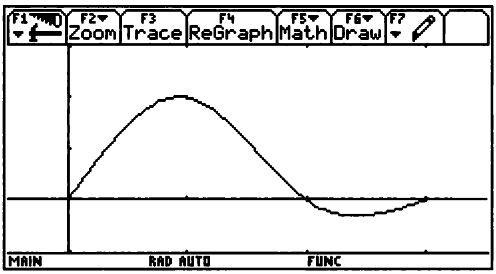
$S_0(x) = 1{,}6\cdot x - 0{,}6\cdot x^3, \quad 0 \leqslant x < 1$

$S_1(x) = 1 - 0{,}2\cdot(x-1) - 1{,}8\cdot(x-1)^2 + (x-1)^3 = x^3 - 4{,}8\cdot x^2 + 6{,}4\cdot x - 1{,}6, \quad 1 \leqslant x < 2$

$S_2(x) = -0{,}8\cdot(x-2) + 1{,}2\cdot(x-2)^2 - 0{,}4\cdot(x-2)^3 = -0{,}4\cdot x^3 + 3{,}6\cdot x^2 - 10{,}4\cdot x + 9{,}6, \quad 2 \leqslant x \leqslant 3$

Voyage 200





MC

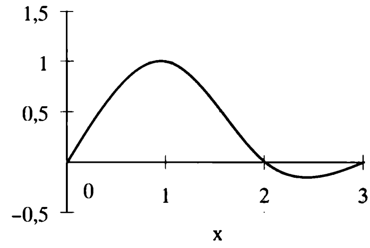
Berechnung mit Mathcad:

Vorgabe der Stützstellen (vx) und Stützwerte (vy): $vx := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $vy := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bestimmung des kubischen Splines: vs:= lspline (vx, vy)

Zwischenwert für x = 0,5: interp(vs, vx, vy, 0.5) = 0.725

Zeichenbereich: x:= 0, 0.05.. 3



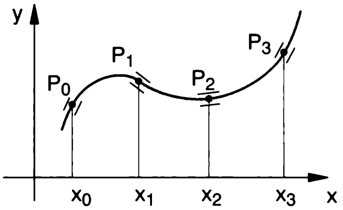


Abb. 9.19

Kubische Splines sind geometrisch dadurch ausgezeichnet, dass sie in guter Näherung von allen möglichen Interpolationsfunktionen jene sind, deren *Krümmung* über das Interpolationsintervall betrachtet minimal ist. Der kubische interpolierende Spline gibt näherungsweise den Verlauf eines elastischen Stabes an, der durch Lager in den Stützpunkten P_0, P_1, ..., P_n reibungsfrei festgehalten wird (Kräfte nur normal zur Biegelinie, Abb. 9.19). Allgemein kann gesagt werden: *Splines wirken glättend und haben eine geringe Welligkeit.*

Aufgaben

9.23 Berechne mit dem Verfahren von HORNER den Polynomwert an der Stelle x:

a) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$, $x = 3$ **b)** $x^5 - 3x^3 - x^2 - 5$, $x = 2$

c) $-x^5 + x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 8x$, $x = -2$ **d)** $x^8 - 7x^5 - x^3 - 10x$, $x = 2$

9.24 Eine Funktion liegt in tabellierter Form vor. Berechne den Funktionswert an folgender Stelle näherungsweise durch lineare Interpolation:

a) x = 0,593 **b)** x = 0,606

x	0,59	0,60	0,61
y	0,7257	0,7291	0,7324

9.25 Ebenso:

a) x = 0,222 **b)** x = 0,237

x	0,22	0,23	0,24
y	0,9759	0,9737	0,9713

9.26 **a)** Interpoliere die Funktion $y = \sqrt{x}$ zwischen den Stützstellen $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$ durch eine lineare Funktion und berechne damit näherungsweise $\sqrt{1{,}44}$.

b) An welcher Stelle zwischen 1 und 2 ist der absolute Fehler betragsmäßig am größten?

9.27 **a)** Berechne aus der Kenntnis von ln1,2 und ln 2 durch lineare Interpolation näherungsweise ln 1,5 und berechne den absoluten Fehler.

b) An welcher Stelle zwischen 1,2 und 2 ist der absolute Fehler betragsmäßig am größten?

9.28 Ermittle durch Handrechnung das quadratische Interpolationspolynom, wenn folgende Stützpunkte Pi gegeben sind:

a) $P_0(0/3)$, $P_1(2/3)$, $P_2(3/6)$ **b)** $P_0(-1/3)$, $P_1(1/1)$, $P_2(2/6)$

c) $P_0(-1/4)$, $P_1(1/6)$, $P_2(3/0)$ **d)** $P_0(-2/-3)$, $P_1(2/5)$, $P_2(6/-3)$

9.29 Ermittle mit dem Taschenrechner das quadratische Interpolationspolynom, wenn folgende Stützpunkte P_i gegeben sind:

a) $P_0(0{,}4/8{,}16)$, $P_1(1{,}2/8{,}56)$, $P_2(2{,}8/11{,}28)$

b) $P_0(0{,}8/1{,}00)$, $P_1(1{,}2/5{,}76)$, $P_2(2{,}6/10{,}66)$

9.30 Der Kraftstoffverbrauch eines PKW pro 100 km wurde für drei Geschwindigkeiten festgestellt: 6,0 *l* bei 70 km/h, 7,1 *l* bei 90 km/h und 9,9 *l* bei 120 km/h. Berechne durch quadratische Interpolation näherungsweise den Treibstoffverbrauch für eine Geschwindigkeit von 100 km/h.

9.31 Nähere die Funktion $y = \sin x$ im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ zu den Stützstellen 0, $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ durch das quadratische Interpolationspolynom und vergleiche den interpolierten Wert und den wahren Wert für $x = \frac{\pi}{3}$.

9.32 Ermittle das kubische Interpolationspolynom für das Beispiel 9.12.

9.33 Interpoliere die Funktion $y = \sqrt{x}$

a) mit einem Polynom 4. Grades zu den Stützstellen 0, 1, 4, 9 und 16 und berechne damit näherungsweise $\sqrt{12}$,

b) mit einem Polynom 3. Grades zu den Stützstellen 1, 4, 9 und 16 und berechne damit näherungsweise $\sqrt{12}$,

c) mit einem Polynom 2. Grades zu den Stützstellen 4, 9 und 16 und berechne damit näherungsweise $\sqrt{12}$.

9.34 Ermittle den kubischen Spline zu den Stützpunkten:

a) $P_0(0/1)$, $P_1(1/0)$, $P_2(2/0)$ **b)** $P_0(0/1)$, $P_1(1/1)$, $P_2(2/0)$

c) $P_0(0/0)$, $P_1(1/1)$, $P_2(2/2)$, $P_3(3/2)$ **d)** $P_0(0/0)$, $P_1(2/1)$, $P_2(3/2)$, $P_3(5/0)$

9.35 Im CAD verwendet man so genannte *Bézier-Kurven*, die eine schnelle Beeinflussung ihrer Form durch wenige Punkte erlauben. Es handelt sich dabei um eine Parameterdarstellung von Kurven, die analog zur Spline-Interpolation stückweise durch Polynome etwa vom Grad 3 erfolgt. Gegeben ist das folgende Bézier-Kurvenstück:

$$\vec{x} = (1-t)^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\,t\,(1-t)^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\,t^2\,(1-t) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t^3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Die Kurve ist durch die Punkte $P_0(1/1)$, $P_1(2/3)$, $P_2(4/5)$ und $P_3(5/1)$ gesteuert. Zeige:

a) Die Punkte P_0 und P_3 sind Punkte der Kurve.

b) Die Tangente in P_0 ist die Gerade durch P_0 und P_1, in P_3 die Gerade durch P_2 und P_3.

c) Skizziere die Kurve. Wie liegt die Kurve im Viereck $P_0\,P_1\,P_2\,P_3$?

10 Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen

10.1 Einführung

Bisher war stets nur von Funktionen $y = f(x)$ mit *einer* Variablen x die Rede. Damit wurden Zusammenhänge und Abhängigkeiten zwischen zwei Größen x und y beschrieben. In den Anwendungen treten jedoch auch vielfach Größen auf, die von zwei oder noch mehr Variablen abhängen, wodurch man auf Funktionen mit zwei oder mehr Variablen gelangt.

Beispiele:

$V = \pi r^2 \cdot h = f(r,h)$, $\quad E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = f(m,v)$, $\quad R_{ges} = \dfrac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} = f(R_1,R_2,R_3)$

> Unter einer (reellen) **Funktion f mit zwei Variablen** x und y versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar (x,y) *genau eine* (reelle) Zahl z zuordnet. Wenn nicht anders gesagt, wird im Folgenden angenommen, dass x und y für *beliebige* reelle Zahlen stehen.
>
> x und y werden als die **unabhängigen Variablen**, z wird als **Funktionswert** oder **abhängige Variable** bezeichnet. Man schreibt kurz: $z = f(x,y)$.

Graphische Darstellung

Eine Funktion $z = f(x,y)$ kann im dreidimensionalen Raum graphisch veranschaulicht werden. Sind x_0 und y_0 zwei Zahlen und $z_0 = f(x_0,y_0)$ der zugehörige Funktionswert, so können wir die drei Zahlen x_0, y_0 und z_0 als Koordinaten des Punktes $P_0(x_0/y_0/z_0)$ in einem dreidimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystem deuten, wie in Abb. 10.1 gezeigt:

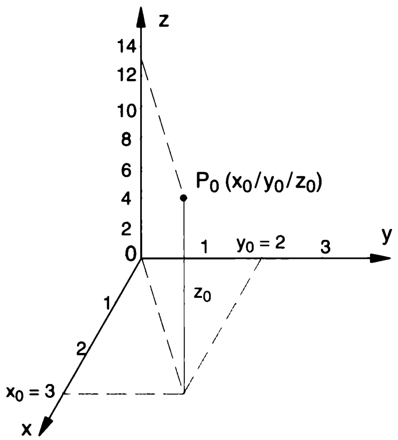


Abb. 10.1

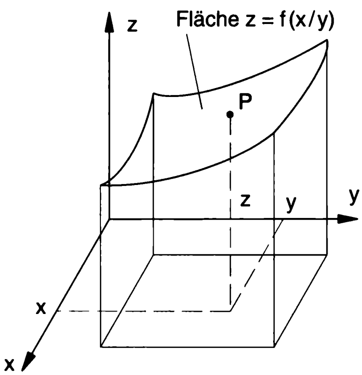


Abb. 10.2

Beispiel: $z = f(x,y) = x^2 + y^2$; $\; x_0 = 3, \; y_0 = 2$: $\; z_0 = 3^2 + 2^2 = 13$

z_0 ist die Höhenkoordinate. Ordnet man auf gleiche Weise jedem Zahlenpaar (x,y) einen Raumpunkt P (x/y/z) zu, so erhält man eine **Fläche** (Abb. 10.2). Einen anschaulichen graphischen Einblick in den Verlauf einer Funktion gewinnt man durch Höhen(schicht)linien. Unter einer **Höhenlinie** versteht man die Projektion einer Kurve, deren Punkte allesamt die *gleiche Höhe* besitzen, in die (x,y)-Ebene.

Beispiel 10.1 : Ebene und ihre Höhenlinien

a) Zeichne den Graphen der Funktion $z = f(x,y) = 3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

b) Zeichne die Höhenlinien $z = \frac{1}{2}$, $z = 1$, $z = \frac{3}{2}$, $z = 2$, $z = \frac{5}{2}$

Lösung

Zu **a)**

Wir formen zuerst die Funktionsgleichung um in $5x + 6y + 10z = 30$.

Aus "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 247, wissen wir, dass eine lineare Gleichung $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot y = d$ eine Ebene bestimmt. Um sie zu zeichnen, kann man die Schnittpunkte der drei Koordinatenachsen mit der vorliegenden Ebene ermitteln:

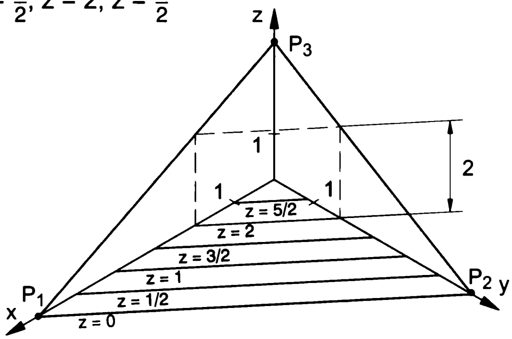


Abb. 10.3

Schnittpunkt P_1 mit der x-Achse: $5 \cdot x + 6 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 30$; daraus: $x = 6$; damit: $P_1(6/0/0)$.
Schnittpunkt P_2 mit der y-Achse: $5 \cdot 0 + 6 \cdot y + 10 \cdot 0 = 30$; daraus: $y = 5$; damit: $P_2(0/5/0)$.
Schnittpunkt P_3 mit der z-Achse: $5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 10 \cdot z = 30$; daraus: $z = 3$; damit: $P_3(0/0/3)$.

Die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 bestimmen die Ebene $z = 3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y$, die nun gezeichnet werden kann. Abb 10.3 zeigt ein Stück der Ebene (z-Werte nichtnegativ).

Zu **b)** Die (x,y)-Ebene ist die "Landkarte", in der die Höhenlinien der vorgegebenen dreidimensionalen Fläche liegen. Die Höhenlinie für die Höhe H erhalten wir aus der Gleichung $z = f(x,y) = 3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y = H$: $y = -\frac{5}{6} \cdot x + \frac{10(3-H)}{6}$. So lautet etwa die Höhenlinie für die Höhe H = 2: $y = -\frac{5}{6} \cdot x + \frac{10}{6}$.

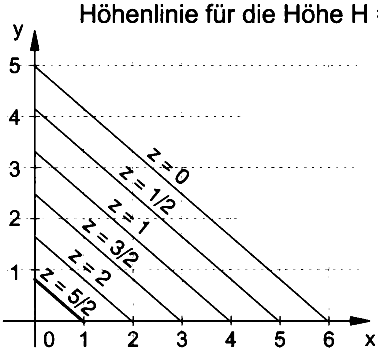


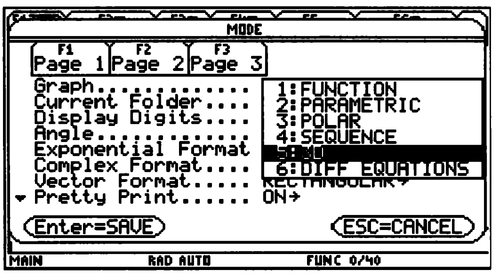
Abb. 10.4

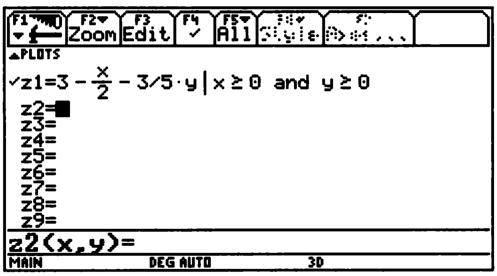
Die Höhenlinien (Abb. 10.4) sind parallele Geraden mit der Steigung $-\frac{5}{6}$; für gleiche Höhenzunahmen $\Delta z = \frac{1}{2}$ nehmen ihre y-Achsenabschnitte d gleichmäßig um $\frac{5}{6}$ ab, was auf eine *ebene* Fläche hinweist.

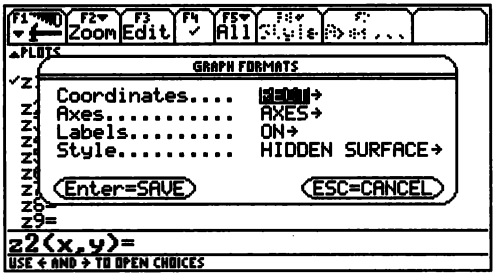
Anmerkung:

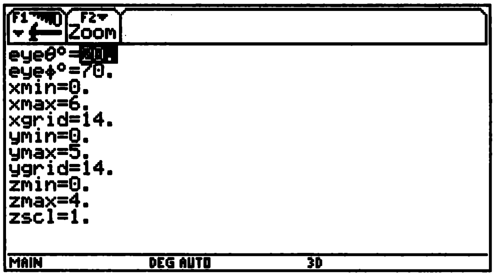
Höhenlinien, auch als Isoquanten bezeichnet, finden u.a. Anwendung als Isothermen oder Isobaren in der Wärmelehre, als Äquipotentiallinien in der Elektrostatik oder als Linien gleichen Gewinns bei Aufgaben der linearen Optimierung.

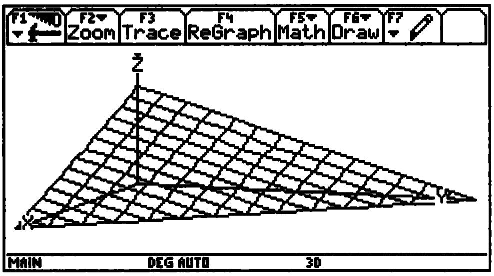
Voyage 200











Zuerst wird durch MODE die Option 3D gewählt, danach ENTER. Graphik-Modus auf 3D setzen. Nach Aufruf des y-Editors wird die Gleichung der Funktion mit dem Definitionsbereich eingegeben. Nach ◆ F (oder auch F1 9) öffnet sich ein Fenster zum Setzen des Graphik-Formates; danach ENTER.

Im Window-Editor ist noch der Zeichenbereich (xmin, ..., zmax) anzugeben. xgrid bzw. ygrid geben die Maschenweite des Drahtgittermodells der Fläche in x- bzw. y-Richtung an. eyeφ° und eyeθ° geben die Blickrichtung auf die Fläche an: eyeφ° ist der von der positiven x-Achse aus gezählte Drehwinkel um die z-Achse, eyeθ° = 0° für einen Blickpunkt auf der z-Achse, dagegen 90°, wenn der Blickpunkt in der (x,y)-Ebene liegt.

Zeichnen der Fläche durch ◆ R.

Aufgaben

10.1 Gib die Höhenlinien für folgende Funktionen für $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ an, wenn $z = 0, 1, 2, 3$ und 4 ist.

a) $z = x + 2y - 1$ **b)** $z = x - y + 5$ **c)** $x + y + z = 5$ **d)** $4x + 3y + 2z = 12$

10.2 Gib die Höhenlinien für folgende Funktionen an, wenn $z = 0, 1, 2, 3$ und 4 ist:

a) $z = x^2 - y + 1$ **b)** $z = -x^2 + 2y$ **c)** $z = x^2 + 2y - 1$ **d)** $z = x^2 + y^2$

10.2 Partielle Ableitungen

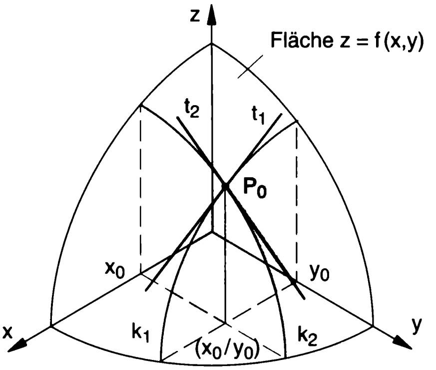


Abb. 10.5

Bei einer Funktion einer Variablen $y = f(x)$ lässt sich die Ableitung der Funktion an einer Stelle x_0 geometrisch als *Steigung der Tangente* veranschaulichen, die im Kurvenpunkt $P(x_0/y_0)$ errichtet wird. In analoger Weise geht man bei einer Funktion von zwei (oder mehr) Variablen vor. Da in einem Flächenpunkt unendlich viele Tangenten existieren können, ist zu klären, von *welchen* Tangenten die Steigungen genommen werden sollen.

P_0 ist ein Punkt auf der Fläche $z = f(x,y)$ an der Stelle (x_0/y_0) in der (x,y)-Ebene (Abb. 10.5). Durch P_0 verläuft die Raumkurve k_1: $z = f(x,y_0)$; das ist jene Kurve auf der Fläche, deren Punkte die *feste* y-Koordinate y_0 haben. Besitzt k_1 im Punkt P_0 eine Tangente t_1, so wird ihre Steigung **partielle Ableitung erster Ordnung nach x** genannt.

Ähnlich betrachtet man die Raumkurve k_2: $z = f(x_0,y)$, also jene Kurve auf der Fläche $z = f(x,y)$, deren Punkte die *feste* x-Koordinate x_0 haben. Besitzt k_2 im Punkt P_0 eine Tangente t_2, so wird ihre Steigung **partielle Ableitung erster Ordnung nach y** genannt. Die beiden partiellen Ableitungen geben somit den Anstieg der Fläche in zwei besondere Richtungen, nämlich in Richtung der x-Achse und in Richtung der y-Achse an.

Der Name "partiell" kommt daher, dass wir nur die Ableitungen in die erwähnten beiden Richtungen gebildet haben. Tatsächlich gibt es unendlich viele Ableitungen (sogenannte Richtungsableitungen).

Schreibweise:

Partielle Ableitung nach x: $f_x(x,y)$, $z_x(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$

Partielle Ableitung nach y: $f_y(x,y)$, $z_y(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$

Häufig schreibt man auch kürzer nur f_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$ usw.

Sprechweise für $\frac{\partial f}{\partial x}$: "df partiell nach dx" usw.

Das Bilden partieller Ableitungen lässt sich auch auf Funktionen mit mehr als zwei Variablen übertragen. Es wird immer nur nach einer Variablen abgeleitet, die anderen Variablen werden konstant gehalten.

Beispiel 10.2 : Partielle Ableitungen

Bilde die partiellen Ableitungen allgemein und an der gegebenen Stelle:

a) $z = 3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y$, $x_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = \frac{3}{2}$

b) $f(x,y) = x^2 + \frac{2x}{y}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$

c) $z = \ln\left(x \cdot \sqrt{y}\right)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

d) $R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

Lösung

Partielles Ableiten verlangt ein konzentriertes Arbeiten verbunden mit einer sicheren Beherrschung der Regeln des gewöhnlichen Ableitens!

Zu a) Beim Ableiten nach x ist die Variable y, beim Ableiten nach y ist x als Konstante zu betrachten!

$z_x = -\frac{1}{2};\ z_y = -\frac{3}{5}$

Die beiden partiellen Ableitungen sind unabhängig von der betrachteten Stelle, da die Fläche eine Ebene ist (Abb. 10.6).

Steigungswinkel:

$\tan\alpha_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = -26{,}6°$ bzw.

$\tan\alpha_2 = -\frac{3}{5} \Rightarrow \alpha_2 = -31{,}0°$

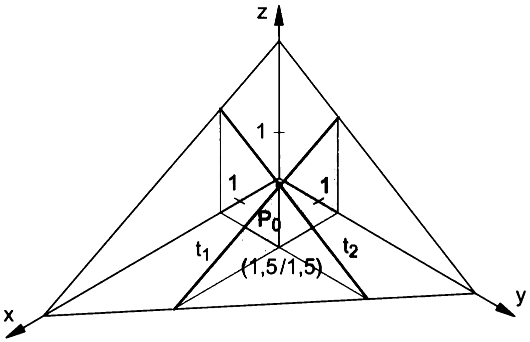


Abb. 10.6 Partielle Ableitungen

Zu b) $f_x = 2x + \frac{2}{y};\ f_x(1,2) = 2\cdot 1 + \frac{2}{2} = 3;\ f_y = -\frac{2x}{y^2};\ f_y(1,2) = -\frac{2\cdot 1}{2^2} = -\frac{1}{2}$

Zu c) $z = \ln\left(x \cdot y^{\frac{1}{2}}\right) = \ln x + \frac{1}{2}\ln y;\ z_x = \frac{1}{x};\ z_x(1,1) = \frac{1}{1} = 1;\ z_y = \frac{1}{2y};\ z_y(1,1) = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}.$

Zu d) $\frac{\partial R_{ges}}{\partial R_1} = \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1R_2 \cdot 1}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$

Wegen der Symmetrie von R_{ges} in R_1 und R_2, braucht man für die partielle Ableitung nach R_2 in $\frac{\partial R_{ges}}{\partial R_1}$ nur R_1 und R_2 zu vertauschen: $\frac{\partial R_{ges}}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$.

Da die Ableitungen stets positiv sind (Quadrate!), nimmt R_{ges} mit wachsendem R_1 oder R_2 ebenfalls stets zu.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Wie bei Funktionen einer Variablen kann man auch bei Funktionen von zwei oder mehr Variablen durch mehrfaches partielles Differenzieren höhere partielle Ableitungen bilden.

Beispiel 10.3 : Partielle Ableitungen zweiter Ordnung

Bilde die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $z = f(x,y) = (2x + 5y)^3$.

Lösung

$z_x = 3\cdot(2x + 5y)^2\cdot 2 = 6\cdot(2x + 5y)^2$

$z_{xx} = (z_x)_x = 6\cdot 2\cdot(2x + 5y)\cdot 2 = 24\cdot(2x + 5y);\ z_{xy} = (z_x)_y = 6\cdot 2\cdot(2x + 5y)\cdot 5 = 60\cdot(2x + 5y)$

$z_y = 3\cdot(2x + 5y)^2\cdot 5 = 15\cdot(2x + 5y)^2$

$z_{yy} = (z_y)_y = 15\cdot 2\cdot(2x + 5y)\cdot 5 = 150\cdot(2x + 5y);\ z_{yx} = (z_y)_x = 15\cdot 2\cdot(2x + 5y)\cdot 2 =$
$= 60\cdot(2x + 5y).$

Anmerkungen:

(1) Die Reihenfolge des Differenzierens erfolgt in der Reihenfolge der Indizes. z_{xy} bedeutet, dass zuerst nach x und danach nach y partiell abzuleiten ist.

(2) z_{xy} und z_{yx} nennt man *gemischte Ableitungen*. Sind diese Ableitungen stetig, so ist – wie gezeigt werden kann – die Reihenfolge des Differenzierens vertauschbar. In diesem in der Regel auftretenden Fall ist also $z_{xy} = z_{yx}$.

(3) Gelegentlich schreibt man die partielle Ableitungen 2. Ordnung auch als partielle Differentialquotienten: $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x}$, $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}$, $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Sprechweise für $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$: "d zwei f partiell nach dx Quadrat" usw.

Bei Funktionen mit einer Variablen ist die erste Ableitung für das Ermitteln von Extremwerten von Bedeutung. Entsprechend sind die partiellen Ableitungen 1. Ordnung für die Bestimmung von Extremwerten bei Funktionen mit mehreren Variablen wichtig. Ohne Beweis wird der folgende Satz angeführt:

> Besitzt die Funktion $z = f(x,y)$ an der Stelle (x_0,y_0) ein **lokales Extremum**, so sind dort die ersten partiellen Ableitungen null.

Abb. 10.7 zeigt, dass partielle Ableitungen gleich null nur notwendig, aber nicht hinreichend für das Vorliegen eines Extremums sind. Auch bei einem Sattelpunkt S sind die beiden ersten partiellen Ableitungen null.

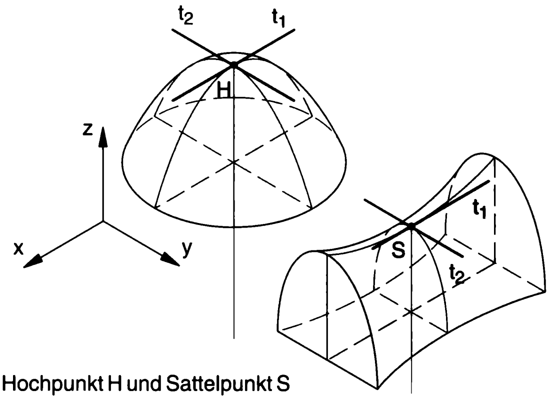


Abb. 10.7 Hochpunkt H und Sattelpunkt S

Beispiel 10.4 : Extremwertaufgabe

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(1/2), B(11/1), C(3/9). Gesucht ist jener Punkt P(x/y), für den die Summe der Abstandsquadrate zu den Eckpunkten des Dreiecks ein Minimum ist.

Lösung

$\overline{AP}^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$; $\overline{BP}^2 = (x-11)^2 + (y-1)^2$

$\overline{CP}^2 = (x-3)^2 + (y-9)^2$

$$z = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 =$$
$$= (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-11)^2 + (y-1)^2 +$$
$$+ (x-3)^2 + (y-9)^2 \rightarrow \text{Min}$$

I: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cdot(x-1) + 2\cdot(x-11) + 2\cdot(x-3) = 0$

II: $\frac{\partial z}{\partial y} = 2\cdot(y-2) + 2\cdot(y-1) + 2\cdot(y-9) = 0$

Daraus: $x = 5$, $y = 4$ oder P(5/4).

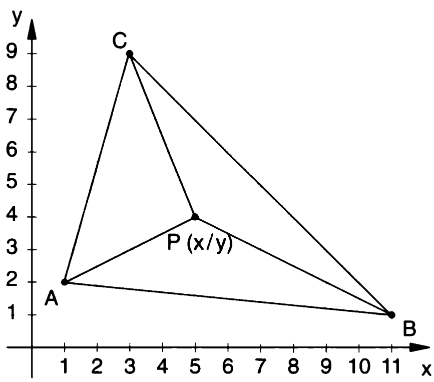


Abb. 10.8

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich, dass hier ein Minimum vorliegt: bewegt sich P von dieser "mittleren" Lage weg, so wird z größer. P ist gerade der *Schwerpunkt* des Dreiecks.

Im Überblick: Partielle Ableitungen

Die beiden **partiellen Ableitungen 1. Ordnung** sind die **Steigungen der Tangenten** an die Fläche $z = f(x,y)$ in Richtung der x-Achse bzw. y-Achse.

Besitzt die Funktion $z = f(x,y)$ an der Stelle (x_0,y_0) ein **lokales Extremum**, so sind dort die **ersten partiellen Ableitungen null**.

Aufgaben

10.3 Berechne die ersten partiellen Ableitungen.

a) $z = 2x + 3y$ **b)** $z = x^2 + 2y$ **c)** $z = x \cdot y$ **d)** $z = x^2 \cdot y$

e) $z = \frac{x+y}{5}$ **f)** $z = \frac{1}{x} + y$ **g)** $z = x + \frac{1}{2y}$ **h)** $z = \frac{x}{3y}$

i) $z = \frac{1}{5x \cdot y}$ **j)** $z = (x - 3y)^2$ **k)** $z = y \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2$ **l)** $z = \frac{x+1}{y}$

m) $z = \frac{xy+1}{y}$ **n)** $z = \frac{xy^2+1}{3y}$ **o)** $z = \frac{x+y}{x-y}$ **p)** $z = \frac{(xy)^2+1}{y+1}$

10.4 Berechne die ersten partiellen Ableitungen.

a) $z = x\sqrt{y}$ **b)** $z = \frac{x}{3 \cdot \sqrt{y}}$ **c)** $z = \sqrt{x+y}$ **d)** $z = \sqrt{2x + \frac{y}{3}}$

e) $z = (x-1)^2 \cdot y^3$ **f)** $z = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \cdot (1 - y)$ **g)** $z = \left(\frac{1}{x} + y\right)^2$ **h)** $z = \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right)^2$

10.5 Berechne die ersten partiellen Ableitungen.

a) $z = x + \ln(2y)$ **b)** $z = \ln\frac{x}{y}$ **c)** $z = \frac{1}{y} + \ln\sqrt{x}$ **d)** $z = \ln(x + 2y)$

e) $z = \ln(x^2 y)$ **f)** $z = \ln(x^2 + y^2)$ **g)** $z = \ln\frac{x}{1-y}$ **h)** $z = \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{1}{y}\right)^2$

10.6 Berechne die ersten partiellen Ableitungen.

a) $z = x \cdot e^y$ **b)** $z = e^{x+y}$ **c)** $z = e^{x \cdot y}$ **d)** $z = x \cdot e^{-y}$

e) $z = \frac{1}{e^x} + y$ **f)** $z = \frac{y}{e^x}$ **g)** $z = \frac{2}{x \cdot e^y}$ **h)** $z = \frac{1+e^x}{1+e^y}$

10.7 Berechne die ersten partiellen Ableitungen.

a) $z = \sin(x+y)$ **b)** $z = \sin(2x - 3y)$ **c)** $z = x \cdot \sin y$ **d)** $z = y \cdot \cos 2x$

e) $z = \sin x \cdot \cos y$ **f)** $z = \sin(2x+1) \cdot \cos(3y)$ **g)** $z = x \cdot \tan y$ **h)** $\tan(x \cdot y)$

10.8 Berechne alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

a) $z = x^2 - 3y$ **b)** $z = x \cdot y$ **c)** $z = (x \cdot y)^2$ **d)** $z = \frac{x}{y}$

e) $z = \frac{x^2}{y}$ **f)** $z = (1 - x) \cdot e^y$ **g)** $z = x \cdot \sin(2y)$ **h)** $z = \ln\frac{1+x}{y}$

10.9 Zerlege die Zahl 12 so in drei Summanden, dass deren Produkt ein Maximum wird.
Hinweis: x, y und 12 – (x + y) sind die drei Summanden.

10.10 a) Ein Quader hat das Volumen 1 m^3. Wie sind seine Kantenlängen zu wählen, damit die Oberfläche minimal wird?

b) Aus einem Draht der Länge 1 m sollen die Kanten eines Quaders gebildet werden. Wie sind die Kantenlängen zu wählen, damit das Volumen maximal wird?

10.11 Ein oben offene Schachtel soll ein Fassungsvermögen von 1 Liter haben. Wie sind seine Maße zu wählen, damit seine Oberfläche und damit der Materialverbrauch minimal ist?

10.12 Bestimme jenen Punkt auf der Ebene x + y + z = 3, der dem Ursprung des Koordinatensystems am nächsten liegt.
Hinweis: Ist P(x/y/z) der gesuchte Punkt, so ist sein Abstand vom Ursprung $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2}$. Mit d ist auch d^2 minimal. Untersuche daher die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2$, ob sie ein Minimum besitzt.

10.13 Ein Blech (Abb. 10.9) der Breite 100,0 cm soll zu einer trapezförmigen Rinne mit möglichst großem Querschnitt geformt werden. Wie müssen die Länge x und der Winkel α gewählt werden?

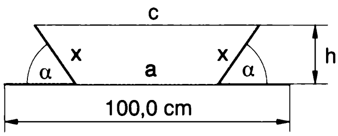


Abb. 10.9

Hinweis:

Nimm x und α als gegeben an und berechne zuerst a, c und h und damit die Fläche A des Trapezes. A ist eine Funktion von x und α. Bilde nun die partiellen Ableitungen nach x und α und setze sie null. Es entsteht ein nichtlineares Gleichungssystem, deren Gleichungen durch sin α und x dividiert werden können (sin α und x sind im Minimum nicht gleich 0). Drücke nun durch die Gleichung cos α aus und setze in die andere Gleichung ein. Dann können x und in weiterer Folge α berechnet werden.

Optimale Stoppstrategie:

Es wird dringend ein Mitarbeiter gesucht. Insgesamt haben sich dafür 20 Kandidaten gemeldet. Nun soll schon während der Vorstellungsgespräche der beste Kandidat für den Mitarbeiterposten gefunden werden. Wann hat es vermutlich keinen Sinn mehr, die Vorstellungsgespräche fortzusetzen und auf einen besseren Kandidaten zu hoffen? Es lässt sich zeigen, dass bei einer größeren Anzahl von Bewerbern gilt: Man spricht mit den ersten der 37% ($\approx$ 1/e) Bewerber. Von diesen Bewerbern wird aber keiner genommen, in unserem Fall sind dies etwa sieben Bewerber. Anschließend wählt man denjenigen Kandidaten als gesuchten Mitarbeiter, der als erster besser ist als jeder Kandidat in der "Vorrunde".
Hier handelt es sich um eine Extremwertaufgabe, bei der jedoch der beste Kandidat natürlich nicht mit Sicherheit gefunden wird. Aber es gibt dafür keine bessere Strategie. Optimierungsaufgaben dieser Art kommen in der gesellschaftlichen Praxis immer wieder vor. Man möchte etwa in den nächsten 14 Tagen Aktien verkaufen. Wie lange soll man abwarten? Solche Extremwertaufgaben können nicht mehr mit der Differentialrechnung gelöst werden. Gleiches gilt auch für Extremwertaufgaben mit linearen Zielfunktionen ("Lineare Optimierung", siehe "Ingenieur-Mathematik 4").

10.3 Ausgleichsrechnung

In der Praxis sind oft die Werte gewisser Konstanten aus Messungen zu bestimmen. Da jede Messung einen Messfehler aufweist, werden sicherheitshalber in der Regel mehrere Messungen durchgeführt. Dazu kommt meist noch, dass die gesuchten Konstanten nicht unmittelbar messbar, sondern nur durch Rechnung aus einer oder mehreren gemessenen Größen zu bestimmen sind. Dies führt schließlich dazu, dass ein *überbestimmtes* Gleichungssystem für die gesuchten Konstanten vorliegt. Aufgabe der **Ausgleichsrechnung** ist es, hier "auszugleichen" und eine am besten zu den Messdaten passende Lösung zu finden.

Beispiel 10.5 : Grundaufgabe der Ausgleichsrechnung

Bei fünfmaliger Messung einer bestimmten Größe erhält man die Werte x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5, die in der Regel nicht gleich sind. Als *Ergebnis* der Messung soll jener Wert x gelten, für den die Summe der quadrierten Abweichungen auf die Werte x_i möglichst klein ist.

Lösung

$$S(x) = (x-x_1)^2 + (x-x_2)^2 + (x-x_3)^2 + (x-x_4)^2 + (x-x_5)^2 = \sum_{i=1}^{5} (x-x_i)^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

$$S'(x) = 2\cdot(x-x_1) + 2\cdot(x-x_2) + 2\cdot(x-x_3) + 2\cdot(x-x_4) + 2\cdot(x-x_5) = 0.$$

Daraus ergibt sich: $x = \frac{1}{5}\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) = \frac{1}{5}\cdot\sum_{i=1}^{5} x_i = \bar{x}$.

An der Stelle $x = \bar{x}$ liegt auch wirklich ein Minimum von $S(x)$ vor. Da der Graph der Funktion $y = S(x)$ eine sich nach oben öffnende Parabel ist, muss die einzige gefundene Extremwertstelle $x = \bar{x}$ die x-Koordinate des Parabelscheitels, eines Tiefpunktes, sein. Der gesuchte Wert ist also der *arithmetische Mittelwert* der Messwerte x_i ! Wie aus "Ingenieur-Mathematik 2", Seite 280 f. bekannt, heißt die durch n – 1 (n Anzahl der Messwerte) dividierte Summe S der quadratischen Abweichungen *Stichprobenvarianz* s^2.

Das hier angewendete Ausgleichsprinzip, das auf das arithmetische Mittel führt, stammt von C.F. GAUSS und heißt **Methode der kleinsten Quadrate**[22]. Im Folgenden soll ein einfaches Beispiel besprochen werden.

Beispiel 10.6 : Ausgleichsgerade

Gegeben sind die 4 Messpunkte $P_1(1/1)$, $P_2(2/3)$, $P_3(4/4)$, $P_4(5/3)$. Es soll nun jene Gerade g: $y = k\cdot x + d$ gesucht werden, die die vorliegenden Messpunkte am besten berücksichtigt.

Lösung

Zur Bestimmung der "besten" Geraden wenden wir wieder die Methode der kleinsten Quadrate an. In Abb. 10.10 sind die *vertikalen* Abstände (nicht Normalabstände!) der Punkte von der Geraden gezeichnet. Wir legen die Gerade g: $y = k\cdot x + d$ so, dass die Summe der Quadrate dieser Abstände ein Minimum ist.

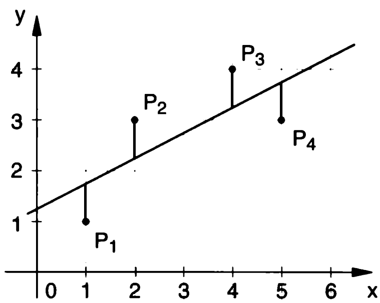


Abb. 10.10

[22] genauer: Methode der kleinsten *Summe* der Quadrate

Es sind auch andere Ausgleichsmethoden denkbar. So könnte man die Summe der vertikalen Abstände oder der Normalabstände minimieren. Jedoch sprechen besonders praktische Gründe dagegen (siehe Aufgabe 10.14).

Die folgende Tabelle fasst die Bildung der quadratischen Abstände (oder Differenzen) zusammen:

i	x_i	y_i	$y = kx_i + d$	$(y_i - y)^2$
1	1	1	$k \cdot 1 + d$	$(1 - k - d)^2$
2	2	3	$k \cdot 2 + d$	$(3 - 2k - d)^2$
3	4	4	$k \cdot 4 + d$	$(4 - 4k - d)^2$
4	5	3	$k \cdot 5 + d$	$(3 - 5k - d)^2$

Wir bezeichnen die von k und d abhängige Summe der Quadrate mit $S(k,d)$:
$S(k,d) = (1 - k - d)^2 + (3 - 2k - d)^2 + (4 - 4k - d)^2 + (3 - 5k - d)^2$.
Um das Minimum dieser Funktion zu bestimmen, bilden wir die partiellen Ableitungen nach d und k und setzen diese null:

$$\text{I: } \frac{\partial S}{\partial d} = 2 \cdot (1 - k - d) \cdot (-1) + 2 \cdot (3 - 2k - d) \cdot (-1) + 2 \cdot (4 - 4k - d) \cdot (-1) + 2 \cdot (3 - 5k - d) \cdot (-1) = 0$$

$$\text{II: } \frac{\partial S}{\partial k} = 2 \cdot (1 - k - d) \cdot (-1) + 2 \cdot (3 - 2k - d) \cdot (-2) + 2 \cdot (4 - 4k - d) \cdot (-4) + 2 \cdot (3 - 5k - d) \cdot (-5) = 0$$

Dieses lineare Gleichungssystem lautet vereinfacht:

I: $12k + 4d = 11$

II: $46k + 12d = 38$

Daraus: $k = 0{,}5$ und $d = 1{,}25$. Damit lautet die Gleichung der gesuchten Geraden:
$y = 0{,}5 \cdot x + 1{,}25$. Sie wird als **Ausgleichsgerade** oder **Regressionsgerade** bezeichnet.

Allgemein lässt sich zeigen:

Liegen die n Messpunkte $P_1(x_1/y_1)$, $P_2(x_2/y_2)$, …, $P_n(x_n/y_n)$ vor, so berechnen sich k und d der **Ausgleichsgeraden** $\mathbf{y = k \cdot x + d}$ aus dem linearen Gleichungssystem:

$$\text{I: } k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + d \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\text{II: } k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + d \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

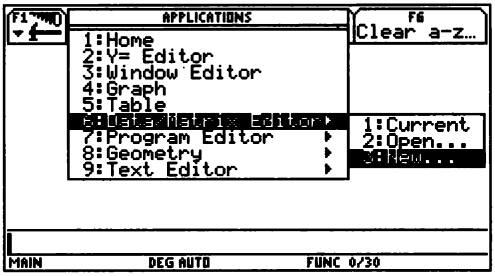
Schema zur praktischen Bestimmung der Koeffizienten des Gleichungssystems:

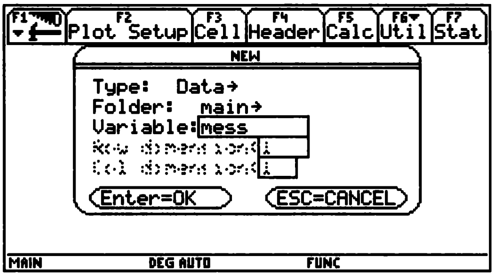
i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	1	1	1
2	2	3	4	6
3	4	4	16	16
4	5	3	25	15
Σ	12	11	46	38

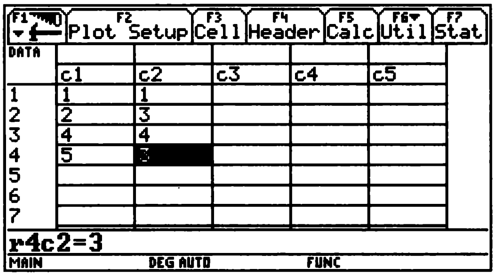
Daraus:

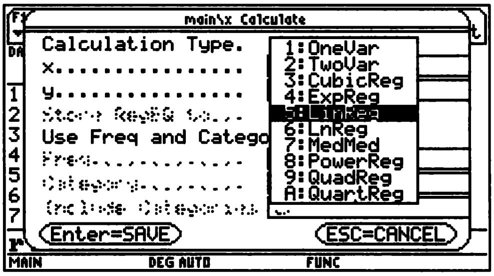
$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 12, \quad \sum_{i=1}^{4} y_i = 11,$$

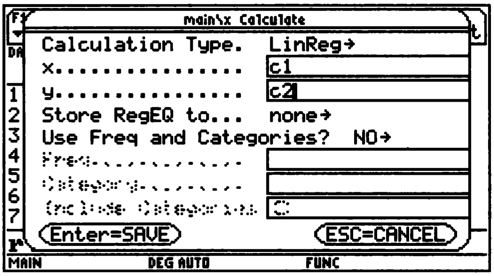
$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 46, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i\, y_i = 38.$$

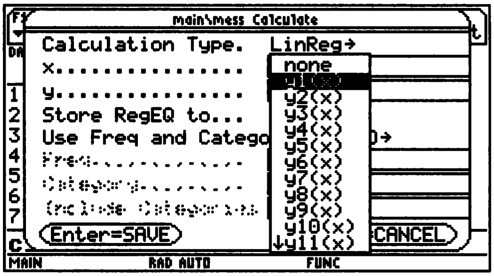






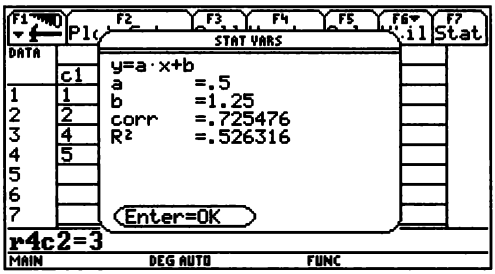


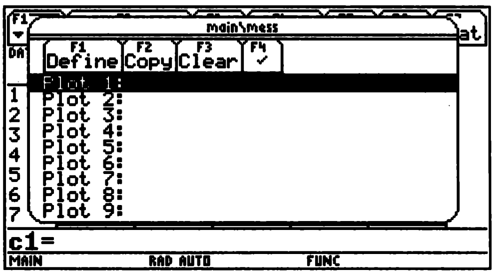


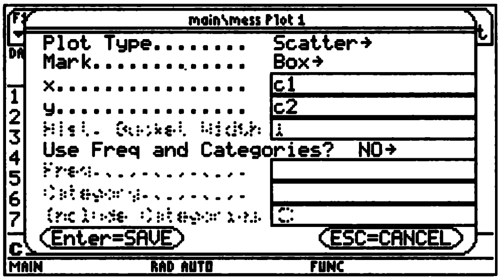


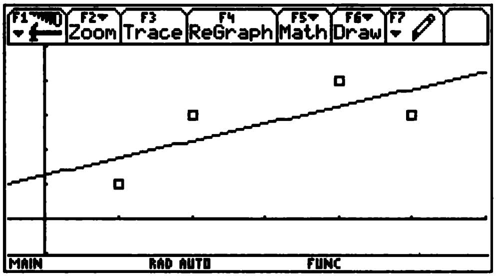
APPS **6** (6: Data/Matrix Editor) **3** (3: New) öffnet eine Dialog-Box, in der ein Variablenname definiert wird, um die Messpunkte aufzunehmen. Nach **ENTER ENTER** erscheint eine Tabelle; in der Spalte c1 werden die x-Werte, in der Spalte c2 die zugehörigen y-Werte eingetragen. Jeder Eintrag wird mit **ENTER** quittiert.

F5 öffnet eine Dialogbox zur Vorbereitung der Berechnungen. Als Calculation Type wählen wir **5** (5:LinReg, Lineare Regression), bei x und y wird c1 bzw. c2 angegeben. Zum Zeichnen der Ausgleichsgeraden und der Messpunkte P_1 bis P_4 wählt man für Store RegEQ to etwa y1(x); **ENTER** öffnet das Fenster STAT VARS mit der Lösung.









Mit **ENTER** gelangt man wieder in den DATA/MATRIX-Editor. Mit **F2** (Plot Setup), danach **F1** (Define), kann man die Zeicheneigenschaften der "Punktewolke" P_1 bis P_4 angeben: Als Plot Type belässt man "Scatter" (Streudiagramm), ein Markierungszeichen für die Punkte kann unter Mark gewählt werden. Ferner wird bei x und y die Spaltenbezeichnung c1 bzw. c2 eingegeben, danach **ENTER ENTER**. Anschließend werden geeignete Einstellungen für das Zeichenfenster vorgenommen und die Graphik wie gewohnt aufgerufen.

Die lineare Funktion $y = k \cdot x + d$ wählt man als Ausgleichsfunktion, wenn man einen linearen Zusammenhang zwischen x und y annimmt. Vermutet man einen anderen Zusammenhang, so wird ein entsprechender Lösungsansatz gewählt. Die folgende Tabelle zeigt eine Auswahl von öfter verwendeten Ausgleichsfunktionen zur "Kurvenanpassung" (Curve fitting):

(1) Lineare Funktion : $y = k \cdot x + d$ oder $y = a \cdot x + b$

(2) Quadratische Funktion: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

(3) Exponentialfunktion: $y = c \cdot a^x = c \cdot e^{b \cdot x}$ mit $b = \ln a$

(4) Potenzfunktion: $y = c \cdot x^n$

(5) Logarithmische Funktion: $y = a + b \cdot \ln x$

In jeder Funktion sind Parameter (z.B. k, d oder a, b und c) enthalten, die so bestimmt werden, dass die Summe der Abstandsquadrate minimal ist. Dazu werden die partiellen Ableitungen nach diesen Parametern gebildet und gleich 0 gesetzt. Dies gibt ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Parameter. Die nichtlinearen Ansätze (3), (4) und (5) lassen sich auf ein lineares Ausgleichsproblem transformieren, das praktisch die gleichen Konstanten ergibt wie das ursprüngliche Ausgleichsproblem.

Beispiel 10.7 : Nichtlineare Ausgleichung

Die Abkühlung einer Probe bei einer Umgebungstemperatur von 20 °C beginnt zur Zeit $t = 0$ min. Danach misst man folgende Temperaturen zu den angegebenen Zeitpunkten:

t in min	10	20	40	60	80
ϑ in °C	141	120	89	65	50

Für die zeitliche Temperaturabnahme der Probe wird das NEWTON'sche Abkühlungsgesetz $\vartheta(t) = 20\ °C + (\vartheta_0 - 20\ °C) \cdot e^{-t/\tau}$ angenommen. Ermittle durch eine Ausgleichsrechnung die Anfangstemperatur ϑ_0 und die "Zeitkonstante" τ.

Lösung

Stellt man die Messpunkte (t/ϑ) in einem ordinatenlogarithmischen Papier dar, so wird die getroffene Annahme einer exponentiellen Temperaturabnahme bestätigt.

Setzt man (unter Weglassung der Einheiten) $y = \vartheta - 20$ und $c = \vartheta_0 - 20$, so erhält man als Lösungsansatz für die Ausgleichsfunktion $y = c \cdot e^{-t/\tau}$. Durch Logarithmieren erhält man: $\ln y = \ln c - \frac{t}{\tau}$. Setzt man $v = \ln y$, so erhält man $v = -\frac{t}{\tau} + \ln c$, die Gleichung einer Geraden mit der Steigung $k = -\frac{t}{\tau}$ und dem Ordinatenabschnitt $d = \ln c$.

i	t_i	y_i	$v_i = \ln y_i$	t_i^2	$t_i \cdot v_i$
1	10	121	4,796	100	47,96
2	20	100	4,605	400	92,10
3	40	69	4,234	1600	169,36
4	60	45	3,807	3600	228,40
5	80	30	3,401	6400	272,10
Σ	210		20,843	12100	809,92

Somit ist das folgende Gleichungssystem zu lösen:

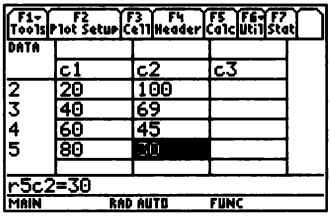
I: $210 \cdot k + 5 \cdot d = 20{,}843$

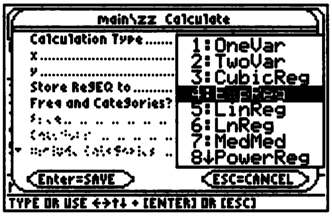
II: $12100 \cdot k + 210 \cdot d = 809{,}92$.

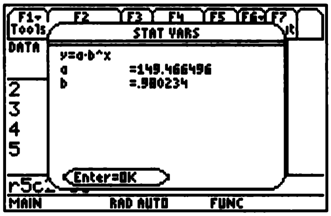
Daraus: $k = -0{,}020$; $d = 5{,}007$.

Wegen $k = -\frac{t}{\tau}$ ist die Zeitkonstante $\tau = 50{,}0$ min. Aus $\ln c = 5{,}007$ folgt $c = e^{5{,}007} = 149{,}5$.
Schließlich folgt aus $c = \vartheta_0 - 20 = 149{,}5$ die Anfangstemperatur $\vartheta_0 = 169{,}5$ °C.

TI 89







Die Ausgabe der Ausgleichsfunktion erfolgt in der Form $y = a \cdot b^x$.
Wegen $b = e^{\ln b}$ folgt $y = a \cdot e^{x \cdot \ln b} = 149{,}5 \cdot e^{x \cdot \ln 0{,}9802} = 149{,}5 \cdot e^{-0{,}02 \cdot x} = 149{,}5 \cdot e^{-x/50}$.

Im Überblick: Ausgleichsrechnung

Nimmt man einen linearen Zusammenhang zwischen zwei Größen x und y an, so bestimmt man die **Ausgleichsgerade** durch die vorgegebenen n Messpunkte. Daneben werden auch weitere Ausgleichsfunktionen verwendet.

Prinzip der kleinsten Quadrate: vielfach verwendetes Ausgleichsprinzip, das auf das arithmetische Mittel führt

Aufgaben

10.14 Bei der mehrfachen Messung einer Größe werden die 3 Werte x_1, x_2 und x_3 ermittelt. Nimm nun jenen Wert x als "wahren" Wert der Größe an, für den die Summe der *Abweichungen* $S(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + |x - x_3|$ minimal ist ("Methode der kleinsten Absolutsumme" als Ausgleichsprinzip). Einfachheitshalber sollen die drei gemessenen Werte lauten: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$.

Hinweis: Zeichne den Funktionsgraphen von $y = S(x)$ und entnimm die gesuchte Lösung der Zeichnung.

10.15 Zeichne die Punkte und ermittle die Ausgleichsgerade.

a) $P_1(1/2)$, $P_2(2/2)$, $P_3(4/4)$, $P_4(6/4)$ **b)** $P_1(1/1)$, $P_2(2/2)$, $P_3(4/3)$, $P_4(6/5)$

c) $P_1(0/1)$, $P_2(2/2)$, $P_3(4/3)$, $P_4(5/5)$, $P_5(8/5)$

d) $P_1(0/1)$, $P_2(2/2)$, $P_3(4/3)$, $P_4(5/4)$, $P_5(8/5)$

10.16 Ein Unternehmen stellt Spezialfahrräder her. Die Gesamtkosten K(x) für eine tägliche Produktionsmenge x betragen:

x in Stück	10	20	30	40	50
K(x) in 1000 €	11	20	28	38	43

a) Stelle die Wertepaare graphisch als Punkte dar und ermittle die Gleichung einer linearen Kostenfunktion.

b) Welche Kosten können bei einer Produktionsmenge von 35 Stück erwartet werden?

c) Wie würde eine quadratische und kubische Kostenfunktion aussehen (nicht bei Handrechnung) ?

10.17 Für Abhängigkeit der Nachfrage x nach einem bestimmten Gebrauchsgut in Abhängigkeit vom Preis p je 100 Einheiten liegen folgende Wertepaare vor:

p in €	150	140	120	90
x in 100 Stück	30	41	74	97

Die Wertepaare legen einen linearen Zusammenhang $x = f(p)$ zwischen der verkauften Menge x in Abhängigkeit vom Preis p pro 100 Stück an nahe. Wie lautet die Ausgleichsgerade? Welcher Preis würde zu einem Verkauf von 8000 Einheiten führen?

10.18 Bei einem Motor wurde die Leistung in kW in Abhängigkeit von der Drehzahl pro Minute gemessen. Es ergaben sich folgende Wertepaare:

Drehzahl pro Minute	1400	2000	2600	3200	3600
Leistung in kW	17,6	30,8	39,2	46,5	50,1

a) Wie lautet die Ausgleichsgerade?

b) Welche Leistung ist bei einer Drehzahl von 3000 Umdrehungen pro Minute zu erwarten?

c) Bei welcher Drehzahl ist eine Leistung von 34 kW zu erwarten?

10.19 Für folgende Wertepaare kann ein exponentieller Zusammenhang $y = c \cdot e^{b \cdot x}$ angenommen werden. Wie lautet die Exponentialfunktion, die am besten die folgenden Wertepaare annähert?

a)

x	1	2	3	4	5
y	33	24	17	11	7

b)

x	5	10	20	50
y	3,1	4,2	6,0	32,1

10.20 Wird ein Kondensator entladen, so gilt für seine Spannung $u = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$, wobei t die Zeit nach Beginn der Entladung, U_0 die Anfangsspannung und $\tau = R \cdot C$ die Zeitkonstante ist. Zur Bestimmung der Zeitkonstante werden zu den angegebenen Zeiten folgende Kondensatorspannungen u gemessen:

t in s	0.09	0,21	0,36	0,65	0,90	1,15
u in V	4,27	3,21	2,58	1,32	0,85	0,54

Ermittle durch eine Ausgleichsrechnung die Zeitkonstante τ.

10.21 Die Abkühlung eines Körpers beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ min. Danach wird zu den angegebenen Zeiten die Temperatur $\vartheta(t)$ wie angegeben gemessen. Berechne die Anfangstemperatur ϑ_0 und die Zeitkonstante τ, wenn gilt $\vartheta(t) = \vartheta_K + (\vartheta_0 - \vartheta_K) \cdot e^{-t/\tau}$, wobei ϑ_K die Kühlmitteltemperatur ist.

a)

t in min	10	20	30	50	70
ϑ in °C	166	122	92	59	44

, $\vartheta_K = 32$ °C

b)

t in min	5	10	20	30
ϑ in °C	84	68	45	33

, $\vartheta_K = 12$ °C

10.22 Für die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands R eines Metalles gilt in guter Näherung $R = R_{20} + \alpha \cdot R_{20} \cdot \Delta\vartheta$, wobei R_{20} der Widerstand bei 20 °C, α der Temperaturkoeffizient und $\Delta\vartheta = \vartheta - 20$ °C die Temperaturdifferenz auf 20 °C ist. Folgende Messung liegt vor:

ϑ in °C	20	30	40	50	60	70
R in Ω	30,4	32,2	32,6	34,4	35,1	36,2

Ermittle die Ausgleichsgerade und daraus den Temperaturkoeffizienten α.

10.23 Eine freie gedämpfte mechanische Schwingung erfolgt unter gewissen Voraussetzungen nach dem Gesetz $y(t) = \hat{y}_0\, e^{-\delta \cdot t} \cos(\omega t)$. Eine Messung der Amplituden aufeinanderfolgender Schwingungen ergab:

$\hat{y}_1 = \hat{y}_0\, e^{-\delta \cdot T} = 40$ mm, $\hat{y}_2 = \hat{y}_0\, e^{-\delta \cdot 2T} = 22$ mm, $\hat{y}_3 = \hat{y}_0\, e^{-\delta \cdot 3T} = 11$ mm, $\hat{y}_4 = \hat{y}_0\, e^{-\delta \cdot 4T} = 6$ mm und $\hat{y}_5 = \hat{y}_0\, e^{-\delta \cdot 5T} = 3$ mm. Die Schwingungsdauer T beträgt 0,9 s. Bestimme durch eine Ausgleichsrechnung die Abklingkonstante δ.

10.24 Gegeben sind die Punkte $P_1(1/3)$, $P_2(3/4)$, $P_3(4/7)$, $P_4(6/10)$.

a) Ermittle die Ausgleichsgerade.

b) Führe eine Regression mit $y = c \cdot e^{b \cdot x}$ als Ausgleichsfunktion durch.

c) Führe mit einer geeigneten Software eine Regression mit $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ("Ausgleichsparabel") durch.

10.4 Totales Differential und lineare Fehlerabschätzung

In Abb. 10.11 sind im Punkt $P_0(x_0/y_0/z_0)$, $z_0 = f(x_0,y_0)$, die Tangenten t_1 und t_2 gezeichnet, deren Steigungen die partiellen Ableitungen f_x und f_y an der Stelle (x_0/y_0) sind. Die beiden Tangenten t_1 und t_2 spannen die so genannte *Tangentialebene* τ auf, in der die Tangenten aller Flächenkurven durch P_0 liegen. Genauso wie bei einer Funktion mit einer Variablen der Funktionsgraph in einem Kurvenpunkt durch die Tangente genähert wird, wird nun die Fläche durch ihre Tangentialebene im Punkt P_0 genähert.

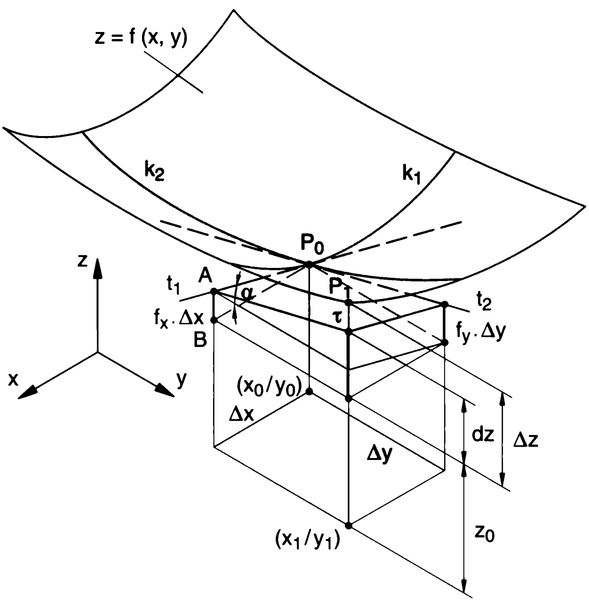


Abb. 10.11 Totales Differential

Wir gehen nun von der Stelle (x_0/y_0) zur Stelle (x_1/y_1) in der (x,y)-Ebene über und setzen:

$x_1 = x_0 + \Delta x$ und $y_1 = y_0 + \Delta y$. Wie groß ist die Änderung des Funktionswertes $z_0 = f(x_0,y_0)$, wenn man die Fläche durch ihre Tangentialebene im Punkt P_0 ersetzt? Wir bezeichnen diese Änderung mit dz gegenüber der wahren Änderung Δz (= Höhendifferenz des Punktes P_0 zum Punkt P_1).

Geht man *nur* in x-Richtung um Δx weiter (Abb. 10.11), so ist die Höhenänderung auf der Tangentialebene gleich der z-Änderung auf der Tangente t_1. Aus dem rechtwinkligen Dreieck P_0BA entnimmt man: $\tan\alpha = \frac{\overline{AB}}{\Delta x}$. Wegen $\tan\alpha = f_x(x_0,y_0)$ folgt $\overline{AB} = f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x$. Entsprechend ist die Höhenänderung auf der Tangentialebene gleich $f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$, wenn man *nur* in y-Richtung um Δy weitergeht.

Aus Abb. 10.11 entnimmt man weiters, dass für die z-Änderung dz für ein Fortschreiten *sowohl* in x-Richtung um Δx *als auch* in y-Richtung um Δy gilt: $dz = f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$. Üblicherweise schreibt man hier statt der Differenzen "Differentiale", setzt also $dx = \Delta x$ und $dy = \Delta y$. dx und dy sind also nur andere Schreibweisen für Δx und Δy. Man definiert nun:

Totales oder vollständiges Differential

Unter dem **totalen** oder **vollständigen Differential** einer Funktion $z = f(x,y)$ an der Stelle (x_0/y_0) versteht man den Ausdruck $dz = f_x(x_0,y_0)\cdot dx + f_y(x_0,y_0)\cdot dy$.

Geometrische Deutung des totalen Differentials:

Das totale Differential $dz = f_x(x_0,y_0)\cdot dx + f_y(x_0,y_0)\cdot dy$ einer Funktion mit zwei Variablen gibt die Höhenänderung auf der **Tangentialebene** an der Stelle (x_0/y_0) an, wenn man zur Stelle $(x_0 + dx/y_0 + dy)$ fortschreitet. Das totale Differential gibt daher **näherungsweise** an, wie sich der Funktionswert z bei kleinen Änderungen der unabhängigen Variablen um $dx = \Delta x$ bzw. $dy = \Delta y$ ändert: $\Delta z = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) \approx dz$.

Anmerkung: Man sagt, eine Funktion mit zwei Variablen ist an einer Stelle (x_0/y_0) differenzierbar, wenn es dort eine *Tangentialebene* gibt oder, wie man auch sagt, wenn die Funktion dort *linearisierbar* ist.

Wenn bei einer Funktion $z = f(x,y)$ die beiden partiellen Ableitungen existieren, muss es noch nicht zwingend eine Tangentialebene geben, die Funktion muss also noch nicht "total" differenzierbar sein.

Beispiel 10.8 : Totales Differential

a) Berechne Δz und dz für $z = f(x,y) = x^2 \cdot (1 + \sqrt{y})$ bei einer Änderung von $x_0 = 2{,}00$ auf $x_1 = 2{,}02$ und $y_0 = 0{,}55$ auf $y_1 = 0{,}52$.

b) Für 1 mol eines idealen Gases gilt der Zusammenhang $p = \frac{R \cdot T}{V}$, wobei p der Gasdruck, T seine absolute Temperatur, V das Gasvolumen und R eine Konstante ("universelle Gaskonstante") ist. Gib das totale Differential dp an.

Lösung

Zu **a)** Exakte Änderung $\Delta z = x_1^2 \cdot (1 + \sqrt{y_1}) - x_0^2 \cdot (1 + \sqrt{y_0}) =$
$= 2{,}02^2 \cdot (1 + \sqrt{0{,}52}) - 2{,}00^2 \cdot (1 + \sqrt{0{,}55}) = 0{,}056.$

Näherungsweise (Änderung auf der Tangentialebene):

$f_x = 2x \cdot (1 + \sqrt{y})$; $f_y = x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$;

$dx = \Delta x = x_1 - x_0 = 0{,}02$; $dy = \Delta y = y_1 - y_0 = -0{,}03$

$dz = f_x(x_0,y_0) \cdot dx + f_y(x_0,y_0) \cdot dy = 2x_0 \cdot (1 + \sqrt{y_0}) \cdot dx + x_0^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \cdot dy = 0{,}058.$

Die exakte Berechnung von Δz ist hier einfacher; dies ist aber im Allgemeinen nicht mehr so, wenn mehr als zwei Variable auftreten. Die Rechnung weist jedoch grundsätzlich auf eine wichtige Anwendung des totalen Differentials in der Fehlerrechnung hin, wo dx und dy die Bedeutung von Messfehlern haben.

Zu **b)** $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V}$, $\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{R \cdot T}{V^2}$; $dp = \frac{R}{V} \cdot dT - \frac{R \cdot T}{V^2} \cdot dV.$

Diese Gleichung gibt näherungsweise die Änderung des Gasdruckes p bei kleinen Änderungen der Gastemperatur ΔT und des Gasvolumens ΔV an.

Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz

Mit Hilfe des totalen Differentials lässt sich das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz in seiner *allgemeinen* Form angeben. Wir nehmen an, dass gemessene Werte x_0, y_0 mit den Messunsicherheiten $|\Delta x|$ und $|\Delta y|$ vorliegen. Für ein Rechenergebnis $z = f(x,y)$ soll der maximale Fehler Δz_{max} bestimmt werden. Dann gilt die Abschätzung:

$|dz| = |f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy| \leqslant |f_x(x_0, y_0) \cdot dx| + |f_y(x_0, y_0) \cdot dy|$

Da die Messfehler dx und dy betragsmäßig höchstens gleich $|\Delta x|$ bzw. $|\Delta y|$ sind, gilt letztlich:

Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz

Für den linear angenäherten **Maximalfehler** Δz_{max} des Rechenergebnisses $z_0 = f(x_0,y_0)$ gilt:

$\Delta z_{max} = |f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x| + |f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y|$,

wenn $|\Delta x|$ und $|\Delta y|$ die *Messunsicherheiten* der gemessenen Werte x_0 bzw. y_0 sind.

Beispiel 10.9 : Maximalfehler

a) Die Widerstände $R_1 = R_{10} \pm |\Delta R_1| = (100 \pm 1)\,\Omega$ und $R_2 = R_{20} \pm |\Delta R_2| = (500 \pm 3)\,\Omega$ sind parallel geschaltet. Berechne den Ersatzwiderstand R unter Angabe des Maximalfehlers.

b) Ein Kreissegment (Radius r, Mittenwinkel α) hat den Flächeninhalt $A = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha)$ mit α im Bogenmaß. Berechne den Flächeninhalt unter Angabe seines Maximalfehlers, wenn $r = (24{,}2 \pm 0{,}1)$ cm und $\alpha = 38° \pm 1°$.

Lösung

Zu **a)** Für den Ersatzwiderstand R gilt: $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

Ist R_0 der mit den Näherungswerten $R_{10} = 100\,\Omega$ und $R_{20} = 500\,\Omega$ berechnete Ersatzwiderstand, so gilt: $R_0 = \frac{R_{10} \cdot R_{20}}{R_{10} + R_{20}} = \frac{100 \cdot 500}{100 + 500}\,\Omega = 83{,}333\ldots\,\Omega$.

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2};\ \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Für $R_{10} = 100\,\Omega$ und $R_{20} = 500\,\Omega$ ergeben die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial R}{\partial R_1}(R_{10}, R_{20}) = \frac{500^2}{(100 + 500)^2} = 0{,}694\ldots;\ \frac{\partial R}{\partial R_2}(R_{10}, R_{20}) = \frac{100^2}{(100 + 500)^2} = 0{,}0277\ldots.$$

$|\Delta R_1| = 1\,\Omega$; $|\Delta R_2| = 3\,\Omega$.

$$\Delta R_{max} = \left|\frac{\partial R}{\partial R_1}(R_{10}, R_{20}) \cdot \Delta R_1\right| + \left|\frac{\partial R}{\partial R_2}(R_{10}, R_{20}) \cdot \Delta R_2\right| = 0{,}777\ldots\,\Omega \approx 0{,}8\,\Omega.$$

Somit: $R = (83{,}3 \pm 0{,}8)\,\Omega$.

Zu **b)** $A_0 = \frac{r_0^2}{2} \cdot (\alpha_0 - \sin\alpha_0) = \frac{(24{,}2\text{ cm})^2}{2} \cdot \left(38° \cdot \frac{\pi}{180°} - \sin 38°\right) = 13{,}927\ldots\text{ cm}^2$;

$\frac{\partial A}{\partial r} = r \cdot (\alpha - \sin\alpha)$; $\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{r^2}{2} \cdot (1 - \cos\alpha)$.

Für $r_0 = 24{,}2$ cm und $\alpha_0 = 38°$ ergeben die partiellen Ableitungen:

$\frac{\partial A}{\partial r}(r_0, \alpha_0) = 1{,}151\ldots$ cm; $\frac{\partial A}{\partial \alpha}(r_0, \alpha_0) = 62{,}074\ldots\text{ cm}^2$.

$|\Delta r| = 0{,}1$ cm; $|\Delta\alpha| = 1° \cdot \frac{\pi}{180°} = 0{,}0174\ldots$ rad.

$$\Delta A_{max} = \left|\frac{\partial A}{\partial r}(r_0, \alpha_0) \cdot \Delta r\right| + \left|\frac{\partial A}{\partial \alpha}(r_0, \alpha_0) \cdot \Delta\alpha\right| = 1{,}198\ldots\text{ cm}^2 \approx 1{,}2\text{ cm}^2.$$

Damit: $A = A_0 \pm \Delta A_{max} = (13{,}9 \pm 1{,}2)\text{ cm}^2$.

Aufgaben

10.25 Bestimme über das totale Differential exakt und näherungsweise die Änderung des Funktionswertes beim Übergang von der Stelle (x_0/y_0) auf (x_1/y_1):

a) $z = 2x + 3y - 1$; $x_0 = 2{,}10$; $y_0 = 0{,}40$ auf $x_1 = 2{,}05$; $y_1 = 0{,}50$

b) $z = \frac{x^2}{y}$, $x_0 = 1{,}20$; $y_0 = 3{,}50$ auf $x_1 = 1{,}22$; $y_1 = 3{,}54$

c) $z = \ln\sqrt{x \cdot (1 + y)}$; $x_0 = 3{,}0$; $y_0 = 2{,}00$ auf $x_1 = 3{,}2$; $y_1 = 1{,}90$

d) $z = (x^2 + y^2) \cdot e^{-y}$; $x_0 = 2{,}00$; $y_0 = 1{,}00$ auf $x_1 = 2{,}10$; $y_1 = 0{,}80$

10.26 Ein Hohlzylinder besitzt die Radien $r = 6{,}00$ cm und $R = 8{,}00$ cm sowie die Höhe $h = 18{,}00$ cm. Wie ändert sich sein Volumen, wenn man den Innenradius um 0,20 cm vergrößert, den Außenradius um 0,10 mm verkleinert und die Höhe um 0,30 cm vergrößert? Rechne exakt und mit Hilfe des totalen Differentials.

10.27 Ein Hohlzylinder besitzt die Radien $r = 6{,}00$ cm und $R = 8{,}00$ cm. Berechne mit Hilfe des totalen Differentials, um wie viel man bei einer Vergrößerung von r um 0,10 cm den Außenradius R vergrößern muss, damit das Volumen gleich bleibt.

10.28 Berechne die prozentuelle Änderung der Schwingungsdauer $T = 2\,\pi \cdot \sqrt{L\ C}$ einer ungedämpften elektromagnetischen Schwingung, wenn man die Induktivität L um 4% vergrößert und die Kapazität C um 2% verkleinert.

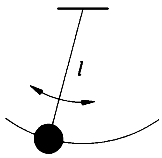
10.29 Für das Volumen eines Kugelabschnittes gilt $V = \frac{\pi\, h^2}{3} \cdot (3r - h)$. Berechne das Volumen V mit Angabe des maximalen Fehlers, wenn $h = (54{,}0 \pm 0{,}5)$ mm und $r = (48{,}0 \pm 0{,}5)$ mm ist.

10.30 In einem rechtwinkligen Dreieck wurden gemessen: Hypotenuse $c = (240{,}0 \pm 0{,}2)$ m, Kathete $a = (172{,}4 \pm 0{,}2)$ m. Berechne den maximalen Fehler

a) der anderen Kathete, **b)** des von a und c eingeschlossenen Winkels.

10.31 Für die Oberfläche O eines Drehzylinders mit dem Radius r und der Höhe h gilt: $O = 2\,\pi\, r \cdot (r + h)$. Es wurden gemessen: $r = (14{,}2 \pm 0{,}2)$ cm, $h = (22{,}8 \pm 0{,}1)$ cm. Berechne die Oberfläche O mit Angabe des maximalen Fehlers.

10.32 Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels der Länge l ist $T = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Welchen prozentuellen Fehler hat man für T höchstens zu erwarten, wenn l und g auf höchstens 0,5% genau gemessen wurden?



10.33 Von einem Dreieck kennt man die Seiten $a = 48{,}3$ mm und $b = 56{,}2$ mm sowie den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel $\gamma = 72°$. Die Längenmessungen erfolgen mit einer Genauigkeit $|\Delta a| = |\Delta b| = 0{,}1$ mm und die Winkelmessung mit einer Genauigkeit $|\Delta\gamma| = 0{,}5°$. Berechne den Flächeninhalt A dieses Dreiecks unter Angabe des maximalen Fehlers.

10.34 Zur Bestimmung der Brennweite einer dünnen Sammellinse werden die Gegenstandsweite $g = 392$ mm und die Bildweite $b = 241$ mm mit den Messunsicherheiten $|\Delta g| = |\Delta b| = 1$ mm gemessen. Wie groß ist die Brennweite f und ihr Maximalfehler, wenn gilt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$.

10.35 Für die Brechzahl n einer Glassorte gilt $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Berechne den relativen Maximalfehler der Brechzahl, wenn der Einfallswinkel $\alpha = 35° \pm 1°$ und der Brechungswinkel $\beta = 23° \pm 1°$ gemessen wurde.

10.36 Die Brechzahl n einer Flüssigkeit kann mit einem so genannten Refraktometer aus der Gleichung $n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}$ bestimmt werden. Dabei ist N die Brechzahl eines Versuchskörpers und α der Austrittswinkel eines Lichtstrahls. Berechne n unter Angabe des Maximalfehlers, wenn $N = 1{,}6 \cdot (1 \pm 0{,}5\%)$ und $\alpha = 34° \pm 1°$.

11 Matrizen

11.1 Definitionen

In Technik und Wirtschaft werden für die verschiedensten Zwecke Größen in Form von Tabellen zusammengestellt. Tabellen dieser Art treten bei statischen Berechnungen eines Fachwerks, in der Elastizitätstheorie, bei der Behandlung von elektrischen Netzwerken, in der Kostenrechnung und in vielen weiteren Gebieten auf. Wichtig ist, dass sich diese Tabellen mathematisch weiterverarbeiten lassen. Dies lässt in der Folge eine gute Bearbeitung mit Hilfe von Rechnern zu. Sehen wir von der inhaltlichen Bedeutung solcher Tabellen ab, so bleibt ein rechteckiges Schema, meist von Zahlen, das **Matrix** genannt wird.

Matrizen wurden schon bei der Darstellung von Gleichungssystemen in "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 255, eingeführt.

Matrix vom Typ (m,n)

Ein rechteckiges (Zahlen-)Schema aus m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1j} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2j} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \text{1. Spalte} \qquad\qquad \text{j-te Spalte} \quad \text{n-te Spalte} \end{array} \begin{array}{l} \text{1. Zeile} \\ \\ \\ \text{i-te Zeile} \\ \\ \text{m-te Zeile} \end{array}$$

heißt **Matrix vom Typ (m,n)** oder **(m × n)-Matrix** (gelesen: m kreuz n Matrix).

Eine Matrix, mit gleicher Anzahl m von Zeilen und Spalten heißt **quadratische** Matrix der **Ordnung m**.

Die Zahlen a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn} heißen **Elemente** der Matrix. Der erste Index gibt die Nummer der Zeile, der zweite Index die Nummer der Spalte an, in der sich das Element befindet (Zeilenindex zuerst).

Eine einspaltige Matrix wird auch **Spaltenvektor**, eine einzeilige Matrix **Zeilenvektor** genannt. Eine Matrix mit nur einer Zeile und einer Spalte wird **Skalar** (= Zahl) genannt.

Eine Matrix, deren sämtliche Elemente null sind, heißt **Nullmatrix**, in Zeichen O. Eine Nullmatrix spielt beim Rechnen mit Matrizen die gleiche Rolle wie die Zahl 0 beim Rechnen mit gewöhnlichen Zahlen.

Matrizen werden mit Großbuchstaben A, B, ... oder in der Form (a_{ij}), (b_{ij}) bezeichnet. Die Gesamtheit der Elemente wird in *runde* Klammern gesetzt.

Beispiele:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Matrix vom Typ (2,3), $a_{11} = 2$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 5$, ..., $a_{23} = 2$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ quadratische Matrix der Ordnung 3

$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Matrix vom Typ (3,1), Spaltenvektor

$D = (2 \;\; -1 \;\; 3 \;\; 1)$ Matrix vom Typ (1,4), Zeilenvektor

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ Matrix vom Typ (4,3)

Gleichheit zweier Matrizen

Zwei Matrizen A und B heißen genau dann **gleich**, wenn sie vom gleichen Typ sind und alle einander *entsprechenden* Elemente übereinstimmen.

Beispiel 11.1 : Gleichheit zweier Matrizen

a) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; was folgt aus A = B ?

b) Ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$?

Lösung

Zu **a)** $a_{11} = 2$; $a_{12} = -1$; $a_{21} = 0$; $a_{22} = 3$.

Zu **b)** Nein, da nicht *alle* einander entsprechenden Elemente übereinstimmen.

Eine *quadratische* Matrix, deren sämtliche Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen (Diagonale von links oben nach rechts unten) gleich 0 sind, heißt **Diagonalmatrix**.

Eine Diagonalmatrix, deren sämtliche Hauptdiagonalelemente gleich 1 sind, heißt **Einheitsmatrix.** Sie wird mit dem Buchstaben E bezeichnet und spielt in der Matrizenrechnung die gleiche Rolle wie die Zahl 1 beim Rechnen mit gewöhnlichen Zahlen.

Beispiele für Diagonalmatrizen: $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Beispiele für Einheitsmatrizen: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vertauscht man in einer Matrix A alle Zeilen mit den ihnen entsprechenden Spalten, so erhält man die zu A **transponierte Matrix** A^T .

Gilt bei einer quadratischen Matrix $A = A^T$, so heißt A eine **symmetrische** Matrix.

Beispiel 11.2 : Transponieren einer Matrix

Transponieren die Matrix:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **d)** $D = (2 \;\; -1 \;\; 3 \;\; 1)$

Lösung

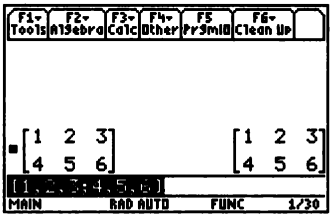
Zu **a)** $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

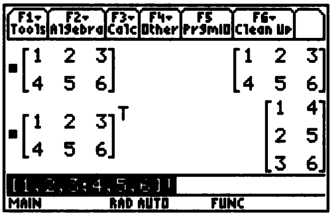
Zu **b)** $B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$; d.h. B ist symmetrisch; ihre Elemente liegen spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen.

Zu **c)** $C^T = (4 \;\; 1 \;\; 3)$; durch Transponieren eines Spaltenvektors entsteht ein Zeilenvektor.

Zu **d)** $D^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; durch Transponieren eines Zeilenvektors entsteht ein Spaltenvektor.

TI 89





Tastenfolge nach Eingabe der Matrix (siehe eventuell "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 339f), wobei der Cursor in der Eingabezeile hinter der schließenden eckigen Klammer blinkt:

[2nd] **5** **4** (4:Matrix) **1** (1:^{T}) **ENTER**

Nicht zu verwechseln mit Matrizen sind die **Determinanten** (siehe "Ingenieur-Mathematik 1, Seite 255f). Eine Determinante ist eine **Zahl**, die man zu einer *quadratischen* Matrix bilden kann. Nicht ausgerechnet erinnern sie in ihrer Schreibweise an eine quadratische Matrix: statt der runden Klammern werden bei Determinanten senkrechte Striche verwendet.

Beispiel 11.3 : Determinante einer quadratischen Matrix (Wiederholung)

Gegeben sind die quadratischen Matrizen $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Ermittle ihre Determinanten.

Lösung

$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$ (Produkt der Elemente in der Hauptdiagonalen minus Produkt der Elemente in der Nebendiagonalen)

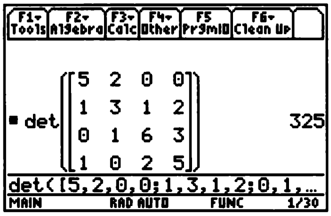
det (B) kann mit der Regel von SARRUS berechnet werden (nur für dreireihige Determinanten möglich!):

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{matrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 7 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - (1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 1) = 106.$$

$- \;\; - \;\; - \quad + \;\; + \;\; +$

Auf den Algorithmus zur Berechnung von Determinanten mit mehr als 3 Reihen wird nicht eingegangen. Die Berechnung erfolgt mit dem Rechner.

TI 89



Aufgaben

11.1 Gegeben ist eine Matrix $A = (a_{ij})$. Gib ihren Typ, die Elemente a_{12} und a_{21}, allfällige weitere Eigenschaften sowie ihre Transponierte an:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

11.2 Ergänze (wenn möglich), sodass eine symmetrische Matrix entsteht:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ . & 7 & 0 \\ . & . & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ . & 3 \\ . & -2 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & . & . \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & . & 0 \end{pmatrix}$

11.3 Berechne die Determinante der Matrix:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

11.4 Berechne die Determinante folgender komplexen Matrix:

a) $\begin{pmatrix} j & 2 \\ 0 & -j \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2-j & 3j \\ 1+2j & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2j & 1+j & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 3+2j & -j \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2j & 1+j & 0 \\ 1 & j & 1 \\ 1 & -j & 1 \end{pmatrix}$

11.5 Bestimme λ so, dass die Determinante null ist:

a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

11.6 Ermittle mit dem Rechner:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 12 & -4 \\ 2 & -4 & -2 & 10 \\ -3 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

11.2 Rechnen mit Matrizen

Zwei Matrizen A, B vom gleichen Typ werden **addiert** bzw. **subtrahiert**, indem man einander entsprechende Elemente addiert bzw. subtrahiert. Man schreibt: A + B bzw. A – B.

Eine Matrix A wird **mit einer Zahl k** $\in \mathbb{R}$ **multipliziert**, indem man *jedes* Element von A mit k multipliziert. Man schreibt: $k \cdot A$

Anmerkung: Eine Addition oder Subtraktion ist nur für Matrizen vom gleichen Typ definiert.

Beispiel 11.4 : Matrizenaddition (-subtraktion) sowie Multiplikation mit einer Zahl

Gegeben sind die Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

a) Berechne $A + B$, $A - B$, $3 \cdot A$.

b) Vereinfache B durch Herausheben.

Lösung

Zu **a)** $$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 & 10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+(-2) & 3+10 \\ 4+(-2) & 5+0 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 13 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

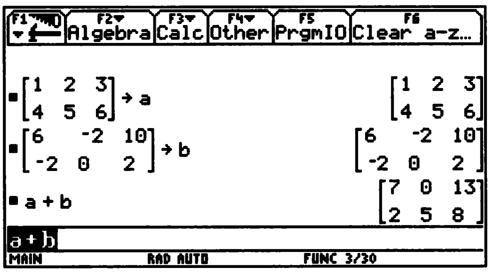
$$A - B = \begin{pmatrix} 1-6 & 2-(-2) & 3-10 \\ 4-(-2) & 5-0 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

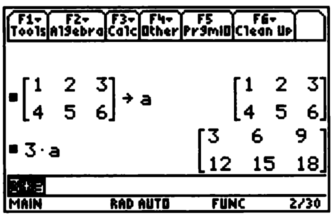
Zu **b)** Es kann der Faktor 2 herausgehoben werden: $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 10 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Für die Addition und Subtraktion von Matrizen gleichen Typs sowie für ihre Multiplikation mit einer Zahl k gelten Rechengesetze, die denen für gewöhnliche Zahlen entsprechen.
Beispiel: A + B = B + A (Kommutativgesetz der Addition).

Voyage 200



TI 89




```
Werden die Matrizen zuerst abgespeichert, so kann man mit ihnen schnell
und übersichtlich weitere Berechnungen durchführen.
```

Unter bestimmten Voraussetzungen kann auch eine Multiplikation zweier Matrizen definiert werden. Dazu soll zuerst an das Skalarprodukt zweier Vektoren erinnert werden.

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$; Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 41$.

> Gegeben ist eine Matrix A vom Typ (m,p) und eine Matrix B vom Typ (p,n), die Spaltenzahl von A ist also gleich der Zeilenzahl von B. Dann kann ein **Produkt** $A \cdot B = C$ erklärt werden, wobei C ebenfalls eine Matrix ist:
>
> (a) Die Produktmatrix $C = (c_{ij})$ ist vom Typ (m,n)
>
> (b) $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$ (Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem k-ten Spaltenvektor von B)

Anmerkungen:

(1) Merkregel für die Matrizenmultiplikation $A \cdot B$: $(m,p) \cdot (p,n) = (m,n)$

(2) Die Formel für c_{ij} eignet sich gut für eine eventuelle Programmierung der Matrizenmultiplikation.

Beispiel 11.5 : Multiplikation von Matrizen

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Bilde das Produkt **a)** $A \cdot B$ **b)** $A \cdot \vec{a}$.

Lösung

Zu **a)** Überprüfung, ob die Multiplikation möglich ist: $(2,3) \cdot (3,3) = (2,3)$.

Für die händische Multiplikation erweist sich das sogenannte **FALK'sche Schema** (Abb. 11.1) hilfreich, womit die skalare Multiplikation "Zeile von A mal Spalte von B" übersichtlich durchgeführt werden kann. Das jeweils gesuchte Element der Produktmatrix $A \cdot B$ steht im Kreuzungspunkt der zu multiplizierenden Zeile und Spalte.

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & A \cdot B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} & & & 3 & 0 & 1 \\ & & & 4 & 1 & 3 \\ & & & 2 & 5 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 20 & 8 & 11 \\ 3 & 5 & 2 & 33 & 15 & 18 \end{array}$$

$2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 3$

Somit: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 11 \\ 33 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

Abb. 11.1 FALK'sches Schema

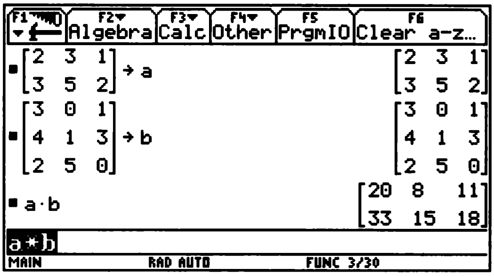
Die Multiplikation $B \cdot A$ ist nicht möglich, da die Spaltenanzahl von B ungleich der Zeilenanzahl von A ist.

Zu **b)** Überprüfung, ob die Multiplikation möglich ist: (2,3) · (3,1) = (2,1).

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 2 \\ & & & 3 \\ & & & 4 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 17 \\ 3 & 5 & 2 & 29 \end{array}$$

Somit: $A \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ 29 \end{pmatrix}$, das Ergebnis ist ein (Spalten-)Vektor.

Voyage 200



Anmerkung: Ist mit $A \cdot B$ auch das Produkt $B \cdot A$ möglich, so ist im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$, das heißt das Kommutativgesetz ist nicht erfüllt.

Inverse Matrix

Die beiden Zahlen 2 und $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ haben die Eigenschaft, dass ihr Produkt $2 \cdot 2^{-1} = 1$ ist. Man sagt, dass 2^{-1} der Kehrwert von 2 oder 2 der Kehrwert von 2^{-1} ist. Entsprechend definiert man bei Matrizen:

> Gibt es zu einer Matrix A eine Matrix A^{-1}, so dass gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$,
> so heißt A^{-1} **inverse Matrix** (kurz: **Inverse**) oder **Kehrmatrix** von A.

Anmerkungen:

(1) Die Bezeichnung A^{-1} erinnert an die Schreibweise für den Kehrwert einer Zahl.

(2) Existiert die Inverse zu A, so gilt das Kommutativgesetz: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$

Beispiel 11.6 : Inverse einer Matrix

Ermittle, wenn möglich, die Inverse zu $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösung

Wir schreiben die inverse Matrix zu A in der Form: $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann muss definitionsgemäß gelten: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a + c & 4b + d \\ 3a + 2c & 3b + 2d \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Daraus folgt ein leicht lösbares lineares Gleichungssystem für a, b, c und d:

I: $4a + c = 1$

II: $3a + 2c = 0$

III: $4b + d = 0$

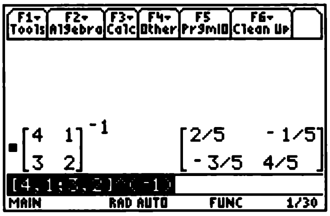
IV: $3b + 2d = 1$

Daraus ergibt sich $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$, $c = -\frac{3}{5}$, $d = \frac{4}{5}$

und damit $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Probe: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

TI 89



Führt man die Berechnung der Inversen zu einer (2,2)-Matrix allgemein, so ergibt sich:

> **Inverse einer (2,2)-Matrix** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$:
>
> Ist $\det(A) \neq 0$, so exisitiert A^{-1} und es gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Man erhält die Inverse einer Matrix vom Typ (2,2), indem man die Elemente in der Hauptdiagonale vertauscht, die Vorzeichen der Elemente in der Nebendiagonale ändert und danach durch die Determinante der Matrix dividiert. Bestätige dies im Beispiel 11.6.

Allgemein kann man zeigen, dass eine beliebige quadratische Matrix A genau dann eine inverse Matrix besitzt, wenn $\det(A) \neq 0$. In diesem Fall heißt A **regulär**, ansonsten **singulär**.

Die Ermittlung der Inversen zu einer Matrix von höherer als 2. Ordnung wird nicht besprochen; sie kann mit einem geeigneten Rechner erfolgen.

Aufgaben

11.7 Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Führe aus (soweit dies möglich ist):

a) $2 \cdot B - C^T$ **b)** $-A^T + 3C$ **c)** $(A + B)^T - 2C$ **d)** $B^T + 2C - A$

11.8 Vereinfache durch "Herausheben":

a) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -15 & 30 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 \\ -1{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0{,}01 & 0 \\ -0{,}15 & 0{,}03 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$

11.9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimme (falls möglich): **a)** $A \cdot A^T$ **b)** $A^T \cdot A$

11.10 Gegeben sind: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechne, soweit möglich:

a) $A \cdot B$	**b)** $B \cdot A$	**c)** $A \cdot C$	**d)** $C \cdot A$	**e)** $B \cdot C$
f) $C \cdot B$	**g)** $A^T \cdot B$	**h)** $A^T \cdot C$	**i)** $A \cdot S$	**j)** $B \cdot S$
k) $C \cdot S$	**l)** $S^T \cdot A$	**m)** $S^T \cdot B$	**n)** $S \cdot S^T$	**o)** $S^T \cdot S$

11.11 Gegeben ist eine Matrix A und ein Vektor $\vec{x}$. Berechne das Produkt $A \cdot \vec{x}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

11.12 Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Berechne $A \cdot B$ sowie $B \cdot A$.

b) Gilt die Beziehung $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

c) Berechne $\det(A)$, $\det(2 \cdot A)$ sowie $\det(A^2)$.

d) Bestätige die allgemein gültige Regel: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Hinweis: $A^2 = A \cdot A$

11.13 Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Berechne $A \cdot E$ und $E \cdot A$, wobei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$!

11.14 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimme $A^2 = A \cdot A$, $B^2 = B \cdot B$ sowie B^3.

11.15 Gegeben sind die komplexen Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1+j & j \\ 2 & j \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} j & 2-j \\ 1 & 1+2j \end{pmatrix}$. Berechne:

a) $A^2 = A \cdot A$ **b)** $B^2 = B \cdot B$ **c)** $A \cdot B$ **d)** $B \cdot A$

11.16 Bestimme, falls möglich, die Inverse zu:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

11.17 Bestimme die Inverse der folgenden komplexen Matrix:

a) $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 2+j \\ 2-j & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} j & 2j \\ 1+j & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1-j & 1+5j \\ 1+j & 1-2j \end{pmatrix}$

11.18 Bestätige, dass $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (allgemein gültig, falls A regulär).

a) $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

11.19 Gegeben sind die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Bestätige damit die allgemein gültige Regel (wenn A und B regulär): $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

11.20 Zeige, dass die Matrizen A und B zueinander invers sind:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -10 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

11.21 Zeige, dass für die folgende Matrix A gilt: $A^{-1} = A^T$:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hinweis: Matrizen dieser Art beschreiben Drehungen in der Ebene bzw. im Raum.

11.22 Ermittle mit dem Rechner:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$

11.3 Anwendungen

Viele Anwendungsprobleme führen auf lineare Gleichungssysteme. Solche Systeme können übersichtlich in der Matrizenschreibweise formuliert und weiterbehandelt werden. Auch Aufgabenstellungen der Analysis (Differential- und Integralrechnung) führen öfter auf die Untersuchung von Matrizen wie etwa die Ermittlung der Eigenfrequenzen von Schwingungssystemen. Der Matrixbegriff ist kennzeichnend für ein ganzes Gebiet der Mathematik, nämlich der *Linearen Algebra*.

Beispiel 11.7 : Lineares Gleichungssystem in Matrizenform

Schreibe das folgende Gleichungssystem in Matrizenform und berechne die Determinante der Koeffizientenmatrix.

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x + y - z = 2 \\ \text{II:} & x + 3y = 5 \\ \text{III:} & y + 2z = 7 \end{array}$$

Lösung

Das Gleichungssystem besitzt die **Koeffizientenmatrix** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Setzt man noch

als Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und als "rechte Seite" des Gleichungssystem $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, so

bestätigt man durch Ausmultiplizieren sofort, dass das Gleichungssystem in der Form

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ oder kurz $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ geschrieben werden kann.

Die Determinante von A kann man mit der SARRUS'schen Regel berechnen: det (A) = 9. Dabei interessiert hier nur, ob die Determinante der Koeffizientenmatrix A null ist oder nicht. Ist nämlich det (A) $\neq$ 0, so gibt es eine eindeutige Lösung.

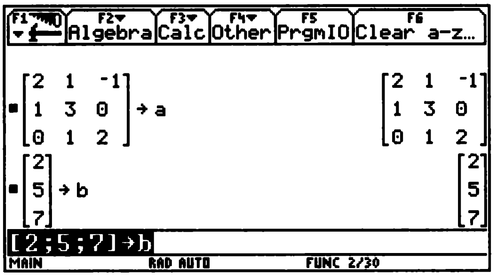
Löst man das Gleichungssystem in der gewohnten Weise, so erhält man x = 2, y = 1 und z = 3.

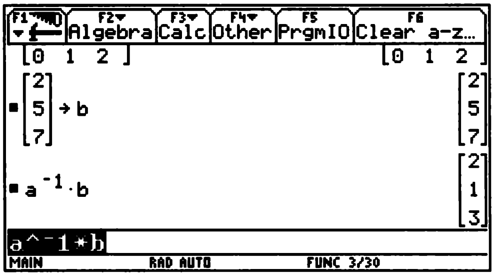
Man kann aber auch anders vorgehen: Wir multiplizieren die Matrizengleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ von links mit der Inversen von A (diese existiert, da A regulär ist):

$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

Da $A^{-1} \cdot A = E$ und $E \cdot \vec{x} = \vec{x}$, kann die Lösung des Gleichungssystems in der Form: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ geschrieben werden.

Natürlich bleibt hier die Aufgabe, die Inverse von A zu bestimmen. Diese Darstellung der Lösung kann trotzdem vorteilhaft sein, wenn die Inverse von A schon bekannt ist oder mit einem geeigneten Rechner schnell berechnet werden kann.





Allgemein gilt für ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen für n Unbekannte, in Matrizenform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, die grundlegende Aussage über die Lösbarkeit (vgl. "Ingenieur-Mathematik 1", Seite 259):

> Ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen für n Unbekannte, in Matrizenform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, ist genau dann **eindeutig lösbar**, wenn **det (A)** $\neq$ **0** ist. Die Lösung kann in der Form $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ dargestellt werden.
>
> Ist det (A) = 0, so besitzt das Gleichungssystem je nach rechter Seite $\vec{b}$ entweder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Die Determinante[23] det (A) bestimmt somit das Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems von n Gleichungen mit n Unbekannten.

Man kann die Frage stellen, wie es mit dem Lösungsverhalten eines Gleichungssystems aussieht, *wenn det (A) zwar ungleich null ist, aber nahe bei null* liegt. A heißt dann *fast singulär*. Ein solches System ist numerisch schwer lösbar, weil kleine Änderungen in den Elementen der Matrix große Änderungen in der Lösung hervorrufen. Wir haben ein solches Problem als **schlecht konditioniert** bezeichnet (Seite 288ff).

Beispiel: In der Festigkeitskeitslehre kann es vorkommen, dass kleine Änderungen in der Steifigkeit einer Konstruktion große Verformungen nach sich ziehen.

Computergraphik

Rechenprogramme erlauben es, Gebäude, Werkstücke, Automobile und dgl. graphisch am Bildschirm von allen Seiten anzusehen oder auf beliebige Ebenen zu projizieren. Grundlegend dafür sind Algorithmen, mit deren Hilfe die Koordinaten vieler Bildpunkte etwa nach einer Verschiebung, Drehung oder Normalprojektion eines Objektes berechnet werden können.

Beispiel 11.8 : Drehung um den Koordinatenursprung

Ein Punkt P(x/y) wird um den Winkel φ im positiven Drehsinn um den Koordinatenursprung O in den Punkt P'(x'/y') gedreht, wobei der Abstand zum Koordinatenursprung erhalten bleibt.

a) Wie lauten allgemein die Koordinaten von P'?

b) Wie lauten die Koordinaten von P' bei der Drehung von P(5/2) um den Winkel $\varphi = 40°$?

---

23 determinieren = bestimmen, entscheiden

Lösung

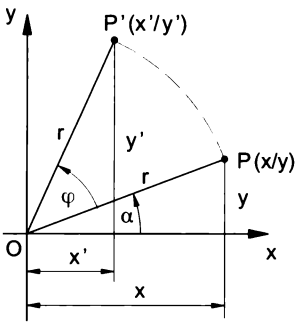


Abb. 11.2 Drehung um den Koordinatenursprung

Wegen $\overline{OP} = \overline{OP'} = r$ ist $x' = r \cdot \cos(\alpha + \varphi)$ und $y' = r \cdot \sin(\alpha + \varphi)$.
Bei Verwendung des 1. Summensatzes ergibt sich:

$x' = r \cdot \cos\alpha \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi$

$y' = r \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi + r \cdot \cos\alpha \cdot \sin\varphi$

Mit $r \cdot \cos\alpha = x$ und $r \cdot \sin\alpha = y$ folgt:

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos\varphi - y \cdot \sin\varphi \\ y' &= y \cdot \cos\varphi + x \cdot \sin\varphi \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Matrix $D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ wird als eine *Drehmatrix* bezeichnet.

Drehung von $P(5/2)$ um den Winkel $\varphi = 40°$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 40° & -\sin 40° \\ \sin 40° & \cos 40° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos 40° - 2 \cdot \sin 40° \\ 5 \cdot \sin 40° + 2 \cdot \cos 40° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}54 \\ 4{,}75 \end{pmatrix}$$

Drehungen im Raum werden durch quadratische Drehmatrizen der Ordnung 3 beschrieben.

Beispiel 11.9 : Stückzahlen für eine zweistufige Produktion

Drei verschiedene Fertigprodukte F_1, F_2 und F_3 setzen sich aus den drei Baugruppen B_1, B_2 und B_3 zusammen (Abb. 11.3). Diese setzen sich wiederum aus den vier Einzelteilen E_1, E_2, E_3 und E_4 zusammen. Die jeweils benötigten Stückzahlen sind in den beiden unten stehenden Tabellen angegeben. So benötigt etwa die Baugruppe B_1 von E_1 4 Stück, von E_2 5 Stück usw. Entsprechend benötigt das Fertigprodukt F_1 von B_1 2 Stück, von B_2 1 Stück und von B_3 2 Stück.

Einzel-teil	Baugruppe		
	B_1	B_2	B_3
E_1	4	3	1
E_2	5	4	0
E_3	3	1	5
E_4	0	2	1

Bau-gruppe	Fertigprodukte		
	F_1	F_2	F_3
B_1	2	1	3
B_2	1	4	2
B_3	2	3	0

Die Materialkosten je Stück Einzelteil betragen: € 2 für E_1, € 3 für E_2, € 1 für E_3, € 4 für E_4.

a) Gib die Materialflüsse in den beiden Zusammensetzungen in Form von Matrixgleichungen an.

b) Wie lautet die zahlenmäßige Verflechtung zwischen den Eingangsgrößen (Stückzahlen der Einzelteile) und den Ausgangsgrößen (Stückzahlen der Fertigprodukte)?

c) Wie viele Einzelteile sind nötig, um 400 Stück von F_1, 200 Stück von F_2 und 300 Stück von F_3 zu produzieren? Wie hoch sind dabei die Materialkosten?

Lösung

Zu **a)**

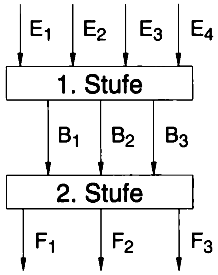


Abb. 11.3

Bezeichnungen:

e_1, e_2, e_3, e_4 ..... Stückzahlen der Einzelteile E_1, E_2, E_3 und E_4
b_1, b_2, b_3 .... Stückzahlen der Baugruppen B_1, B_2, und B_3
f_1, f_2, f_3 .... Stückzahlen der Fertigteile F_1, F_2, und F_3
p_1, p_2, p_3, p_4 ..... Stückpreise für die Einzelteile E_1, E_2, E_3 und E_4

Dann gilt:

$$\begin{aligned} b_1 &= 2\cdot f_1 + f_2 + 3\cdot f_3 \\ b_2 &= f_1 + 4\cdot f_2 + 2\cdot f_3 \\ b_3 &= 2\cdot f_1 + 3\cdot f_2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e_1 &= 4\cdot b_1 + 3\cdot b_2 + b_3 \\ e_2 &= 5\cdot b_1 + 4\cdot b_2 \\ e_3 &= 3\cdot b_1 + b_2 + 5\cdot b_3 \\ e_4 &= 2\cdot b_2 + b_3 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Zu **b)**

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & 18 \\ 14 & 21 & 23 \\ 17 & 22 & 11 \\ 4 & 11 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Man braucht also beispielsweise je Fertigprodukt F_1 13 Stück von E_1, 14 Stück von E_2, 17 Stück von E_3 und 4 Stück von E_4.

Zu **c)**

Um die gewünschten Stückzahlen für die Fertigprodukte zu produzieren, setzen wir $f_1 = 400$, $f_2 = 200$ und $f_3 = 300$:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & 18 \\ 14 & 21 & 23 \\ 17 & 22 & 11 \\ 4 & 11 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14400 \\ 16700 \\ 14500 \\ 5000 \end{pmatrix}$$

Damit sind folgende Stückzahlen für die Einzelteile nötig: $e_1 = 14400$, $e_2 = 16700$, $e_3 = 14500$ und $e_4 = 5000$. Zur Berechnung der Materialkosten ist der Zeilenvektor ("Preisvektor") $\vec{p}^{\,T} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ mit dem Stückzahlvektor der Einzelteile zu multiplizieren:

$$(€\ 2 \quad €\ 3 \quad €\ 1 \quad €\ 4) \cdot \begin{pmatrix} 14400 \\ 16700 \\ 14500 \\ 5000 \end{pmatrix} = €\ 113400.$$

Beispiel 11.10 : Kettenschaltung von Vierpolen

Gegeben ist ein elektrischer Vierpol (Abb. 11.4) mit $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$ und $R_3 = 100\ \Omega$.

a) Ermittle die Beziehung zwischen den Spannungen U_1, U_2 und den Stromstärken I_1, I_2, die "Widerstandsform" bzw. die "Leitwertform" der Vierpolgleichungen.

b) Ermittle die Beziehung zwischen den Eingangsgrößen U_1, I_1 und den Ausgangsgrößen U_2, I_2, die "Kettenform" der Vierpolgleichungen.

c) Wie lautet die Beziehung zwischen den Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen bei einer Reihenschaltung ("Kette") von zwei Vierpolen (Abb. 11.5) dieser Art?

d) Der ursprüngliche Vierpol kann als Kette von drei einfachen Vierpolen (Abb. 11.4) gedacht werden. Leite nun die Kettenmatrix ab!

Lösung

Zu **a)**

Nach der Knotenregel bzw. Maschenregel gilt:

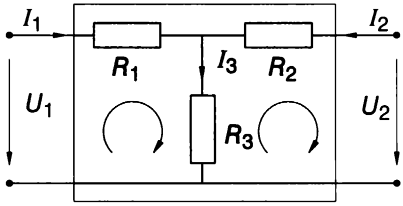


Abb. 11.4

I: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

II: $-U_1 + R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 = 0$

III: $U_2 - R_3 \cdot I_3 - R_2 \cdot I_2 = 0$

Aus I: folgt: $I_3 = I_1 + I_2$. Setzt man dafür in II: und III: ein, so erhält man schließlich:

I': $U_1 = (R_1 + R_3) \cdot I_1 + R_3 \cdot I_2$

II': $U_2 = R_3 \cdot I_1 + (R_2 + R_3) \cdot I_2$

Dies ist auch schon die *Widerstandsform* der Vierpolgleichungen. In Matrizenschreibweise lauten die Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}}_{\text{Widerstandsmatrix Z}} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110\ \Omega & 100\ \Omega \\ 100\ \Omega & 110\ \Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Um auf die Leitwertform zu kommen, multiplizieren wir die Widerstandsform der Vierpolgleichungen "von links" mit der Inversen der Widerstandsmatrix:

$$Z^{-1} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = Z^{-1} \cdot Z \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei wird benützt, dass $Z^{-1} \cdot Z = E$ ist und die Multiplikation jeder Matrix, hier ein Spaltenvektor, mit der entsprechenden Einheitsmatrix wieder die Matrix ergibt. Z^{-1} wird auch *Leitwertmatrix Y* genannt. Damit erhält man die Vierpolgleichungen in der *Leitwertform*:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Z^{-1} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$

Berechnung von $Y = Z^{-1}$: $\det(W) = 110 \cdot 110\ \Omega^2 - 100 \cdot 100\ \Omega^2 = 2100\ \Omega^2$.

$$Z^{-1} = \frac{1}{\det(Z)} \cdot \begin{pmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_1 + R_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2100} \cdot \begin{pmatrix} 110 & -100 \\ -100 & 110 \end{pmatrix} \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0524 & -0{,}0476 \\ -0{,}0476 & 0{,}0524 \end{pmatrix} \Omega^{-1}$$

Zu **b)** Wir lösen das Gleichungssystem

I': $U_1 = (R_1 + R_3) \cdot I_1 + R_3 \cdot I_2$
II': $U_2 = R_3 \cdot I_1 + (R_2 + R_3) \cdot I_2$

nun nach U_1 und I_1:

$$U_1 = \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) \cdot U_2 + \left(R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}\right) \cdot (-I_2)$$

$$I_1 = \frac{1}{R_3} \cdot U_2 + \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \cdot (-I_2)$$

oder $$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_3} & R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \\ \frac{1}{R_3} & 1 + \frac{R_2}{R_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

Die Übertragung zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen ist durch die so genannte *Kettenmatrix* A gegeben. Setzt man für die Widerstände ein, so erhält man:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathrm{A} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1{,}1 & 21\ \Omega \\ 0{,}01\ \Omega^{-1} & 1{,}1 \end{pmatrix}.$$

Zu **c)**

Schaltet man die Ausgangsklemmen eines Vierpols mit den Eingangsklemmen eines zweiten Vierpols zusammen (Abb. 11.5), so spricht man von einer *Kettenschaltung*.

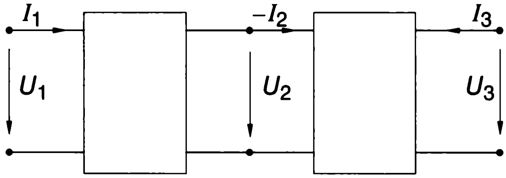


Abb. 11.5 Kettenschaltung von zwei Vierpolen

Aus $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathrm{A} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \mathrm{A} \cdot \begin{pmatrix} U_3 \\ -I_3 \end{pmatrix}$ folgt $\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{A} \cdot \begin{pmatrix} U_3 \\ -I_3 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^2 \begin{pmatrix} U_3 \\ -I_3 \end{pmatrix}$.

Die Gesamtmatrix der Kettenschaltung ist also einfach das Produkt der Kettenmatrizen der Einzelvierpole. Setzt man Zahlenwerte für die Widerstände ein, so ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}1 & 21\ \Omega \\ 0{,}01\ \Omega^{-1} & 1{,}1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} U_3 \\ -I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}42 & 46{,}20\ \Omega \\ 0{,}022\ \Omega^{-1} & 1{,}42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_3 \\ -I_3 \end{pmatrix}$$

Methode der Finiten Elemente (FEM)

Diese Methode wurde zur Berechnung von Tragwerken entwickelt. Ihre erste umfassende Anwendung bestand 1956 in der Berechnung von Flugzeugtragflügeln der amerikanischen Firma Boeing. Sie ist ein numerisches Berechnungsverfahren vorrangig zur Lösung von Problemen der Struktur- und Kontinuumsmechanik, aber auch darüber hinaus. Sein Grundgedanke ist, die zu berechnende Struktur in eine Vielzahl kleiner abgegrenzter Elemente in "finite Elemente" wie Stäbe oder Dreieckscheiben (finit = begrenzt), zu zerlegen. Jedes Element tritt nur an definierten Stellen, den Knoten, mit der Umgebung in Kontakt. Für Festigkeitsberechnungen werden die Elemente als elastische Körper betrachtet. Das folgende einfache Beispiel gibt einen ersten Einblick in die Methode der Finiten Elemente (nach ADAM, [3]).

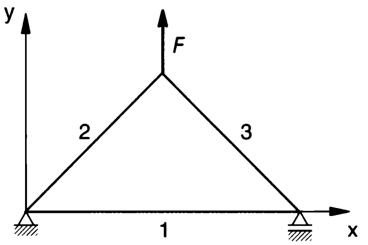


Abb. 11.6 Fachwerk als Struktur

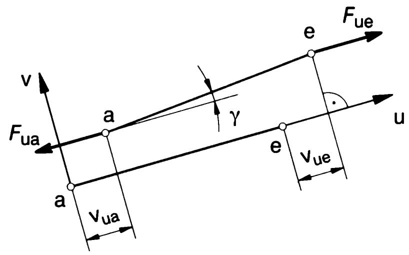


Abb. 11.7 Verschiebungen der Knoten a, e eines Stabes

Das Fachwerk der Abb.11.6 ist aus finiten Stabelementen mit Gelenken an seinen Endpunkten, den Knoten, zusammengesetzt. Um das Fachwerk als ganzes zu erfassen, wird in der Fachwerksebene ein globales (x,y)-Koordinatensystem eingeführt. Zur Untersuchung eines einzelnen Stabes mit den Knoten a und e wird zusätzlich ein lokales (u,v)-Koordinatensystem eingeführt, dessen u-Achse in Richtung des unverformten Stabes gelegt wird (Abb. 11.7). Durch die Belastung verschiebt sich der Stab ein wenig. Damit verbunden ist eine kleine Drehung des Stabes um den Winkel γ, die vernachlässigt werden kann. v_{ua} und v_{ue} sind die Verschiebungen der Knoten a und e in u-Richtung.

Kräfte treten nur in den Knoten auf. Auf Grund des HOOKE'schen Gesetzes erhält man die Stabkraft $F_{ue} = c_f \cdot (-v_{ua} + v_{ue})$ mit c_f als Federkonstante des Stabes. Wegen $F_{ua} = -F_{ue}$ (Kräftegleichgewicht), gilt weiters $F_{ua} = c_f \cdot (v_{ua} - v_{ue})$. In Matrixform lauten diese beiden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} F_{ua} \\ F_{ue} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_f & -c_f \\ -c_f & c_f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{ua} \\ v_{ue} \end{pmatrix} = c_f \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{ua} \\ v_{ue} \end{pmatrix}.$$

Zur Betrachtung des gesamten Fachwerks müssen die Verschiebungen und Stabkräfte in das globale (x,y)-Koordinatensystem transformiert werden.

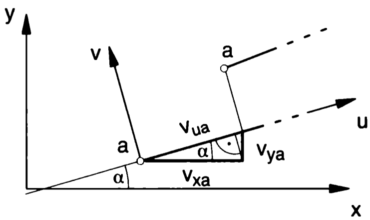


Abb. 11.8 Transformation der Verschiebungen

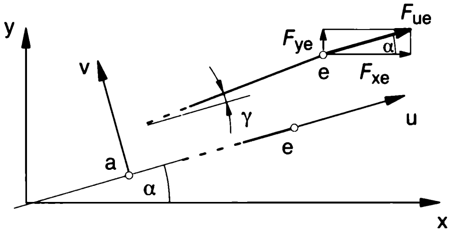


Abb. 11.9 Transformation der Stabkräfte

Schließen die u- und die x-Achse den Winkel α ein, so entnimmt man aus Abb. 11.8 für den Knoten a und entsprechend für den Knoten e, wenn man abkürzend $c = \cos\alpha$ und $s = \sin\alpha$ setzt:

$$\begin{aligned} v_{ua} &= v_{xa} \cdot \cos\alpha + v_{ya} \cdot \sin\alpha \\ v_{ue} &= v_{xe} \cdot \cos\alpha + v_{ye} \cdot \sin\alpha \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} v_{ua} \\ v_{ue} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{xa} \\ v_{ya} \\ v_{xe} \\ v_{ye} \end{pmatrix}$$

Gleichermaßen geht man bei den Kräften vor. Aus Abb. 11.9 entnimmt man den Zusammenhang zwischen den skalaren Komponenten der Stabkraft im Knoten e in den beiden Koordinatensystemen. Entsprechendes gilt für den Knoten a. Man erhält, wenn man nun die skalaren (x,y)-Komponenten durch die skalaren u-Komponenten ausdrückt:

$F_{xa} = F_{ua} \cdot \cos\alpha$
$F_{xe} = F_{ue} \cdot \cos\alpha$
$F_{ya} = F_{ua} \cdot \sin\alpha$
$F_{ye} = F_{ue} \cdot \sin\alpha$ oder $\begin{pmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ F_{xe} \\ F_{ye} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{ua} \\ F_{ue} \end{pmatrix}.$

Insgesamt ergibt sich nun durch Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ F_{xe} \\ F_{ye} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot c_f \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{xa} \\ v_{ya} \\ v_{xe} \\ v_{ye} \end{pmatrix} =$$

$$= c_f \cdot \begin{pmatrix} c^2 & c \cdot s & -c^2 & -c \cdot s \\ c \cdot s & s^2 & -c \cdot s & -s^2 \\ -c^2 & -c \cdot s & c^2 & c \cdot s \\ -c \cdot s & -s^2 & c \cdot s & s^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{xa} \\ v_{ya} \\ v_{xe} \\ v_{ye} \end{pmatrix}$$

Damit kann für jeden Stab der Zusammenhang zwischen den Knotenverschiebungen und den Knotenkräften ausgedrückt werden. Die diesen Zusammenhang vermittelnde symmetrische Matrix heißt **Elementsteifigkeitsmatrix**. Sie ist eine verallgemeinerte Federkonstante des betreffenden Elements.

Durch Verbinden an den Knoten wird nun die Struktur aus den einzelnen Stäben zusammengesetzt. Dies erfolgt im belasteten System unter Beachtung der Forderungen, dass Kräftegleichgewicht in allen Knoten besteht und natürlich die Verschiebungen in einem Knoten zusammenpassen müssen. Dazu wird konkret ein Fachwerk nach Abb. 11.10 angenommen. F_{Ax}, F_{Ay} und F_{By} sind die Komponenten der Auflagerkräfte. Der Knoten 1 besitzt ein Festlager A (keine Verschiebung in x- oder in y-Richtung), der Knoten 3 ein Loslager B (Verschiebung nur in x-Richtung).

Nimmt man für die Länge des ersten Stabes 2200 mm an, so sind die Längen der beiden anderen Stäbe 1556 mm. Der Elastizitätsmodul E soll für alle drei Stäbe den gleichen Wert $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2 haben.

Für die Federkonstante eines Stabes gilt: $c_f = E \cdot \frac{A}{L}$, wobei L die Länge des betreffenden Stabes, A seine Querschnittsfläche und E eine Materialkonstante, der Elastizitätsmodul, sind.

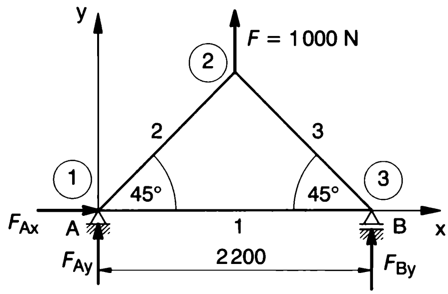


Abb. 11.10 Fachwerk mit Bezeichnungen

Die noch nicht gegebenen Stabquerschnitte sollen einfachheitshalber so gewählt werden, dass für die Federkonstanten der drei Stäbe gilt: $c_{f1} = 6000$ N/mm und $c_{f2} = c_{f3} = 4000$ N/mm.

Damit können die Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Stäbe konkret angegeben werden.

Stab 1: Knoten 1 und 3, $\alpha = 0°$, $c = 1$, $s = 0$, $c_{f1} = 6000$ N/mm (der zweite Index bezieht sich wieder auf den Knoten):

$$\begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{pmatrix} = 1000\ \text{N/mm} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x3} \\ v_{y3} \end{pmatrix}$$

Stab 2: Knoten 1 und 2, $\alpha = 45°$, $c = s = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c_{f2} = 4000$ N/mm:

$$\begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{pmatrix} = 1000 \text{ N/mm} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \end{pmatrix}$$

Stab 3: Knoten 3 und 2, $\alpha = -45°$ (weil der Knoten 3 der Stabanfang ist), $c = -s = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c_{f3} = 4000$ N/mm:

$$\begin{pmatrix} F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{pmatrix} = 1000 \text{ N/mm} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{x3} \\ v_{y3} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \end{pmatrix}$$

Die Gleichgewichtsbedingung im Knoten 1 verlangt, dass die Summe der Kräfte F_{x1} der Stäbe 1 und 2 gleich der Komponente F_{Ax} der Lagerkraft im Festlager A und entsprechend die Summe der Kräfte F_{y1} dieser Stäbe gleich der Komponente F_{Ay} ist. Weiters ist im Knoten 2 die Summe der Kräfte F_{x2} der Stäbe 2 und 3 gleich 0, die Summe der Kräfte F_{y2} dieser Stäbe aber gleich $F = 1000$ N. Schließlich gilt im Knoten 3, der sich in einem Loslager befindet, dass die Summe der Kräfte F_{x3} gleich 0 und die Summe der Kräfte F_{y3} dieser Stäbe gleich F_{By} ist. Berücksichtigt man diese Forderungen, so kann man die drei Steifigkeitsmatrizen der Stäbe zu einer **Gesamtsteifigkeitsmatrix** der Struktur vereinigen und schreiben:

$$\begin{pmatrix} \sum F_{x1} \\ \sum F_{y1} \\ \sum F_{x2} \\ \sum F_{y2} \\ \sum F_{x3} \\ \sum F_{y3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ 0 \\ 1000\text{ N} \\ 0 \\ F_{By} \end{pmatrix} = 1000 \text{ N/mm} \cdot \begin{pmatrix} 6+2 & 0+2 & 0-2 & 0-2 & -6+0 & 0 \\ 0+2 & 0+2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2+2 & 2-2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2-2 & 2+2 & 2 & -2 \\ -6 & 0 & -2 & 2 & 6+2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{x3} \\ v_{y3} \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Angabe muss $v_{x1} = v_{y1} = v_{y3} = 0$ sein, sodass ein Gleichungssystem für die 6 Unbekannten v_{x2}, v_{y2} und v_{x3} sowie F_{Ax}, F_{Ay}, F_{By} bleibt. Lösung:

$v_{x2} = -0{,}04$ mm, $v_{y2} = 0{,}29$ mm, $v_{x3} = -0{,}08$ mm, $F_{Ax} = 0$ N, $F_{Ay} = -500$ N, $F_{By} = -500$ N.

In der Folge können aus den globalen Verschiebungen die lokalen Verschiebungen v_{ua} und v_{ue} der Knoten und weiterhin die Stabkräfte $F_{ue} = k \cdot (v_{ue} - v_{ua})$ berechnet werden.

Im Überblick: Matrizen

Eine **Matrix** A vom Typ (m,n) ist ein rechteckiges (Zahlen-)Schema aus m Zeilen und n Spalten. Die Zahlen $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ heißen **Elemente** der Matrix.

Quadratische Matrizen: Zeilenanzahl = Spaltenanzahl; dazu gehören die *Diagonalmatrizen* (alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale sind null) und die *Einheitsmatrizen*. Letztere sind Diagonalmatrizen, deren sämtliche Hauptdiagonalelemente 1 sind.
Eine **Determinante** ist eine Zahl, die man zu einer quadratischen Matrix bilden kann.

Spalten- und Zeilenvektoren sind einspaltige bzw. einzeilige Matrizen. Eine **Nullmatrix** besitzt nur Elemente, die null sind.
Vertauscht man in einer Matrix A die Zeilen mit den Spalten, so erhält man die zu A **transponierte Matrix** A^T. Ein quadratische Matrix, die gleich ihrer transponierten Matrix ist, heißt **symmetrisch**.
Zwei Matrizen vom gleichen Typ heißen **gleich**, wenn sie elementeweise übereinstimmen.
Rechnen mit Matrizen: Zwei Matrizen vom gleichen Typ werden *elementeweise* addiert oder subtrahiert. Eine Matrix wird mit einer Zahl multipliziert, indem man *jede* Zahl der Matrix mit dieser Zahl multipliziert. Zwei Matrizen A, B können multipliziert werden, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt.
Gibt es zu einer Matrix A eine Matrix A^{-1}, sodass gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, so heißt A^{-1} **inverse Matrix** oder **Kehrmatrix** von A. In diesem Fall heißt A **regulär**, sonst **singulär**.
Ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen für n Unbekannte, in Matrizenform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, ist genau dann **eindeutig lösbar**, wenn **det (A)** $\neq$ **0** ist. Die Lösung kann in der Form $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ dargestellt werden.

Aufgaben

11.23 Schreibe das folgende lineare Gleichungssystem in der Matrizenschreibweise. Beurteile danach das Lösungsverhalten mit Hilfe der Determinante der Koeffizientenmatrix. Löse das Gleichungssystem, wenn dies eindeutig möglich ist.

a)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & -x + 2y + z = 3 \\ \text{II:} & 3x - 4y = 0 \\ \text{III:} & y + 4z = 7 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x + y - z = 2 \\ \text{II:} & x + 3y = 5 \\ \text{III:} & y + 2z = 7 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x + y - z = 2 \\ \text{II:} & 4x + 3y = 11 \\ \text{III:} & y + 2z = 7 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x + y - z = 1 \\ \text{II:} & 3x + 2y = 12 \\ \text{III:} & 2x + 2y + z = 14 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x + y - z = 1 \\ \text{II:} & 3x + 2y = 12 \\ \text{III:} & 2x + y + z = 11 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x + y - z = 1 \\ \text{II:} & 3x + 2y = 12 \\ \text{III:} & 2x + y + z = 10 \end{array}$$

11.24 Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x + 4{,}02y = 24{,}1 \\ \text{II:} & 3x + 6y = 36 \end{array}$$

Löse das Gleichungssystem und berechne die Determinante der Koeffizientenmatrix A. Ändere sodann den Koeffizienten 4,02 auf 4,01 und löse das so geringfügig veränderte Gleichungssystem.

11.25 Der Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ soll um 120° um den Koordinatenursprung gedreht werden. Wie lautet der dadurch entstehende Ortsvektor $\vec{x}'$?

11.26 Das Quadrat ABCD mit den Eckpunkten A(1/1), B(5/1), C(5/5) soll um den Koordinatenursprung um 90° gedreht werden. Wie lauten die Koordinaten der neuen Eckpunkte?

11.27 Die Matrix $D_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschreibt im Raum eine Drehung um die z-Achse mit dem Drehwinkel φ. Berechne ihre Determinante.

11.28 In einem Unternehmen werden aus 4 "Rohstoffen" R_1, R_2, R_3 und R_4 drei "Zwischenprodukte" Z_1, Z_2 und Z_3 hergestellt und aus diesen wiederum drei "Endprodukte" F_1, F_2 und F_3. Die Rohstoffpreise betragen je Einheit: € 0,5 für R_1, € 1,0 für R_2, € 1,5 für R_3 und € 0,5 für R_4. Die folgenden beiden Tabellen geben den Bedarf in den entsprechenden Einheiten an:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	3	2	2
R_2	1	3	0
R_3	1	1	3
R_4	2	4	1

	F_1	F_2	F_3
Z_1	2	1	3
Z_2	1	2	2
Z_3	1	3	0

Wie hoch sind die Rohstoffkosten für

a) je 50 Einheiten von F_1, F_2 und F_3

b) 40 Einheiten von F_1, 35 Einheiten von F_2 und 65 Einheiten von F_3?

Führe die Rechnung mit Matrizen (Vektoren).

11.29 Ein bestimmtes Produkt wird von zwei Herstellern H_1 und H_2 angeboten. Zu Jahresbeginn ist die Marktaufteilung bekannt: 30% für H_1 und 70% für H_2. Ein Marktforschungsinstitut schätzt, dass pro Jahr folgende Kundenwanderung, in Matrizenschreibweise dargestellt, erfolgt: $W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$. Dabei ist w_{ij} der Anteil der Kunden, der innerhalb eines Jahres vom Hersteller H_i zum Hersteller H_j wechselt: $w_{11} = 0{,}9$ und $w_{12} = 0{,}1$ bedeutet also, dass 90% der Kunden von H_1 zu H_1 "wechselt", diesem Hersteller also treu bleibt, jedoch 10% von H_1 zu H_2 wechseln. Der Markt wird auf 20000 Kunden geschätzt.

a) Ermittle die Marktanteile und die Kundenzahlen am Ende des ersten Jahres.

b) Wie lauten diese Werte am Ende des zweiten Jahres?

Führe die Rechnung mit Matrizen (Vektoren).

11.30 Der Vierpol in Beispiel 11.10 kann nach Abb. 11.11 als Kette von drei sehr einfachen Vierpolen gesehen werden. Bilde die Kettenmatrizen der drei Teile und daraus die Gesamtmatrix des Vierpols.

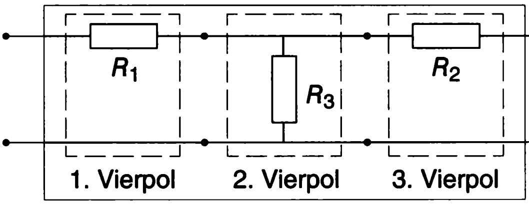


Abb. 11.11

11.31 Bilde die Gesamtmatrix des Vierpols aus Abb. 11.12 aus den Kettenmatrizen

a) von zwei Teilen,

b) von vier Teilen.

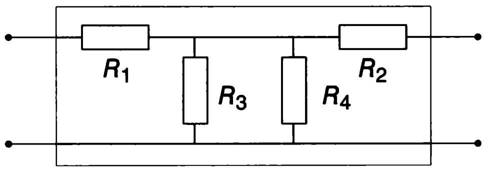


Abb. 11.12

12 Moderne Hilfsmittel

12.1 Einführung in Mathcad (Teil 2)

Die folgenden Seiten setzen die Einführung in das Arbeiten mit Mathcad aus "Ingenieur-Mathematik 2", Seiten 307 bis 325, fort. Inhaltlich werden Themen aus der Differential- und Integralrechnung sowie der Matrizenrechnung behandelt.

Differential- und Integralrechnung

Grenzwert einer Funktion

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \to 1 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} \to 0$$

$$f(x) := \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \to 1 \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) \to 1$$

Man wählt aus der Differential/Integral-Palette das gewünschte Grenzwertsymbol (zweiseitiger oder einseitiger Grenzwert) und macht dann die entsprechenden Eingaben in die Platzhalter. Das Zeichen ∞ ist ebenfalls auf der derselben Palette.

Symbolische Ableitung einer Funktion

$$\boxed{\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare}$$

$$\frac{d}{dx} x \cdot \sin(2 \cdot x) \to \sin(2 \cdot x) + 2 \cdot x \cdot \cos(2 \cdot x)$$

$$f(x) := e^{-x} \qquad \frac{d}{dx} f(x) \to -\exp(-x)$$

Den Differentialoperator erhält man durch Anklicken von in der Differential/Integral-Palette (oder durch Eintippen von ?). Danach werden die Platzhalter ersetzt und das symbolische Gleichheitszeichen $\to$ eingegeben.

Ableitung an einer Stelle

$$x_0 := 2$$

$$\frac{d}{dx_0} x_0 \cdot \sin(2 \cdot x_0) \to \sin(4) + 4 \cdot \cos(4) = -3.371$$

$$\text{Oder: } \frac{d}{dx} x \cdot \sin(2 \cdot x) \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, x = 2 \\ \text{gleit}, 4 \end{array} \right. \to -3.371$$

Nach Ausführung der symbolischen Auswertung erreicht man durch Eingabe eines Gleichheitszeichens eine Kommazahl als Ergebnis. Dies ist auch durch Eingabe des Schlüsselwortes "gleit" aus der Symbolik-Palette möglich.

Höhere Ableitung

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{a \cdot x} \to a^2 \cdot \exp(a \cdot x)$$

$$\frac{d^3}{dy^3} e^{x \cdot y} \to x^3 \cdot \exp(x \cdot y)$$

Anklicken des Differentialoperators in der Differential/Integral-Palette und Ersetzen der Platzhalter. Danach Eingabe des symbolischen Gleichheitszeichens $\to$.
War x zuvor numerisch festgelegt, so wird x durch die Neudefinition x := x als variabel betrachtet.

Extremwertaufgabe

$$f(x) := x \cdot e^{-2x}$$

$$x_0 := \frac{d}{dx} f(x) = 0 \text{ auflösen}, x \to \frac{1}{2}$$

$$f(x_0) = 0.184$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, x = x_0 \\ \text{gleit}, 3 \end{array} \right. \to -.736$$

Es soll die Funktion $y = f(x) = x \cdot e^{-2x}$ auf Extrema untersucht werden. Die erste Ableitung von f(x) ist null für $x = \frac{1}{2}$. Die zweite Ableitung ist dort negativ, also liegt ein Hochpunkt vor: H(0,5/0,184).

Tangente an Funktionsgraphen

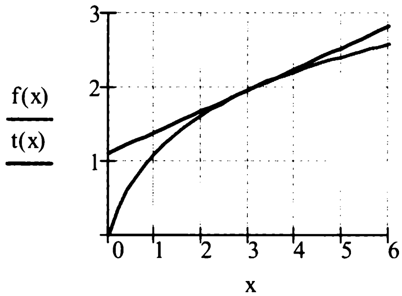
$f(x) := \ln(2x+1) \quad x_0 := 3 \quad f(x_0) = 1.946$

An der Stelle $x_0 = 3$ soll die die Tangente an den Graphen von $f(x) = \ln(2x+1)$ gelegt werden.

$k := \frac{d}{dx}f(x) \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, x = x_0 \\ \text{gleit}, 4 \end{array} \right. \rightarrow .2875$

$d := f(x_0) = kx_0 + d \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, d \\ \text{gleit}, 4 \end{array} \right. \rightarrow 1.089$

Tangente: $t(x) := kx + d \qquad x := 0, 0.2 .. 6$



Unbestimmte Integration

$\int x\sin(3x)\,dx \rightarrow \frac{1}{9}\cdot\sin(3\cdot x) - \frac{1}{3}\cdot x\cdot\cos(3\cdot x)$

$\int \ln(a\cdot t)\,dt \rightarrow t\cdot\ln(a\cdot t) - t$

Man drückt [Strg] + [i] oder klickt das Symbol $\int$ auf der Differential/Integralpalette an. Dann werden die Platzhalter für den Integranden und die Integrationsvariable ausgefüllt. Anschließend folgt das symbolische Gleichheitszeichen $\rightarrow$. Das Ergebnis wird ohne Integrationskonstante C angegeben.

Bestimmte Integration

Symbolische Integration:

$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right)$

$\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (\sin(\omega\cdot t + \varphi))^2\,dt \text{ vereinfachen} \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\omega}$

Diese kann, falls eine geschlossene Darstellung existiert, symbolisch erfolgen. Dazu klickt man das Symbol $\int_a^b$ auf der Differential/Integral-Palette an oder tippt & ein. Nach dem Ausfüllen aller Platzhalter folgt das symbolische Gleichheitszeichens $\rightarrow$. Eine Vereinfachung kann möglicherweise durch das Schlüsselwort "vereinfachen" erreicht werden.

Numerische Integration: $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = 1.148$

Die Integration erfolgt *numerisch*, wenn das numerische Gleichheitszeichen = verwendet wird.

Uneigentliche Integrale

$\int_0^\infty x\cdot e^{-2x}\,dx \rightarrow \frac{1}{4}$

$\int_0^\infty e^{-st}\,dt \rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{4}\cdot\exp(-s\cdot t) + \frac{1}{s}$

$\int_0^\infty e^{-st}\,dt \text{ annehmen}, s > 0 \rightarrow \frac{1}{s}$

$\int_0^\infty e^{-st}\cdot\sin(\omega\cdot t)\,dt \text{ annehmen}, s > 0 \rightarrow \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$

Hier kann es für die Konvergenz nötig sein, Einschränkungen vorzunehmen. Dies kann etwa über das Schlüsselwort "annehmen" (auf der Symbolik-Palette) erfolgen.

Matrizenrechnung

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$

$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A_{2,3} = 4$ Die Indizierung wird wie bei Vektoren mit der [-Taste eingeleitet.

$C := A^T \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

Man klickt auf das Matrixsymbol in der Matrix-Palette oder drückt Strg + M. Es erscheint ein Dialogfenster zur Festlegung der Zeilen- und Spaltenanzahl. Nach OK klickt man auf jeden Platzhalter und füllt die Matrix auf.

Die Voreinstellung für den Beginn der Nummerierung der Zeilen und Spalten ist 0. Dies kann jedoch geändert werden (wird im Folgenden vorausgesetzt). Dazu wird im Rechnen-Menü Optionen gewählt und dort in der Registerkarte "Vordefinierte Variablen" der Startindex auf 1 gesetzt.

$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Transponierung einer Matrix:

Nach Nennung oder Eingabe der Matrix M^T auf der Matrix-Palette oder $M^T \rightarrow$ auf der Symbolik-Palette anklicken

$1 + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B + C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

Einfache Operationen mit Matrizen; zulässig ist auch die Addition einer Matrix mit einer Zahl.

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 20 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 12 \end{pmatrix}$

Multiplikation zweier Matrizen

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.143 & 0.571 & -0.857 \\ 0.571 & -0.286 & 0.429 \\ -0.286 & 0.143 & 0.286 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \frac{-1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -4 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Inverse einer quadratischen Matrix:

Anklicken von ▪ auf der Matrix-Palette für eine numerische Berechnung oder von $M^{-1} \rightarrow$ auf der Symbolik-Palette für eine symbolische Berechnung

$A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0.4 \\ 0.9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1.8 \\ 2.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

$x := \text{llösen}(A, b) = \begin{pmatrix} -0.871 \\ -0.572 \\ 6.999 \end{pmatrix}$

$x_2 = -0.572$

Lösung eines linearen Gleichungssystems:

$4x + 3y + z = 1{,}8$

$x - y + 0{,}4 = 2{,}5$

$0{,}9x + 3y + z = 4{,}5$

Die Koeffizienten der Unbekannten werden in der Koeffizientenmatrix A abgelegt, die rechte Seite im Vektor b. Lösung durch die Numerik-Funktion llösen(A,b), wenn die Matrix A nicht singulär ist.